

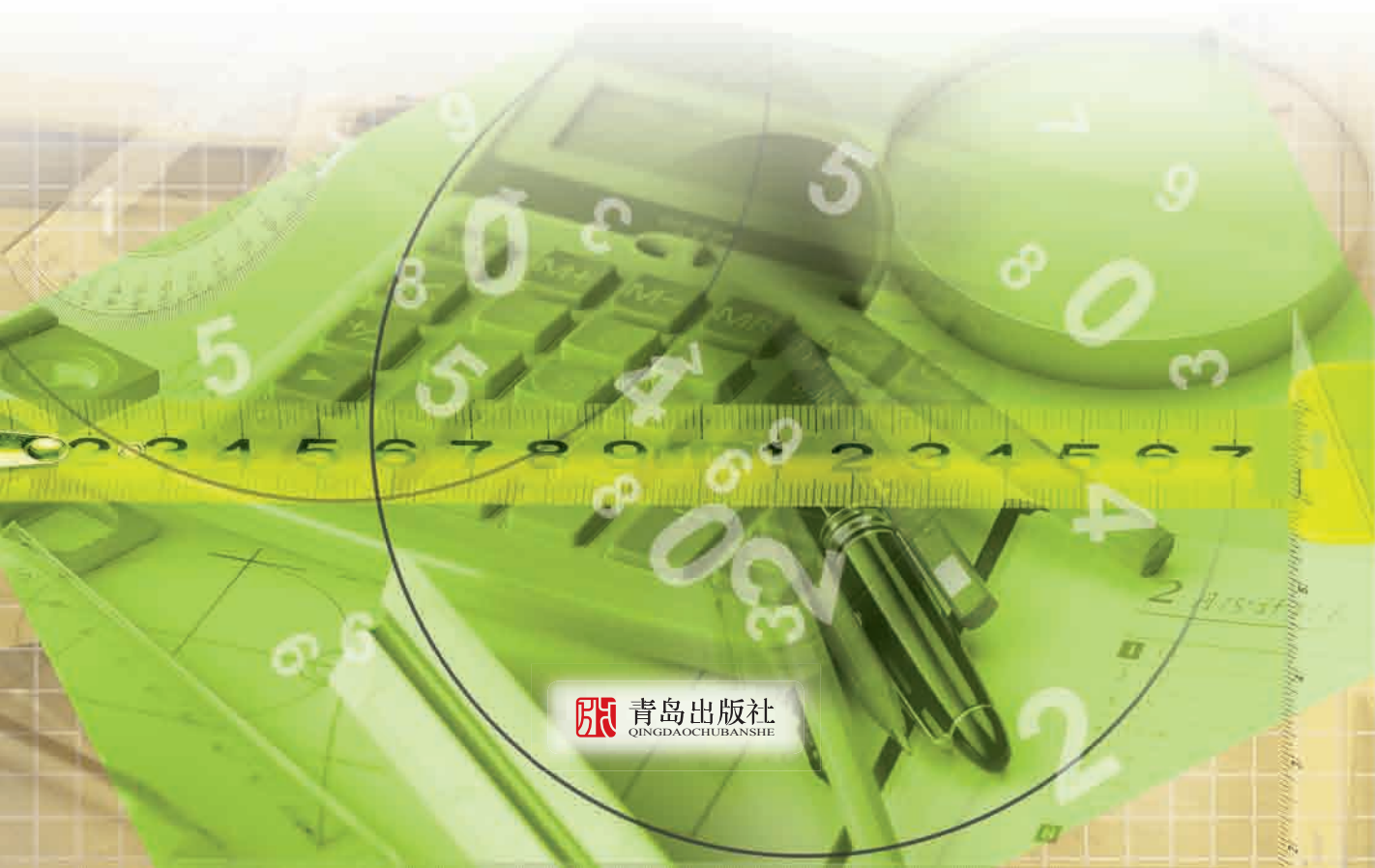


义务教育教科书

数学

七年级 下册

SHUXUE



青岛出版社
QINGDAOCHUBANSHE

义 务 教 育 教 科 书

数 学

七年级 下册



书 名 义务教育教科书 数学（七年级下册）
主 编 展 涛
出版发行 青岛出版社
社 址 青岛市海尔路 182 号（266061）
本社网址 <http://www.qdpub.com>
责任编辑 刘海波 戴振宇
美术编辑 路渊源
制 版 济南汇海科技有限公司
印 刷 日照昆城印业有限公司
出版日期 2012 年 6 月第 2 版 2021 年 12 月第 17 次印刷
开 本 16 开（787mm×1092mm）
印 张 11.75
字 数 200 千
书 号 ISBN 978-7-5436-3323-0
定 价 10.89 元
编校质量、盗版监督服务电话 4006532017 （0532）68068638

新学期寄语

同学们，伴随着春天的脚步，新的学期开始了！

“一年之计在于春”，你打算在新的一年里怎样学好数学？

你在第一、二学段对角、垂直、平行等已经有了认识. 怎样比较两个角的大小？怎样画一条直线的垂线？平行线有哪些性质？怎样判定两条直线平行？怎样画一条直线的平行线？你将在第8、第9两章中研究和探索这些问题.

上学期你已经会解一元一次方程了，本学期你还要学习二元一次方程组和三元一次方程组. 有许多有趣的问题正等着你去思考呢！

提到正整数指数幂，你已经学习了它的意义，那么正整数指数幂有哪些运算性质？幂的指数还可以是零或负整数吗？像水分子的质量这么小的数能用科学记数法表示吗？这些问题你不久就会学到.

你已学过整式的加、减运算，这学期你还要学习整式的乘法运算. 在此之后，你会遇到多项式乘法的逆问题——如何将一个多项式分解成几个因式的乘积. 你将学习因式分解的几种常用方法.

你已经接触过三角形、多边形和圆，这些都是最常见的平面图形. 你知道它们各有哪些性质吗？本书将带你进入平面图形的缤纷世界.

去体育馆看比赛，你会按入场券找到自己的座位. 然而怎样确定平面内一个点的位置呢？本学期将学习一种重要的工具——直角坐标系，将来我们还要学习在坐标系中描绘函数的图象，直观地研究函数和方程，直角坐标系的作用可大啦！

数学来源于生活，生活中充满数学. 学习数学的道路并非坦途，可能会遇到困难和曲折. 然而只要有决心和毅力，就会有丰厚的回报.

让我们在快乐中学习数学，在学习数学中体验快乐！

目 录

第8章	角	2
8.1	角的表示	4
8.2	角的比较	7
8.3	角的度量	10
8.4	对顶角	16
8.5	垂直	19
	回顾与总结	23
第9章	平行线	26
9.1	同位角、内错角、同旁内角	28
9.2	平行线和它的画法	31
9.3	平行线的性质	35
9.4	平行线的判定	38
	回顾与总结	43
第10章	一次方程组	46
10.1	认识二元一次方程组	48
10.2	二元一次方程组的解法	51
*10.3	三元一次方程组	56
10.4	列方程组解应用题	61
	回顾与总结	70
第11章	整式的乘除	74
11.1	同底数幂的乘法	76
11.2	积的乘方与幂的乘方	78
11.3	单项式的乘法	82
11.4	多项式乘多项式	86
11.5	同底数幂的除法	91

11.6	零指数幂与负整数指数幂	95
	回顾与总结	105
第12章	乘法公式与因式分解	108
12.1	平方差公式	110
12.2	完全平方公式	112
12.3	用提公因式法进行因式分解	118
12.4	用公式法进行因式分解	121
	回顾与总结	125
第13章	平面图形的认识	128
13.1	三角形	130
13.2	多边形	141
13.3	圆	148
	回顾与总结	153
综合与实践	多边形的密铺	157
第14章	位置与坐标	162
14.1	用有序数对表示位置	164
14.2	平面直角坐标系	168
14.3	直角坐标系中的图形	172
14.4	用方向和距离描述两个物体的相对位置	178
	回顾与总结	181

第8章 角

内容提要

- 角的表示
- 角的比较
- 角的度量
- 角平分线
- 余角





情境导航

开头的段落，是描述情境，将读者带入情境，
种和感觉的花径——
在这幅图景中，你看到了那美丽的景色！

8.1 角的表示



交流与发现

你还记得以前学过的角吗？从铁桥、梯子、标志牌的图片中（图8-1），你看到角的形象了吗？你还能在生活中找到类似的例子吗？这些角的形象有什么共同特点？与同学交流.



铁 桥



梯 子



标志牌

图 8-1

如图8-2，有公共端点的两条射线组成的图形叫做角（angle）. 这个公共端点叫做角的顶点（vertex），这两条射线叫做角的边（side）. 在图8-2中，点 O 是角的顶点，射线 OA 与 OB 是角的边.

角用符号“ $\angle$ ”和三个大写英文字母表示. 图8-2中的角可以记作 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$. 表示顶点的字母 O 必须写在中间，读作“角 AOB ”或“角 BOA ”. 如果在顶点处只有一个角，也可以只用表示这个顶点的字母来表示这个角. 如图8-2中的 $\angle AOB$ 也可记作 $\angle O$.

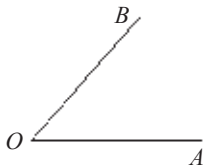
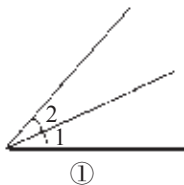
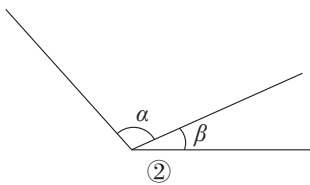


图 8-2



①



②

图 8-3

为了方便，有时还可以在靠近顶点处画上弧线，并用一个数字或一个小写希腊字母表示一个角. 例如，图8-3中的 $\angle 1$ ， $\angle 2$ 或 $\angle \alpha$ ， $\angle \beta$ 等.

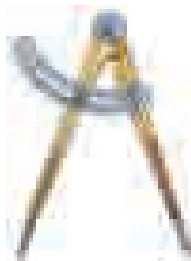


观察与思考

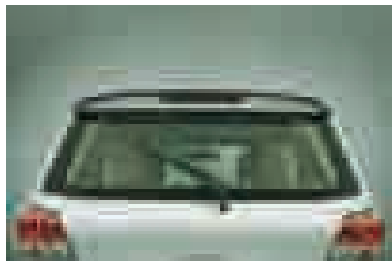
(1) 从台秤指针的转动、圆规的张开、汽车雨刷的摆动中(图8-4), 你能发现角的形象吗? 与同学交流.



台秤



圆规



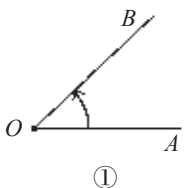
汽车雨刷

图 8-4

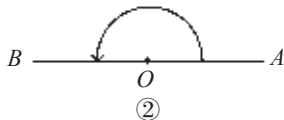
(2) 观察图8-5 ①, 当射线 OA 绕着端点 O 旋转时, 它的起始位置 OA 和终止位置 OB 组成了一个什么图形?

角也可以看做是由一条射线绕着端点从起始位置旋转到终止位置所成的图形. 射线旋转时经过的平面部分是角的内部.

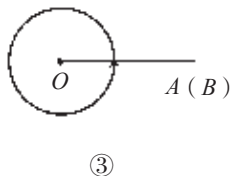
(3) 观察图8-5 ②, 射线 OA 绕端点 O 旋转, 当终止位置 OB 与起始位置 OA 成一条直线时, 所成的角是平角. 观察图8-5 ③, 射线 OA 继续按逆时针方向旋转, 当终止位置 OB 与起始位置 OA 重合时, 所成的角是周角.



①



②



③

图 8-5

今后, 在本书中所说的角, 如果没有特别注明, 都是指射线绕端点从起始位置旋转时, 还没有旋转到成为平角时的角.

例1 在图8-6中, 点 D 在线段 AB 上.

- (1) 以点 C 为顶点的角有哪几个? 把它们分别写出来.
- (2) 图中哪些角可以只用一个字母表示?

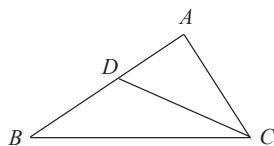


图 8-6

(3) 数一数, 图中共有多少个角?

解

(1) 以点 C 为顶点的角有 $\angle ACB$, $\angle ACD$, $\angle BCD$;

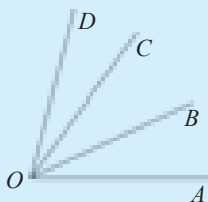
(2) 可以只用一个字母表示的角有 $\angle A$, $\angle B$;

(3) 图中共有7个角: $\angle A$, $\angle B$, $\angle ACB$, $\angle ACD$, $\angle BCD$, $\angle ADC$, $\angle BDC$.

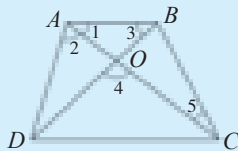


练习

1. 如图, 分别指出以射线 OA , OB , OC 为一边的角, 并把它们表示出来.



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 分别用三个大写字母表示 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$.

3. 请你举出几个由旋转产生的角的实例.



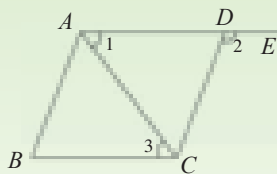
习题8.1



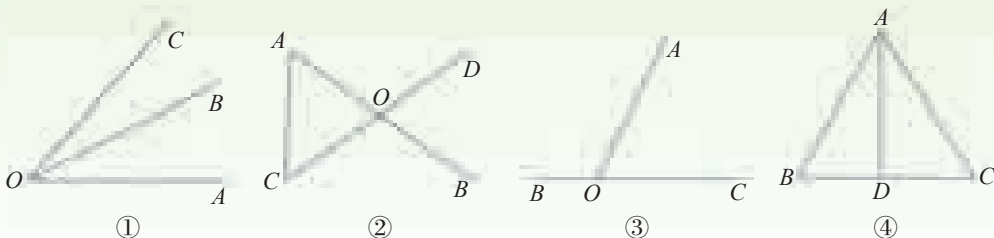
复习与巩固

1. 如图, 分别用三个大写字母表示图中的 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

2. 下面各图中哪些角可以只用一个大写字母表示? 哪些角必须用三个大写字母表示? 把它们分别写出来.



(第1题)



(第2题)



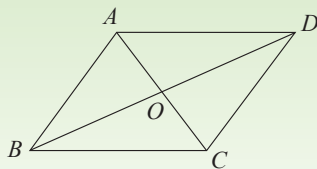
拓展与延伸

3. 数一数, 图中共有多少个角? 把它们分别表示出来.



探索与创新

4. 一个正常走动的时钟, 时针从某一时刻所在的位置开始, 旋转一个平角和一个周角, 各需要多少时间? 对于分针, 回答同样的问题.



(第3题)

8.2 角的比较



实验与探究

你已经会用叠合的方法, 比较两条线段的大小. 能用类似的方法, 比较两个角的大小吗?

(1) 如图8-7, 已知 $\angle AOB$, 请你用硬纸片任意剪出一个角, 记为 $\angle A'O'B'$.

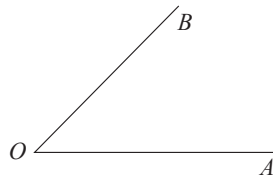


图 8-7

(2) 将 $\angle A'O'B'$ 的顶点 O' 与 $\angle AOB$ 的顶点 O 重合, 边 $O'A'$ 与边 OA 重合, 另一边 $O'B'$ 与边 OB 在重合边 OA ($O'A'$) 的同旁.

如果边 $O'B'$ 与边 OB 重合 (图8-8①), 那么就说 $\angle A'O'B'$ 等于 $\angle AOB$, 记作 $\angle A'O'B' = \angle AOB$; 如果边 $O'B'$ 落在 $\angle AOB$ 的外部 (图8-8②), 那么就说 $\angle A'O'B'$ 大于 $\angle AOB$, 记作 $\angle A'O'B' > \angle AOB$; 如果边 $O'B'$ 落在 $\angle AOB$ 的内部 (图8-8③), 那么就说 $\angle A'O'B'$ 小于 $\angle AOB$, 记作 $\angle A'O'B' < \angle AOB$.

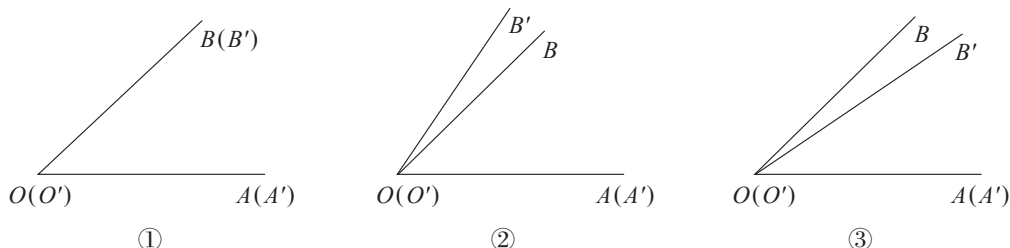


图 8-8

(3) 如图8-9, 将 $\angle A'O'B'$ 的顶点 O' 和 $\angle AOB$ 的顶点 O 重合, 边 $O'A'$ 与边 OB 重合, 并使两个角的另一边 OA 和 $O'B'$ 分别在重合边 OB ($O'A'$) 的两旁, 这时它们不重合的两边组成 $\angle AOB'$. 那么 $\angle AOB'$, $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 之间有什么数量关系?

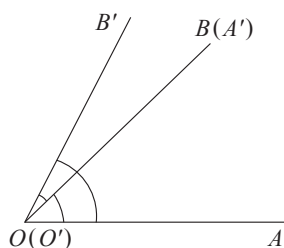


图 8-9

这时就说 $\angle AOB'$ 是 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 的和, 记作 $\angle AOB' = \angle AOB + \angle A'O'B'$.

(4) 如果 $\angle AOB > \angle A'O'B'$, 如图8-10, 将 $\angle A'O'B'$ 的顶点 O' 和 $\angle AOB$ 的顶点 O 重合, 边 $O'A'$ 与边 OA 重合, 那么 $\angle BOB'$, $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 有什么数量关系?

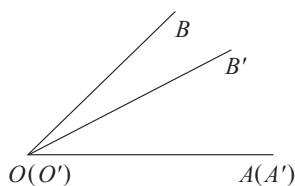


图 8-10

这时就说 $\angle BOB'$ 是 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 的差, 记作 $\angle BOB' = \angle AOB - \angle A'O'B'$.

(5) 在(3)中, 如果 $\angle AOB = \angle A'O'B'$ (图8-11), 那么 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 的和 $\angle AOB'$ 是 $\angle AOB$ 的2倍, 或 $\angle AOB$ 是 $\angle AOB'$ 的一半, 记作 $\angle AOB' = 2\angle AOB$ 或 $\angle AOB = \frac{1}{2}\angle AOB'$.

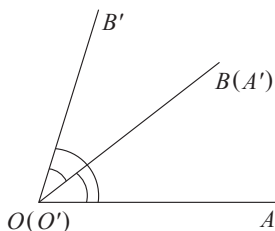


图 8-11

(6) 如图8-11, 一条射线(OB)把一个角($\angle AOB'$)分成了两个相等的角, 这条射线叫做这个角的平分线 (angular bisector). 这时,

$$\angle AOB = \angle BOB' = \frac{1}{2}\angle AOB'.$$

(7) 类似地, 你会拼出 $\angle AOB$ 的3倍和4倍的角吗?

当 $\angle \gamma = 3\angle \alpha$ 时, $\angle \alpha$ 就是 $\angle \gamma$ 的三分之一, 即 $\angle \alpha = \frac{1}{3}\angle \gamma$. 同样地, 当 $\angle \gamma = 4\angle \alpha$ 时, $\angle \alpha = \frac{1}{4}\angle \gamma$ 等等.

例1 如图8-12, 在 $\angle AOC$ 的内部画射线 OB , 在 $\angle AOC$ 的外部画射线 OD . $\angle AOC$ 是哪两个角的和? 是哪两个角的差? $\angle BOD$ 是哪两个角的和? 是哪两个角的差? 当 $\angle AOB = \angle COD$ 时, 你能找出其他相等的角吗?



加油站

这里用到了“等式两边都乘 (或除以) 同一个数, 所得的结果仍是等式”的基本性质. 一般地, 对含线段或角的等式, 等式的两个基本性质仍成立.

解

由图 8-12 可以看出, $\angle AOC$ 是 $\angle AOB$ 与 $\angle BOC$ 的和, 又是 $\angle AOD$ 与 $\angle COD$ 的差. 即

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC, \quad \angle AOC = \angle AOD - \angle COD.$$

同样地, $\angle BOD = \angle BOC + \angle COD$, $\angle BOD = \angle AOD - \angle AOB$.

当 $\angle AOB = \angle COD$ 时, $\angle AOC = \angle BOD$.

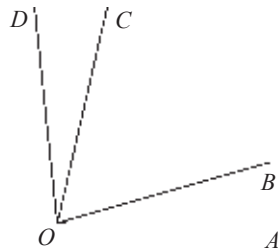


图 8-12

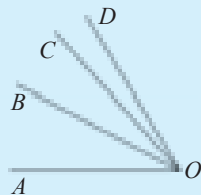
**练习**

1. 看图填空:

(1) $\angle AOD = \angle AOC + \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $\angle AOD - \angle BOD = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $\angle BOC = \underline{\hspace{2cm}} - \angle COD$.



(第 1 题)

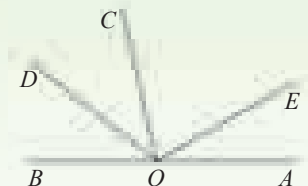
2. 利用叠合的方法, 比较一个三角尺中的三个角与同一副中另一个三角尺的三个角的大小.

**习题 8.2****复习与巩固**

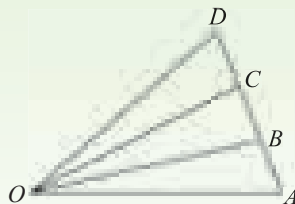
1. 如图, $\angle AOB$ 是平角, 过点 O 作射线 OE , OC , OD .

(1) $\angle BOE$ 能表示成哪两个角的和? 你有几种不同的表示方法?

(2) $\angle AOE$ 能表示成哪两个角的差? 你有几种不同的表示方法?



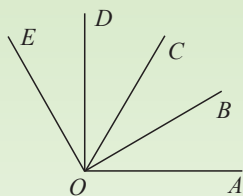
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 填空题: 如图, 已知 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$, 那么 $\angle BOC = \frac{1}{3} \angle \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{2} \angle \underline{\hspace{2cm}}$
 $= \frac{1}{2} \angle \underline{\hspace{2cm}}$.

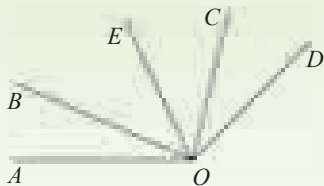
3. 如图, 如果 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE$, 那么射线 OB , OC 和 OD 分别是哪些角的平分线?



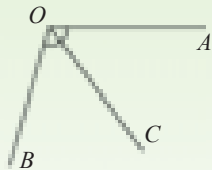
(第3题)

拓展与延伸

4. 如图, 已知 $\angle AOC = \angle BOD$, OE 是 $\angle BOC$ 的平分线, 图中还有哪些相等的角? 说明理由.



(第4题)



(第5题)

5. 选择题: 如图, 在下面的四个等式中, 不能表示“ OC 是 $\angle AOB$ 的平分线”的是 ().
- (A) $\angle AOC = \angle BOC$ (B) $\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB$
- (C) $\angle AOB = 2 \angle BOC$ (D) $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$

8.3 角的度量

你会使用量角器度量一个角吗? 你还记得角的度量单位吗?

把一个周角 360 等分, 每一份叫做 **1 度** (degree) 的角, 1 度记作 1° , 因此, $1 \text{ 周角} = 360^\circ$.

为了更精密地计算和度量角, 我们把 1° 的角 60 等分, 每一份叫做 **1 分** 的角, 1 分记作 $1'$. 把 $1'$ 的角 60 等分, 每一份叫做 **1 秒** 的角, 1 秒记作 $1''$.

$$1^\circ = 60', 1' = 60''.$$

例如 $\angle \alpha$ 的度数是 48 度 22 分 13 秒, 可以记作 $\angle \alpha = 48^\circ 22' 13''$.

度量角的单位度、分、秒, 与计量时间的时、分、秒一样, 都是六十进制. 在计算角的大小时, 应注意避免进位的错误.

比较两个角的大小, 也可以先对它们进行度量, 再比较度量的结果, 度数

大的角是较大的角.

观察量角器上的刻度,想一想,1直角等于多少度?1平角呢?你能说出锐角、钝角的度数的范围分别是多少吗?

例1 $48^{\circ}22'13''$ 与 48.37° 哪个大?

解 0.37° 是用十进制表示的,因此可先将 0.37° 用分、秒表示:

$$0.37^{\circ} = 60' \times 0.37 = 22.2',$$

$$0.2' = 60'' \times 0.2 = 12''.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 0.37^{\circ} &= 22' + 0.2' \\ &= 22' + 12'' = 22'12''. \end{aligned}$$

$$\text{因为 } 22'12'' < 22'13'',$$

$$\text{所以 } 48.37^{\circ} < 48^{\circ}22'13''.$$

想一想,本题你还有别的解法吗?

这两个角的度数部分都是 48° ,因此,只需要比较 $22'13''$ 与 0.37° 的大小,但它们的单位不统一,应先统一单位.



例2 已知 $\angle\alpha = 37^{\circ}49'40''$, $\angle\beta = 52^{\circ}10'20''$, 求:

$$(1) \angle\alpha + \angle\beta;$$

$$(2) \angle\beta - \angle\alpha.$$

解 因为 $\angle\alpha = 37^{\circ}49'40''$, $\angle\beta = 52^{\circ}10'20''$, 所以

$$(1) \angle\alpha + \angle\beta = 37^{\circ}49'40'' + 52^{\circ}10'20'' = 90^{\circ};$$

$$(2) \angle\beta - \angle\alpha = 52^{\circ}10'20'' - 37^{\circ}49'40'' = 14^{\circ}20'40''.$$



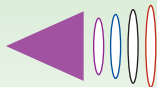
挑战自我

小莹在中午11时到12时之间回家时,看见墙上挂钟的时针与分针刚好成平角.你能算出这时是11时几分吗?



加油站

两个角的度数相加、减时,应按秒、分、度的次序相加、减.相加时,秒和分逢60进1位.相减时,如果需借位,借 1° ($1'$)化为 $60'$ ($60''$).



广角镜

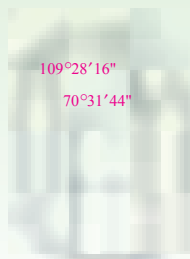
蜂房中的角

蜜蜂的蜂巢是由一个个蜂房紧密排列而成的(图8-13 ①),蜂房的入口处是由一个个两两相邻的正六边形(六条边相等,六个角也相等)排成的,这些正六边形的每

个角都是 120° ，每一个蜜蜂蜂房的底部都被3个相邻的边长相等的平行四边形密封住. 科学家经过精心计算惊奇地发现，每个平行四边形的钝角都是 $109^\circ 28' 16''$ ，锐角都是 $70^\circ 31' 44''$ （图8-13 ②）. 因此，绝不能小瞧一只小小的蜜蜂，它们是自然界中天才的“建筑师”.



①



②

图 8-13 蜂 房



练习

1. 把下列角的单位由度、分、秒换算成度：

(1) $22^\circ 30'$ ；

(2) $3' 36''$.

2. 比较 32.15° 与 $32^\circ 15'$ 的大小.

3. 计算：

(1) $56^\circ 18' + 72^\circ 48'$ ；

(2) $131^\circ 28' - 51^\circ 32' 15''$ ；

(3) $12^\circ 30' 20'' \times 2$.



观察与思考

观察图8-14和图8-15，你能说出图8-14中 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 的和以及图8-15中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的和各是多少度吗？



图 8-14 油 画



图 8-15 花样滑冰

两个角的和为 90° ，就说这两个角互为余角，简称互余，其中一个角叫做另一个角的余角 (complementary angle)。

两个角的和为 180° ，就说这两个角互为补角，简称互补，其中一个角叫做另一个角的补角 (supplementary angle)。

在图8-14中， $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互余；在图8-15中， $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补；在本节例2中， $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互余. 你还能举出余角和补角的例子吗？

例3 一个角的补角是它的余角的3倍，求这个角的度数.

解 设这个角是 x° ，那么它的补角是 $(180 - x)^\circ$ ，余角是 $(90 - x)^\circ$ ，根据题意，得

$$180 - x = 3(90 - x).$$

解这个方程，得

$$x = 45.$$

所以，这个角是 45° 。



交流与发现

如图8-16， $\angle AOC = \angle BOD = 90^\circ$ ，找出 $\angle 3$ 的两个余角，它们相等吗？为什么？与同学交流.



因为 $\angle 1 = 90^\circ - \angle 3$,
 $\angle 2 = 90^\circ - \angle 3$,
 所以 $\angle 1 = \angle 2$.

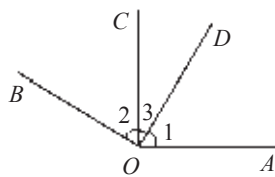


图 8-16

由此可以得到余角的一个性质：

同角或等角的余角相等.

类似地，当 $\angle A = \angle B$ ， $\angle C$ ， $\angle D$ 分别是 $\angle A$ ， $\angle B$ 的补角时， $\angle C$ 与 $\angle D$ 相等吗？为什么？

由此可以得到补角的一个性质：

同角或等角的补角相等.



广角镜

从角的单位制说起

度、分、秒是角度制的计量单位， $1^\circ = 60'$ ， $1' = 60''$ ，与它类似的六十进制还有时间计量单位，1时 = 60分，1分 = 60秒.

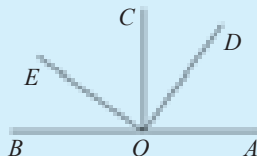
六十进制起源于古代的巴比伦. 为什么当时人们要选取60作为进位制的基数呢？据说是由于60这个数是2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60等许多自然数的倍数，而60可分解为12乘5，12是一年中的月数，5是人的一只手的手指数. 还有人认为，古巴比伦人最初以360天为一年，将圆周分为360度，太阳每天“运行”1度.

在数学上，角的单位制还有弧度制. $1\text{弧度} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44.8''$. 此外，军事上度量角度常采用密位制，1密位可以近似地看做1 000米外正对观察者的1米长的物体的视角. 英美等国家采用的密位单位为1密位 = 0.056° . 我国采用的密位单位为1密位 = 0.06° .



练习

- 分别求 12° ， $48^\circ 30'$ 和 $89^\circ 10' 50''$ 的余角和补角.
- 两个锐角能互补吗？两个钝角能互补吗？有人说：如果两个角互补，其中一定有一个角是钝角，另一个角是锐角. 你认为这种说法正确吗？为什么？
- 如图， O 是直线 AB 上的一点， $\angle AOC = \angle DOE = 90^\circ$ ，指出图中与 $\angle BOE$ 相等的角、互余的角和互补的角.



(第3题)

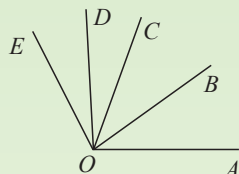


习题8.3

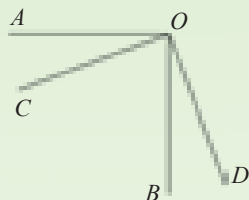


复习与巩固

- (1) 用度、分、秒表示 55.31° ; (2) 用度表示 $46^\circ 24'$.
- 计算:
 - $23^\circ 46' + 58^\circ 28'$;
 - $51^\circ 37' - 32^\circ 5' 31''$.
- 如图, OB 是 $\angle AOC$ 的平分线, OD 是 $\angle COE$ 的平分线. 如果 $\angle AOC = 70^\circ$, $\angle COE = 45^\circ$, 那么 $\angle BOD$ 是多少度?
- 一个角的余角是它的 $\frac{1}{2}$, 求这个角的度数.
- 如图, 已知 $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, $\angle AOC = 20^\circ 45'$. 求 $\angle AOD$ 的度数.



(第3题)

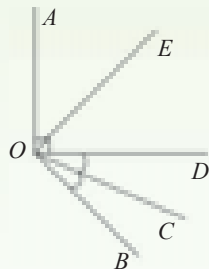


(第5题)



拓展与延伸

- 下列说法中, 哪些是正确的? 说明理由.
 - 互余且相等的两个角各是 45° ;
 - 一个角的余角一定小于这个角的补角;
 - 如果 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$, 那么 $\angle 1$ 的余角与 $\angle 2$ 的余角的和等于 $\angle 3$ 的余角;
 - 如果 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$, 那么 $\angle 1$ 的余角与 $\angle 2$ 的余角的和等于 $\angle 3$ 的补角.
- (1) 一副三角尺中, 哪几对角互为余角? 哪几对角互为补角?
 (2) 用一副三角尺, 你能画出 15° , 105° 和 150° 的角吗?
 (3) 用一副三角尺, 你能画出哪些小于平角的角?
- 如图, $\angle AOD$ 是直角, OE 平分 $\angle AOD$, OC 平分 $\angle BOD$, $\angle COE = 70^\circ$. 求 $\angle BOD$ 的度数.



(第8题)



探索与创新

- 时钟上, 在3时到4时之间, 什么时刻时针与分针成 90° 的角? 请你画图表示出来.

8.4 对顶角



观察与思考

AB , CD 是两条交叉的公路. 把它们看做两条相交直线, 交点记作 O (图 8-17).

(1) 如果不计图中的平角和周角, 它们共形成了几个角?

(2) 这些角的顶点具有什么特征?

(3) 观察 $\angle AOD$ 与 $\angle BOC$, 你发现它们的两边具有什么特征? $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 呢?

一般地, 两条直线相交形成两对对顶角 (opposite angles). 成对顶角的两个角有公共的顶点, 其中一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线. 在图 8-17 中, $\angle AOD$ 与 $\angle BOC$, $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 分别是对顶角.

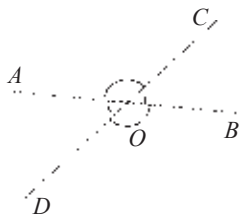
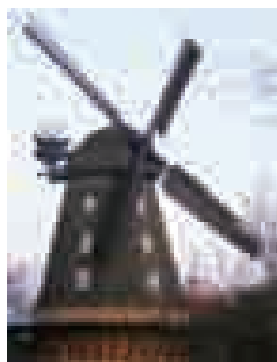


图 8-17



风 车

图 8-18

图 8-18 是一张风车的照片, 你能从中发现对顶角的形象吗? 你还能举出生活中对顶角的例子吗?



实验与探究

在纸上任意画出两条相交直线，用剪子剪下它们所成的四个角，比较成对顶角的两个角的大小，你有什么发现？你能说明为什么对顶角具有这种数量关系吗？与同学交流.

在图8-17中， $\angle AOD$ 与 $\angle BOD$ 互为补角， $\angle BOC$ 与 $\angle BOD$ 也互为补角，因为同角的补角相等，所以 $\angle AOD = \angle BOC$.

由此得到对顶角的性质：

如果两个角是对顶角，那么这两个角相等.

例1 如图8-19，直线 AB 与 CD 相交于点 O ，射线 OE 是 $\angle BOD$ 的平分线. 已知 $\angle AOD = 110^\circ$ ，分别求 $\angle COB$ ， $\angle AOC$ ， $\angle BOE$ ， $\angle EOD$ 的度数.

解 因为 $\angle COB$ 与 $\angle AOD$ 是对顶角，所以

$$\angle COB = \angle AOD = 110^\circ.$$

$$\angle AOC = \angle COD - \angle AOD = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

因为 $\angle BOD$ 与 $\angle AOC$ 是对顶角，所以 $\angle BOD = \angle AOC = 70^\circ$.

由 OE 平分 $\angle BOD$ ，得 $\angle BOE = \angle EOD = \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ$.

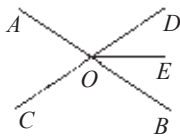
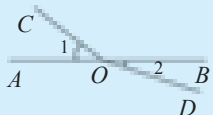


图 8-19



练习

1. 如图， AB 是一条直线，下面各图中的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角吗？为什么？



①

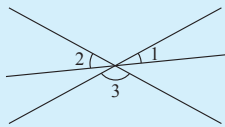


②



③

(第1题)



(第2题)

2. 如图，三条直线相交于一点，求 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ 的度数.

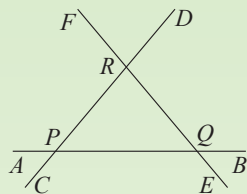


习题8.4



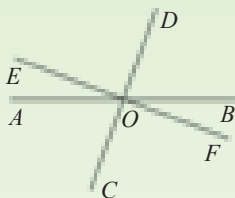
复习与巩固

1. 如图，三条直线 AB , CD , EF 两两相交，分别写出图中所有的对顶角.

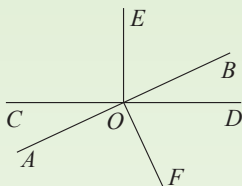


(第1题)

2. 如图， AB , CD , EF 是经过点 O 的三条直线. 如果 $\angle EOD = 89^\circ$, $\angle AOC = 70^\circ$, 那么 $\angle BOF$ 等于多少度? 为什么?



(第2题)



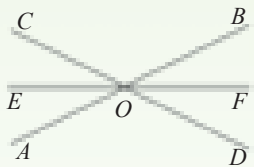
(第3题)

3. 已知直线 AB 与 CD 相交于点 O , $\angle COE = 90^\circ$, $\angle AOF = 90^\circ$, $\angle BOE = 65^\circ$, 求 $\angle DOF$ 和 $\angle AOC$ 的度数.

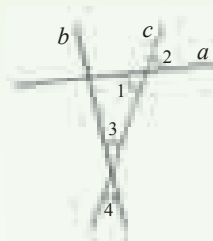


拓展与延伸

4. 如图，直线 AB , CD , EF 相交于点 O . 如果 OE 是 $\angle AOC$ 的平分线，那么 OF 是 $\angle BOD$ 的平分线吗? 为什么?



(第4题)



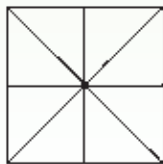
(第5题)

5. 如图，直线 a , b , c 两两相交， $\angle 1 = 2\angle 3$, $\angle 2 = 65^\circ$. 求 $\angle 4$ 的度数.



探索与创新

6. 如图是练习书法时使用的“米字格”. 你能数出图中有多少对对顶角吗?



(第6题)

8.5 垂 直

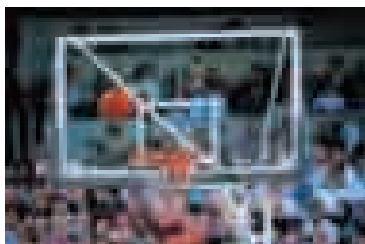


观察与思考

在图 8-20 和图 8-21 中,你能找出直角的形象吗?你还能举出直角的实例吗?



砖 墙
图 8-20



篮球架
图 8-21

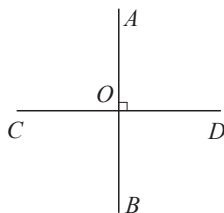
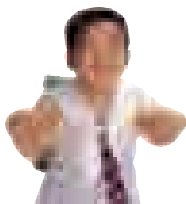


图 8-22

如图 8-22, 直线 AB 与 CD 相交于点 O . 如果 $\angle AOD$ 是直角, 图中的其他三个角是什么角? 为什么? 与同学交流.



因为 $\angle AOD = 90^\circ$, $\angle COB$ 与 $\angle AOD$ 是对顶角, 所以 $\angle COB$ 是直角.

因为 $\angle AOD = 90^\circ$, $\angle AOC$ 是 $\angle AOD$ 的补角, 所以 $\angle AOC = 90^\circ$. 同理, $\angle BOD$ 也是直角.



在两条直线相交所成的四个角中, 如果有一个角是直角, 就说这两条直线互相垂直 (perpendicular), 其中一条直线叫做另一条直线的垂线 (perpendicular line), 它们的交点叫做垂足 (foot of perpendicular).

如图 8-22, 直线 AB 与 CD 互相垂直, 记作 “ $AB \perp CD$ ” 或 “ $CD \perp AB$ ”, 读作 “ AB 垂直于 CD ” 或 “ CD 垂直于 AB ”.



实验与探究

如图8-23, 经过直线 l 上一点 A , 你能用三角尺画直线 l 的垂线吗? 你画出的垂线有几条? 经过直线 l 外一点 B 呢?

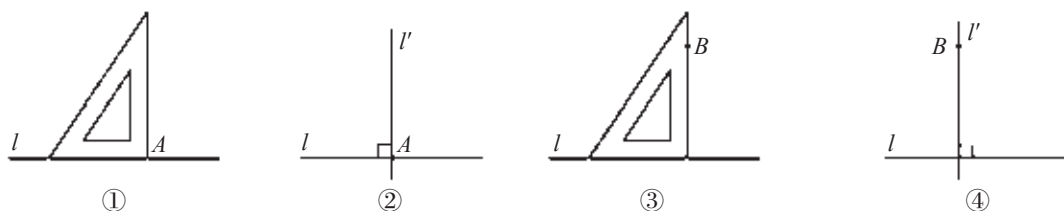


图 8-23

经过一点画一条直线的垂线, 不论这点在直线上还是直线外, 都能够画出一条, 并且只能画出一条. 也就是说,

经过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

这是垂线的一个基本性质.

如图8-24, 你会用量角器经过直线 l 上的一点 A 或直线 l 外的一点 B 画直线 l 的垂线吗? 与同学交流.

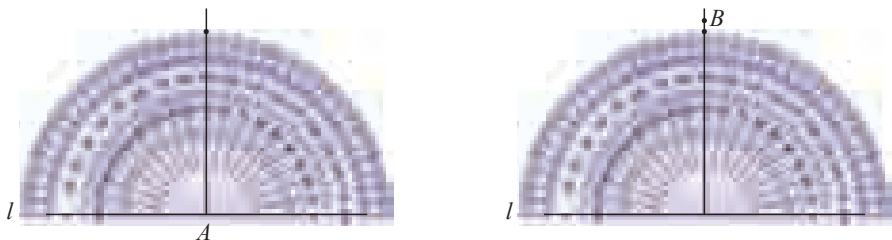


图 8-24



交流与发现

如图8-25, 点 A 是直线 l 外的一点, 画 $AD \perp l$, 垂足为点 D , 线段 AD 叫做点 A 到直线 l 的**垂线段**.

在 l 上任取几个点, 例如点 B, C, E , 利用圆规比较线段 AB, AC, AD, AE 的长短, 这些线段中哪一条最短? 与同学交流.

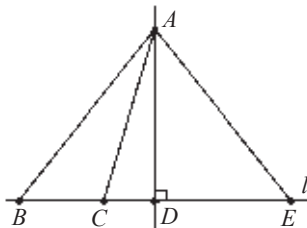


图 8-25

于是,可以得到垂线的另一个性质:

连接直线外一点与直线上各点的所有线段中,垂线段最短.

直线外一点到这条直线的垂线段的长度,叫做这个点到这条直线的距离.

如图8-26, 要把水渠的水引到水池C, 从渠堤AB的什么地方开沟, 水沟的长度最短? 你能在图上表示出来吗? 谈谈你的理由.

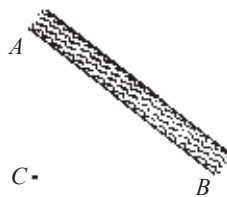


图 8-26



挑战自我

如图8-27, 取一张长方形纸片, 按下列方法折纸, 然后回答问题:

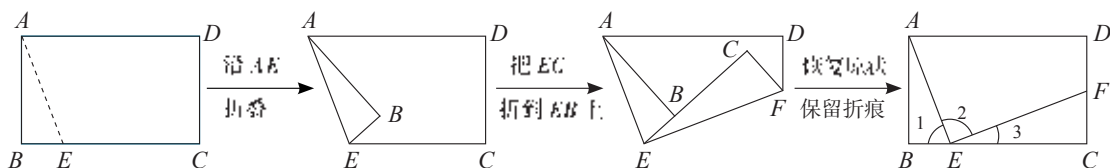


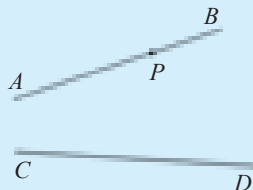
图 8-27

- (1) $AE \perp EF$ 吗? 为什么?
- (2) $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 有什么关系? 为什么?

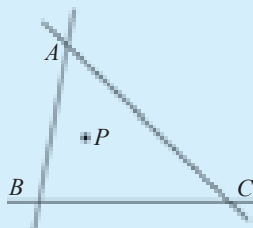


练习

1. 如图, 用三角尺或量角器经过点P分别画出直线AB与CD的垂线.



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 用刻度尺分别量出点P到直线AB, BC和AC的距离.



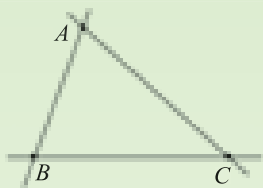
习题8.5



复习与巩固

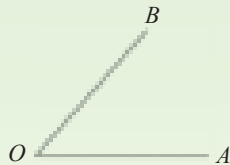
1. 如图，用三角尺或量角器画图：

- (1) 经过点 A 画出直线 BC 的垂线；
- (2) 经过点 B 画出直线 AC 的垂线；
- (3) 经过点 C 画出直线 AB 的垂线。

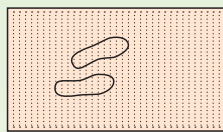


(第1题)

2. 如图，用量角器画出 $\angle AOB$ 的平分线 OC ，在 OC 上任取一点 P ，经过点 P 分别画出 OA ， OB 的垂线。



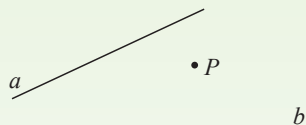
(第2题)



(第3题)

3. 如图是小亮跳远时沙坑的示意图，其中 l 是起跳线，应当怎样测量小亮的跳远成绩？为什么？

4. 为了架设变电站 P 到输电线路 a 与 b 的电力线，需在比例尺为 $1:100\,000$ 的右图中分别测量出点 P 到 a ， b 的距离，你能量出这些距离吗（精确到 0.1 千米）？

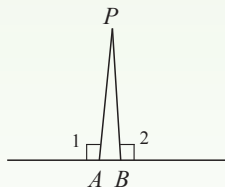


(第4题)

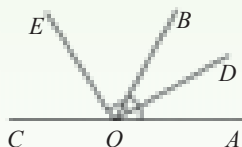


拓展与延伸

5. 小亮在纸上画了一个图，并注明 $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ，他画的图对吗？为什么？



(第5题)



(第6题)

6. 点 O 在直线 AC 上，以 O 为顶点画射线 OB ，然后画出 $\angle AOB$ 的平分线 OD 和 OD 的垂线 OE 。 OE 平分 $\angle BOC$ 吗？为什么？



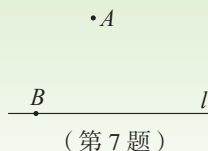
探索与创新

7. 如图, 已知 A 为直线 l 外的一定点, B 为直线 l 上的一个动点.

(1) 当点 B 自左向右移动时, A, B 两点间的距离是否发生变化?

(2) 如果发生变化, 当 B 点到达哪个位置时, A, B 两点间的距离最短?

(3) 你能进一步说明 A, B 两点间距离的变化趋势吗?



回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容? 总结一下, 并与同学交流.
2. 角是简单的几何图形, 说一说你是怎样理解角的概念的.
3. 表示一个角有哪些方法? 两个角的和与差是怎么规定的? 什么是角的平分线?
4. 比较两个角的大小有哪些方法?
5. 什么是1度的角? 1分的角? 1秒的角? 角度制的单位和进位制是怎样的?
6. 怎样的两个角互为余角? 怎样的两个角互为补角? 怎样的两个角互为对顶角? 你学习了哪些有关它们的性质?
7. 垂直是两条直线相交的一种特殊情况. 怎样的两条直线互相垂直?
8. 你学习了垂线的哪些性质? 什么是点到直线的距离?

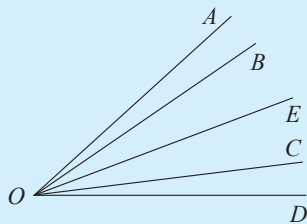


综合练习

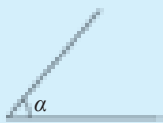


复习与巩固

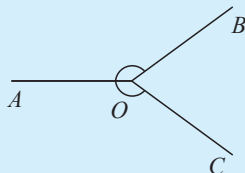
1. 如图, 已知 $\angle AOB = \angle COD = 8^\circ$, $\angle AOD = 43^\circ$, OE 是 $\angle AOD$ 的平分线. 求 $\angle BOE$, $\angle COE$, $\angle AOE$ 的度数.
2. 折一张长方形的纸片, 只允许折一次.
 - (1) 你能得到一对互余的角吗?
 - (2) 你能得到两对互余的角吗?
 - (3) 你能得到两对互补的角吗?



3. 如图, 已知 $\angle\alpha$, 用量角器画一个角, 使它等于 $\angle\alpha$ 的补角的一半.



(第3题)

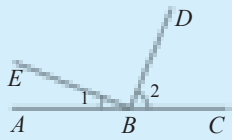


(第4题)

4. 如图, $\angle AOB = \angle AOC$, $\angle BOC = 80^\circ$. 求 $\angle AOB$ 的度数.

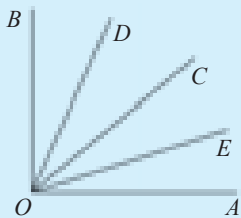
5. 填空: 已知 $\angle A = 47^\circ 55' 40''$, $\angle B$ 与 $\angle A$ 互余, $\angle C$ 与 $\angle A$ 互补, 那么 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$, $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 如图, 点 B 在直线 AC 上, $\angle 1 = 23^\circ$, $\angle 2 = 68^\circ$, BE 与 BD 垂直吗? 为什么?

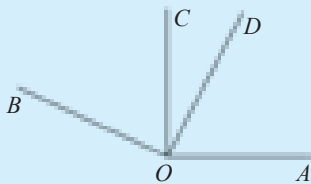


(第6题)

7. 如图, $\angle AOB$ 是直角, OE 平分 $\angle AOC$, OD 平分 $\angle BOC$. 求 $\angle EOD$ 的度数.



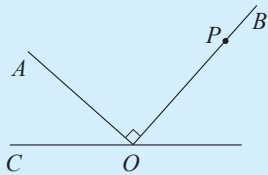
(第7题)



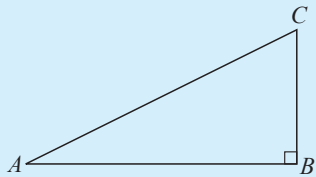
(第8题)

8. 如图, $OA \perp OC$, $OB \perp OD$, 垂足都是点 O , 如果 $\angle DOC = 27^\circ$, 那么 $\angle AOB$ 的度数是多少?

9. 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, P 是 OB 上的一点, 用刻度尺分别度量点 P 到直线 OA 和到直线 OC 的距离.



(第9题)



(第10题)

10. 如图, A, B, C 是三个村庄, 村庄之间有直通的道路 AB, AC 和 BC 相连. 如果 $AB \perp BC$, 那么这三个村庄中, 哪两个村庄的距离最远? 为什么?



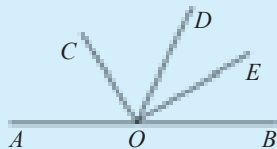
拓展与延伸

11. $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互补, 且 $\angle\alpha > \angle\beta$, 求 $\angle\beta$ 的余角 (用 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 表示).
12. 一个锐角的补角会不会等于这个锐角的余角的 2 倍? 为什么?

13. 如图, O 是直线 AB 上的一点, 射线 OC , OE 分别平分 $\angle AOD$ 和 $\angle BOD$.

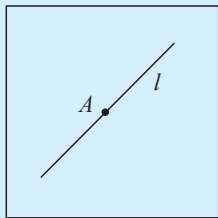
(1) 说出图中互余的角;

(2) 已知 $\angle AOC = 58^\circ$, 求 $\angle BOE$ 的度数.

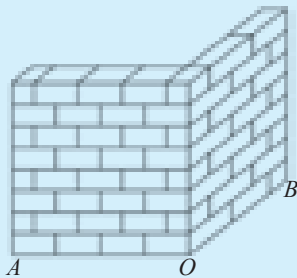


(第 13 题)

14. 如图, 在纸片上画出一条过点 A 的直线 l , 你能用折纸的方法, 使折痕过点 A 与直线 l 垂直吗?



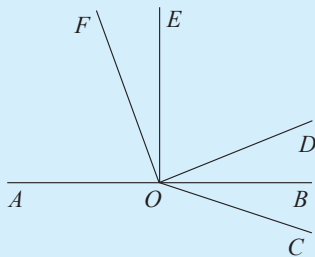
(第 14 题)



(第 15 题)

15. 如图, 已知某院落的墙角, 要测量墙在地面上所形成的 $\angle AOB$ 的度数, 请问应如何测量?

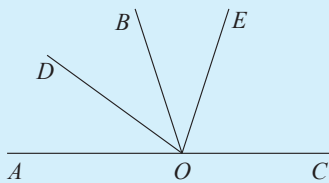
16. 如图, O 是直线 AB 上的一点, $\angle AOE = \angle FOD = 90^\circ$, OB 平分 $\angle COD$, 图中与 $\angle DOE$ 互余的角有哪些? 与 $\angle DOE$ 互补的角有哪些?



(第 16 题)

探索与创新

17. 如图, O 为直线 AC 上一点, OD 是 $\angle AOB$ 的平分线, OE 在 $\angle BOC$ 的内部, $\angle BOE = \frac{1}{3}\angle BOC$, $\angle DOE = 72^\circ$, 求 $\angle EOC$ 的度数.



(第 17 题)

18. 某电视台周六上午“少儿节目”9:05 开始, 这时时钟上分针与时针所成的角是多少度?
19. 过一个角的顶点, 在这个角的内部引 1 条射线, 共形成多少个角 (包括原来的角)? 如果引 2 条、3 条这样的射线呢? 由此, 请猜想, 过一个角的顶点, 如果在这个角的内部引 n 条射线, 共形成多少个角?

第9章 平行线

内容提要

- 同位角、内错角、同旁内角
- 平行线 和它的画法
- 平行线的性质
- 平行线的判定

A scenic view of a lake with a boat, framed by the cables and railing of a suspension bridge. The bridge's cables are prominent, creating a grid-like pattern over the water. A small boat is visible on the lake, and the background shows a forested hillside.

情境导航

这是一幅风景区的照片，你从中看到哪些平行线的形象？

9.1 同位角、内错角、同旁内角



观察与思考

图9-1是小亮所在学校周边的道路示意图，如果把图中的道路都看做直线，就得到图9-2.

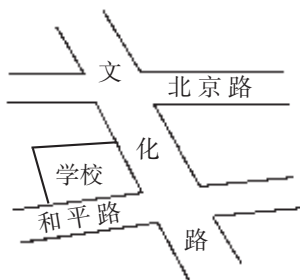


图 9-1

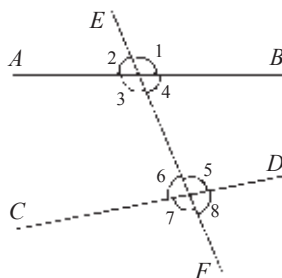


图 9-2

- (1) 在图9-2中，直线 AB ， CD 被直线 EF 所截，一共形成哪几个角？
- (2) 观察 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ ，它们有怎样的位置关系？

$\angle 1$ 与 $\angle 5$ 分别在直线 AB 与 CD 的同侧，并且都在直线 EF 的同旁，具有这种位置关系的一对角叫做**同位角**（corresponding angles）.

同样地， $\angle 2$ 与 $\angle 6$ 也是同位角. 除此之外，图9-2中还有其他的同位角吗？如果有，请你指出来.

- (3) 观察 $\angle 3$ 与 $\angle 5$ ，它们有怎样的位置关系？

$\angle 3$ 与 $\angle 5$ 都在直线 AB ， CD 之间，并且分别在直线 EF 的两旁，具有这种位置关系的一对角叫做**内错角**（alternate interior angles）.

除 $\angle 3$ 与 $\angle 5$ 之外，图9-2中还有其他的内错角吗？

- (4) 观察 $\angle 4$ 与 $\angle 5$ ，它们有怎样的位置关系？

$\angle 4$ 与 $\angle 5$ 都在直线 AB , CD 之间, 并且都在直线 EF 的同旁, 具有这种位置关系的一对角叫做**同旁内角** (interior angles on the same side).

除 $\angle 4$ 与 $\angle 5$ 之外, 图9-2中还有其他的同旁内角吗?

例1 在图9-3中, 直线 EF , GH 被直线 AB 所截, 哪几对角是同位角? 哪几对角是内错角? 哪几对角是同旁内角?

解 $\angle ACF$ 与 $\angle ADH$, $\angle FCB$ 与 $\angle HDB$,
 $\angle ACE$ 与 $\angle ADG$, $\angle ECB$ 与 $\angle GDB$ 分别是同位角;
 $\angle FCB$ 与 $\angle ADG$, $\angle ECB$ 与 $\angle ADH$ 分别是内错角;
 $\angle FCB$ 与 $\angle ADH$, $\angle ECB$ 与 $\angle ADG$ 分别是同旁内角.

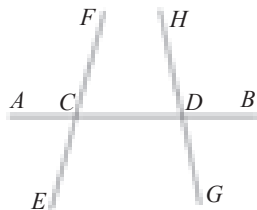


图 9-3

例2 在图9-4中, 直线 a , b 被直线 l 所截.

(1) $\angle 3$ 与哪个角是同位角?

(2) 如果 $\angle 1 = \angle 5$, 那么 $\angle 7$ 和 $\angle 8$ 分别与 $\angle 1$ 有什么数量关系? 说明理由.

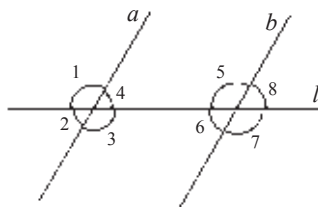
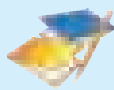


图 9-4

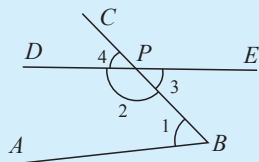
解 (1) $\angle 3$ 与 $\angle 7$ 是同位角.

(2) $\angle 7$ 与 $\angle 1$ 相等. 理由是: 因为 $\angle 1 = \angle 5$, 而 $\angle 7$ 与 $\angle 5$ 是对顶角, $\angle 7 = \angle 5$, 所以 $\angle 7 = \angle 1$. $\angle 8$ 与 $\angle 1$ 互补. 理由是: 因为 $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 8$ 与 $\angle 5$ 互补, 所以 $\angle 8$ 与 $\angle 1$ 互补.

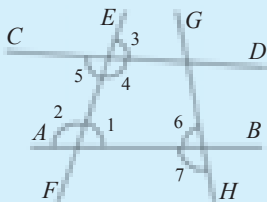


练习

1. 如图, 直线 DE 与 $\angle ABC$ 的边 BC 相交于点 P . 视直线 AB , DE 被直线 BC 所截, $\angle 1$ 与 $\angle 2$, $\angle 1$ 与 $\angle 3$, $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 分别是什么角?



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 直线 AB , CD 被直线 EF 所截, 在所标出的角中, 哪几对角是同位角? 哪几对角是内错角? 哪几对角是同旁内角? 类似地, 你能讨论直线 EF , GH 被直线 AB 所截形成的角的位置关系吗?

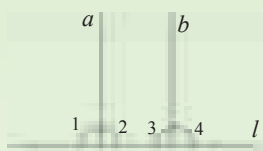


习题9.1

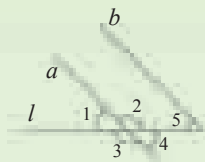


复习与巩固

1. 如图①②, 直线 a , b 被直线 l 所截, 在图中已标出的角中, 分别找出所有的同位角、内错角和同旁内角.

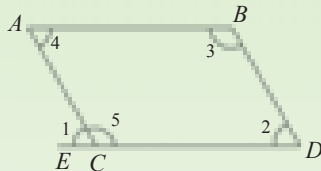


①



②

(第1题)



(第2题)

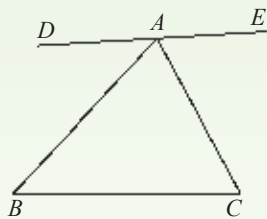
2. 填空: 如图, 在已标出的五个角中,

- (1) 直线 AC , BD 被直线 ED 所截, $\angle 1$ 与 _____ 是同位角;
- (2) $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 是直线 _____, _____ 被直线 _____ 所截得的内错角;
- (3) $\angle 2$ 与 _____ 是直线 AB , _____ 被直线 _____ 所截得的同旁内角.



拓展与延伸

3. 如图, 直线 DE 过点 A , $\angle B$ 与哪个角是内错角, 与哪个角是同旁内角? $\angle C$ 与哪个角是内错角, 与哪个角是同旁内角? 它们分别是哪两条直线被哪一条直线截得的?



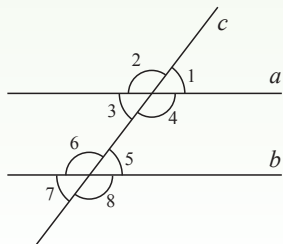
(第3题)



探索与创新

4. 如图, 直线 a , b 被直线 c 所截, 如果有一对同位角相等 (如 $\angle 1 = \angle 5$).

- (1) 你能说明其他几对同位角也分别相等吗?
- (2) 各对内错角是否分别相等? 为什么?
- (3) 此时, 两对同旁内角之间具有怎样的数量关系? 为什么?
- (4) 如果将上面的“有一对同位角相等”的条件换成“有一对同旁内角互补”, 你能得到哪些结论?



(第4题)

9.2 平行线和它的画法



观察与思考

(1) 观察一支六棱铅笔(图9-5), 你发现同一个面上的两条相对的棱所在的直线是相交直线吗?

(2) 观察黑板的上、下边缘所在的两条直线, 它们具有怎样的位置关系? 左、右边缘所在的直线呢?

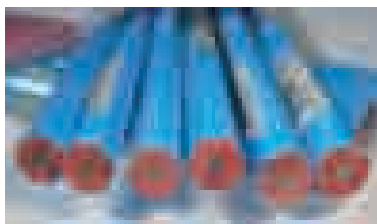


图 9-5 六棱铅笔

这些日常生活中的例子, 都给我们以不相交的两条直线的形象.

在同一平面内, 两条直线的位置关系除了相交的情况外, 还有不相交的情况. 平面内两条不相交的直线叫做**平行线**(parallel lines).

你能回答本章情境导航中提出的问题吗? 你还能在下面两幅图中找出平行线的形象吗?



五线谱



跑道

图 9-6

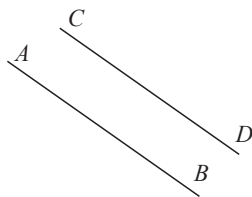


图 9-7

在图9-7中, 直线 AB 与直线 CD 平行, 记作“ $AB \parallel CD$ ”或“ $CD \parallel AB$ ”, 读作“ AB 平行于 CD ”或“ CD 平行于 AB ”.



实验与探究

如图9-8, 已知直线 a 和直线外一点 P , 能利用三角尺和直尺, 经过点 P , 画出与直线 a 平行的直线吗? 试一试, 并与同学交流.

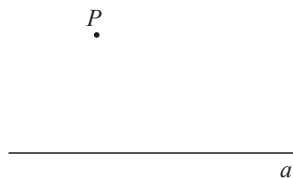


图 9-8

(1) 如图9-9①, P 是直线 a 外的一点, 用三角尺和直尺, 按照图9-9中所示的步骤, 便可画出经过点 P 的直线 a 的平行线 b . 请你动手画一画.

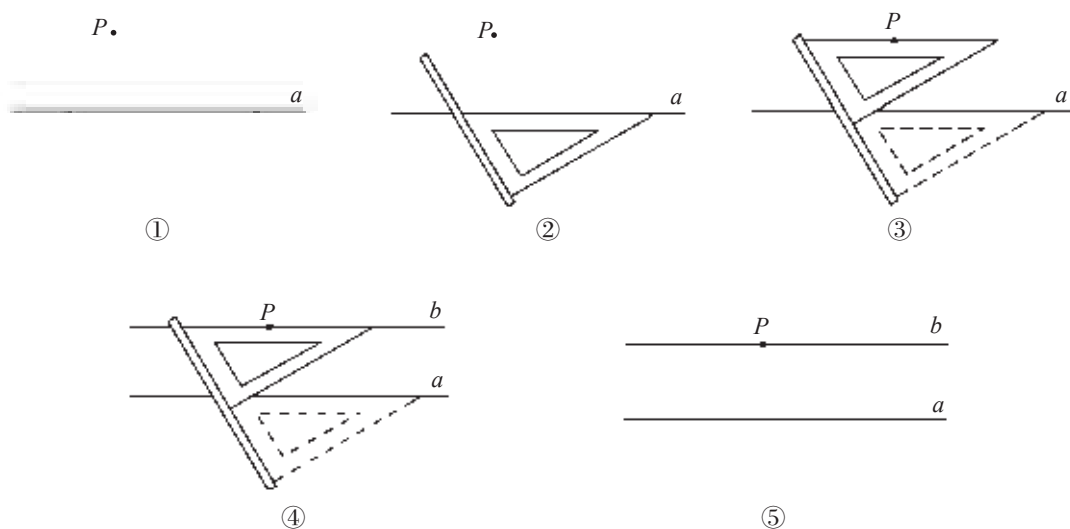


图 9-9

(2) 你能把上面画图的步骤叙述出来吗?

(3) 在上面的画图过程中, 你发现经过点 P 画直线 a 的平行线, 能画出几条?

通过画图可以发现, 过直线 a 外一点 P , 画这条直线的平行线, 能够画出一条, 并且只能画出一条. 这就是说,

过直线外一点, 有且只有一条直线与这条直线平行.

这是平行线的一条基本性质.

(4) 在9-9⑤中, 如果再在直线 a, b 之外取一点 Q , 画直线 $c \parallel a$ (图9-10), 你发现直线 b 与 c 平行吗?

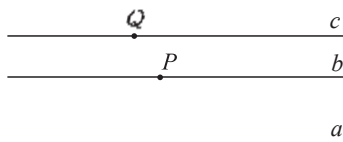
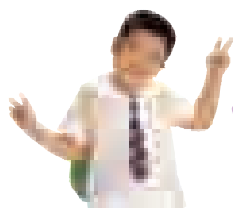


图 9-10

通过画图可以发现, 如果 $b \parallel a, c \parallel a$, 那么 $b \parallel c$. 这就是说,

平行于同一条直线的两条直线平行.

小亮试图用平行线的基本性质, 说明图9-10中直线 b 不会与直线 c 相交的道理.



直线 b 与直线 c 不会相交，因为如果它们相交于 M 点（图 9-11），那么……

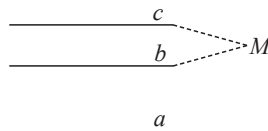
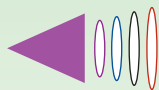


图 9-11



挑战自我

你能将小亮的话补充完整吗？



广角镜

传递性

如果直线 $a \parallel b$, $b \parallel c$, 那么直线 $a \parallel c$. 这个性质叫做平行关系的传递性.

数学中, 有很多关系具有传递性. 例如, 有理数的大小关系: 如果 $a > b$, $b > c$, 那么 $a > c$.

但也有一些关系不具有传递性. 例如, 直线的垂直关系: 由直线 $a \perp b$, $b \perp c$, 不能推出 $a \perp c$.

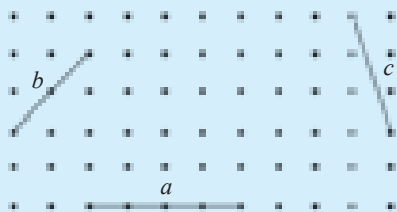
今后, 我们还会遇到类似的例子.

你能从过去学过的知识中, 举出一些具有传递性的例子吗?

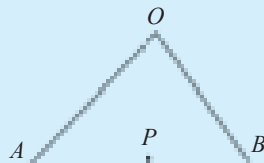


练习

1. 举出生活中平行线的实例.
2. 在如图所示的网格图上选取一点, 经过这个点分别画出线段 a , b , c 的平行线^①.
3. 如图, 过点 P 画 $PC \parallel OA$, 交 OB 于点 C ; 过点 P 画 $PD \parallel OB$, 交 OA 于点 D .



(第 2 题)



(第 3 题)

① 两条射线或线段平行, 是指它们所在的直线平行.



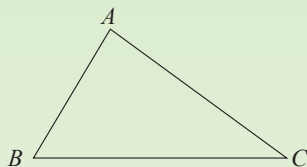
习题9.2



复习与巩固

1. 如图，用三角尺和直尺分别按下列要求画图：

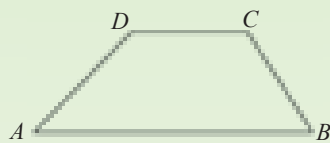
- (1) 过点 A 画 BC 的平行线；
- (2) 过点 B 画 AC 的平行线；
- (3) 过点 C 画 AB 的平行线.



(第1题)

2. 如图，用三角尺和直尺画图：

- (1) 过点 D 画 $DE \parallel CB$ ，交 AB 于点 E ；
- (2) 过点 A 画 $AF \parallel BC$ ，交 CD 的延长线于点 F .



(第2题)

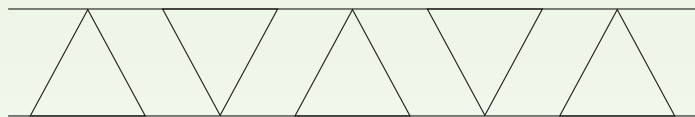


拓展与延伸

3. 按下列步骤画图：

- (1) 任取一点 O ，画 $OX = 2.5$ 厘米， $OY = 2.5$ 厘米，且使 $OX \perp OY$ ；
- (2) 过点 X ， Y 分别画 OY ， OX 的平行线，记它们的交点为 A ；
- (3) 用刻度尺把 OX ， OY 各分成 5 等份；
- (4) 过 OY 上每个分点画平行于 OX 的直线，过 OX 上每个分点画平行于 OY 的直线.

4. 如图，图①是一段花边的基本结构，请在图②中，画出与图①相同的图案.



①



②

(第4题)



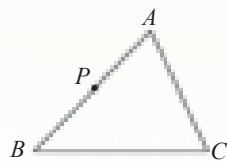
探索与创新

5. 如图，取线段 AB 的中点 P ，过点 P 画 BC 的平行线交 CA 于点 Q ，

再过点 Q 画 AB 的平行线交 BC 于点 S .

- (1) 利用圆规分别比较线段 AQ 与 QC ， CS 与 BS 的大小；
- (2) 利用圆规分别比较线段 PQ 与 BC ， QS 与 AB 的大小.

你发现了什么？



(第5题)

9.3 平行线的性质



观察与思考

如图9-12, 直线 a , b 被直线 c 所截, 且 $a \parallel b$.

(1) 观察其中的任意一对同位角, 例如 $\angle 1$ 与 $\angle 5$. 剪下 $\angle 1$, 利用叠合的方法, 你发现 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ 的大小有什么关系? 另外的几对同位角的大小是否也具有这种关系?

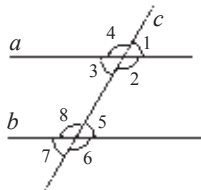
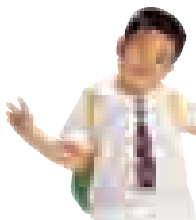


图 9-12



$\angle 1 = \angle 5$, 另外的几
对同位角也都分别相等.

于是, 我们得到平行线的一个性质:

两条平行直线被第三条直线所截, 同位角相等.

(2) 在图9-12中, 直线 a 与 b 被直线 c 所截得的各对内错角的大小分别有什么关系? 各对同旁内角的和是多少?

(3) 你能利用“两条平行直线被第三条直线所截, 同位角相等”这一事实, 说明你的结论吗? 与同学交流.

于是, 平行线还具有下面的两个性质:

因为 $\angle 1 = \angle 5$,
 $\angle 1 = \angle 3$,
所以 $\angle 3 = \angle 5$.



两条平行直线被第三条直线所截, 内错角相等.

两条平行直线被第三条直线所截, 同旁内角互补.

例1 如图9-13, 直线 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 1 = 106^\circ$. 求 $\angle 2$, $\angle 3$ 的度数.

解 因为 $a \parallel b$, $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是直线 a 与 b 被直线 c 所截得的内错角, 所以

$\angle 1 = \angle 2$. 又因为 $\angle 1 = 106^\circ$, 所以 $\angle 2 = 106^\circ$.

因为 $c \parallel d$, $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是直线 c 与 d 被直线 b 所截得的同位角, 所以 $\angle 2 = \angle 3$. 又因为 $\angle 2 = 106^\circ$, 所以 $\angle 3 = 106^\circ$.

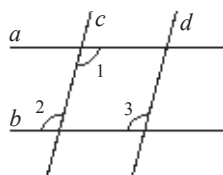


图 9-13



交流与发现

如图9-14,

(1) 画两条平行直线 l_1 和 l_2 .

(2) 在直线 l_1 上任取一点 A , 经过点 A 画 $AC \perp l_2$, 垂足是 C . 那么 AC 与直线 l_1 有什么位置关系? 为什么?

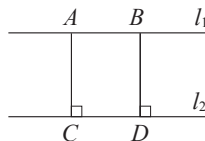


图 9-14

(3) 在直线 l_1 上再任取一点 B , 经过点 B 画 $BD \perp l_2$, 垂足是 D . AC 与 BD 有什么位置关系? 为什么?

(4) 用圆规比较垂线段 AC 与垂线段 BD 的大小, 你发现了什么? 与同学交流.

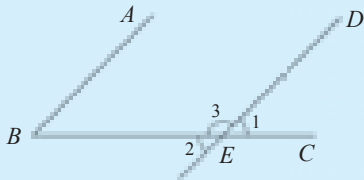
如果两条直线平行, 那么其中一条直线上每个点到另一条直线的距离都相等. 这个距离, 叫做这两条平行线之间的距离.

(5) 怎样度量两条平行线之间的距离? 与同学交流.

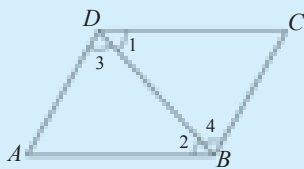


练习

- 如图, $AB \parallel DE$, $\angle B = 50^\circ$. 求 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ 的度数.
- 如图, $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, 在图中标出的 4 个角中, 哪些角是相等的? 你能从图中找出互补的角吗? 你是怎样想出来的?



(第1题)



(第2题)

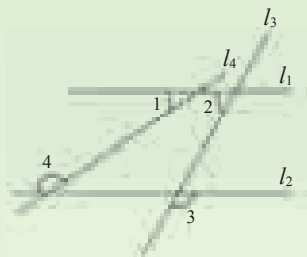


习题9.3

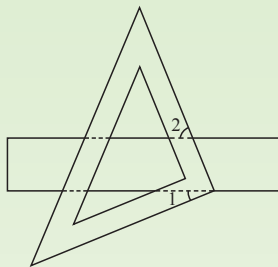


复习与巩固

1. 如图, 已知直线 $l_1 \parallel l_2$, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互余, $\angle 3 = 121^\circ$, 求 $\angle 4$ 的度数.



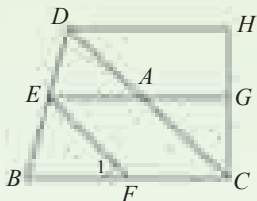
(第1题)



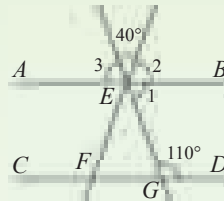
(第2题)

2. 如图, 把一个三角尺的直角顶点放在直尺的一边上. 如果 $\angle 1 = 23^\circ$, 求 $\angle 2$ 的度数.

3. 如图, $DH \parallel EG$, $EG \parallel BC$, $DC \parallel EF$, 图中与 $\angle 1$ 相等的角有哪些?



(第3题)



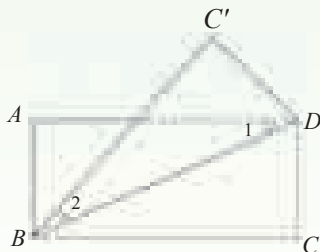
(第4题)

4. 如图, 已知直线 $AB \parallel CD$, 根据图中标出的角度, 求 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的度数.



拓展与延伸

5. 如图, 把一张长方形纸片 $ABCD$ 沿 BD 折叠后, 点 C 落在点 C' 处, $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等吗? 为什么? 请你动手折一折, 并予以验证.



(第5题)

9.4 平行线的判定



实验与探究

怎么才能判定两条直线平行呢？

回想一下用三角尺和直尺画平行线的方法.



在9.2节, 我们曾用三角尺和直尺, 按照图9-15所示的方法, 经过直线 a 外一点 P 画出 a 的平行线 b .

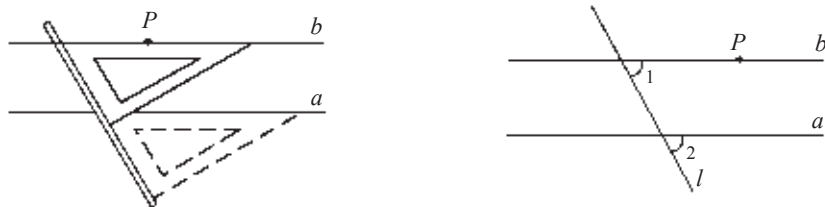


图 9-15

由画图过程可以看出, 经过直线 a 外的一点 P 画 a 的平行线, 是通过画 $\angle 1 = \angle 2$ 完成的. 而 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a, b 被直线 l 截得的同位角. 这就说明, 如果同位角 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等, 那么直线 $b \parallel a$.

于是, 我们得到了一个判定两条直线平行的方法:

两条直线被第三条直线所截, 如果同位角相等, 那么这两条直线平行.



观察与思考

(1) 在图9-16中, $\angle 1 = \angle 3$, 直线 a 与直线 b 平行吗? 如果 $\angle 1 = \angle 2$ 呢? 为什么?

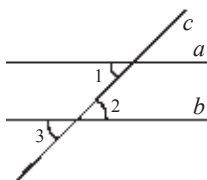


图 9-16

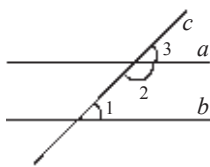


图 9-17

如果 $\angle 1 = \angle 2$, 因为 $\angle 2 = \angle 3$,
所以 $\angle 1 = \angle 3$, 因此 $a \parallel b$.



(2) 在图 9-17 中, $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补, 直线 a 与直线 b 平行吗? 为什么? 与同学交流.



如果 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, 因为 $\angle 2$
+ $\angle 3 = 180^\circ$, 所以 $\angle 1 = \angle 3$, 因此 $a \parallel b$.

于是, 我们又得到两个判定直线平行的方法:

两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 那么这两条直线平行.

两条直线被第三条直线所截, 如果同旁内角互补, 那么这两条直线平行.

例1 在图 9-18 中,

- (1) 如果 $\angle 1 = \angle EFC$, 可以判定哪两条直线平行?
- (2) 如果 $\angle A + \angle 1 = 180^\circ$, 可以判定哪两条直线平行?
- (3) 如果 $\angle 2 = \angle C$, 可以判定哪两条直线平行?

解 (1) $\angle 1$ 与 $\angle EFC$ 是直线 AD , BC 被直线 EF 截得的内错角, 如果 $\angle 1 = \angle EFC$, 那么可以判定直线 AD 与 BC 平行;

(2) $\angle A$ 与 $\angle 1$ 是直线 AB , EF 被直线 AE 截得的同旁内角, 如果 $\angle A + \angle 1 = 180^\circ$, 即 $\angle A$ 与 $\angle 1$

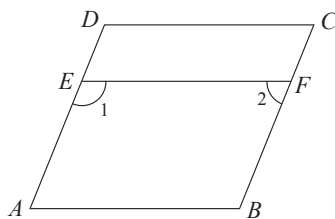


图 9-18

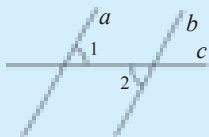
互补,那么可以判定直线 AB 与 EF 平行;

(3) $\angle 2$ 与 $\angle C$ 是直线 EF , DC 被直线 BC 截得的同位角,如果 $\angle 2 = \angle C$,那么可以判定直线 EF 与 DC 平行.

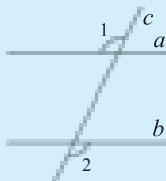


练习

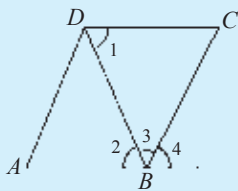
- 如图,已知 $\angle 1 = 60^\circ$,当 $\angle 2 =$ _____时, $a \parallel b$.为什么?
- 如图,已知 $\angle 1 = 116^\circ$, $\angle 2 = 116^\circ$,直线 a 与直线 b 平行吗?为什么?



(第1题)



(第2题)



(第3题)

- 如图,由下列条件可以判定哪两条直线平行?说明理由.

(1) $\angle 1 = \angle 2$; (2) $\angle 4 = \angle A$; (3) $\angle A + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

例2

如图9-19,点 P , Q 为直线 AB 上的两点,分别过点 P , Q 画直线 AB 的垂线 PC 和 QD .直线 PC 与直线 QD 平行吗?为什么?

解

$PC \parallel QD$.

理由是:在图9-19中, $\angle BPC$ 与 $\angle BQD$ 是直线 CP , DQ 被直线 AB 所截得的同位角.

因为 $CP \perp AB$, $DQ \perp AB$,所以 $\angle BPC = 90^\circ$, $\angle BQD = 90^\circ$.

于是 $\angle BPC = \angle BQD$,所以 $PC \parallel QD$.

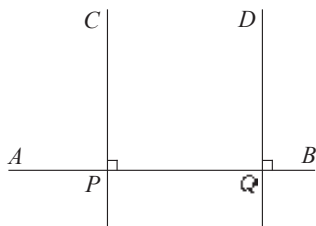


图 9-19

例3

如图9-20①,在纸上任意画出一条直线 BC ,在 BC 外任取一点 P .过点 P 将纸片进行折叠,使直线 BC 被折痕 DE 分成的两部分重合(图9-20②),记折痕 DE 所在直线与 BC 的交点为 A ,将纸片展开铺平.然后,再过点 P 将纸片进行折叠,使折痕 DE 所在直线的两部分 PE 和 PD 重合(图9-20③),再将纸片展开铺平(图9-20④).

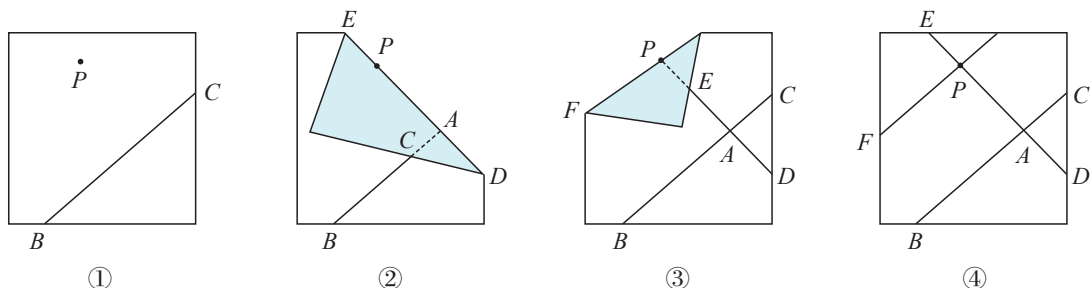


图 9-20

(1) 折痕 DE 与直线 BC 有怎样的位置关系？为什么？

(2) 折痕 PF 与直线 CB 有怎样的位置关系？为什么？

解 (1) $DE \perp BC$. 理由是：因为在第一次折叠时射线 AB 与 AC 重合，所以 $\angle PAC = \angle PAB$. 又因为 $\angle PAC + \angle PAB = 180^\circ$ ，所以 $2\angle PAB = 180^\circ$ ，即 $\angle PAB = 90^\circ$ ，所以 $DE \perp BC$.

(2) $PF \parallel CB$. 理由是：与 (1) 中所说的道理相同， $\angle EPF$ 也等于 90° . 所以 $\angle EPF = \angle PAB$. 又因为 $\angle EPF$ 与 $\angle PAB$ 是直线 PF , CB 被直线 DE 所截得的同位角，所以 $PF \parallel CB$.



挑战自我

在图 9-21 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle PAB$ ， $\angle APC$ 与 $\angle PCD$ 三个角的和是多少度？你是怎样求出来的？

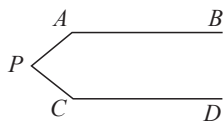


图 9-21

经过点 P 画 AB 的平行线，就能解决这个问题.



智趣园

直觉可靠吗

图 9-22 是一幅有趣的图案. 该图是由一些黑白相间小正方形组成的，先凭你的直觉判断一下，图中的这些横线是直的还是曲的？如果是直的，它们平行吗？然后借助三角尺检验你的判断可靠不可靠.

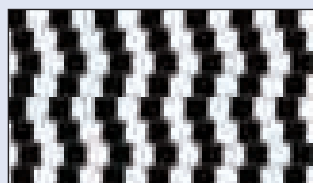
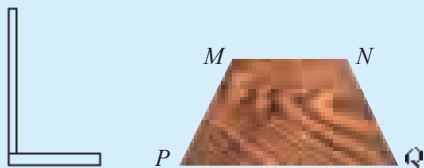


图 9-22



练习

1. 如图, $PQNM$ 是一块四边形木板, 怎样用如左图所示的角尺检验这块木板的两组对边是否分别平行? 说明你的理由.



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 丁字尺是工程技术人员常用的一种绘图工具. 用丁字尺可以画平行线, 说明这种画法的道理.

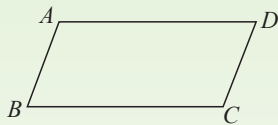


习题9.4

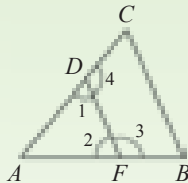


复习与巩固

1. 如图, 由 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互补可以判定 $\underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}}$, 理由是 $\underline{\hspace{2cm}}$; 由 $\angle D$ 与 $\underline{\hspace{2cm}}$, 可以判定 $DC \parallel AB$.

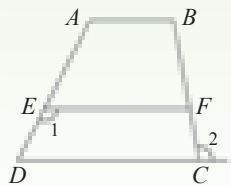


(第1题)

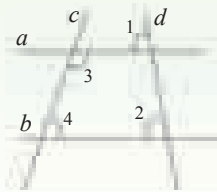


(第2题)

2. 如图, D 为线段 AC 上的一点, F 是线段 AB 上的一点. 在图中标出的角中, 满足哪个条件能够判定 $DF \parallel CB$? 还有别的答案吗? 说明理由.
3. 如图, $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle B$, 图中有哪些直线平行? 为什么?



(第3题)



(第4题)

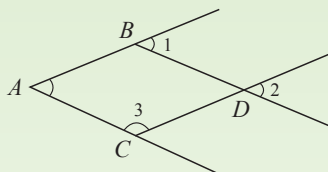
4. 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 110^\circ$, 求 $\angle 4$ 的度数.

5. 如图, 已知 $a \parallel b$, $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$, 直线 c 与 d 平行吗? 为什么?

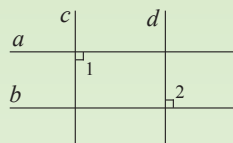


拓展与延伸

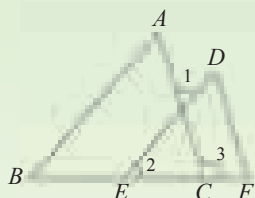
6. 如图是一个“鱼”形图案, 点 B, C 分别在 $\angle A$ 的两边上. 已知 $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 50^\circ$, $\angle 3 = 130^\circ$, 找出图中的平行线, 求出 $\angle A$ 的度数, 并说明理由.



(第6题)



(第5题)



(第7题)

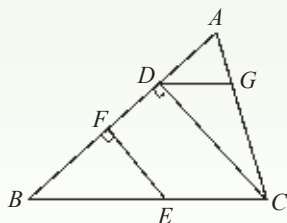
7. 如图, 分别根据下列条件, 可以判定哪两条直线平行? 说明理由.

- (1) $\angle 2 = \angle B$;
- (2) $\angle 1 = \angle D$;
- (3) $\angle 3 + \angle F = 180^\circ$, $\angle A = \angle D$.

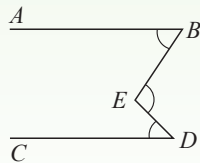


探索与创新

8. 如图, 点 E, F, G 分别在线段 BC, AB, AC 上, 且 $CD \perp AB$, $EF \perp AB$, $\angle CDG = \angle BEF$. 试判断 DG 与 BC 的位置关系, 并说明理由.



(第8题)



(第9题)

9. 如图, 已知 $\angle BED = \angle B + \angle D$, 试判断 AB 与 CD 的位置关系, 并说明理由.



回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容? 总结一下, 并与同学交流.
2. 平面内的两条直线有几种位置关系?
3. 两条直线被第三条直线所截, 在形成的八个角中, 有几对同位角? 有几对内错角? 有几对同旁内角?

4. 平行线有哪些性质?
5. 判定两条直线是否平行,除了用定义外,还有哪些判定方法?当两条直线被第三条直线所截时,平行线的判定方法与平行线的性质有什么区别和联系?
6. 从平行线的性质和判定可以看出,由直线与直线的位置关系,可以确定与它们有关的角的数量关系;反过来,由角与角之间的数量关系,可以确定直线和直线的位置关系.这说明组成几何图形的不同元素之间的相互依存、相互联系、相互制约的关系.你体会到了吗?

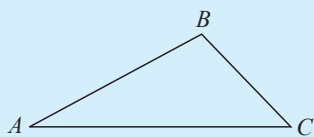


综合练习

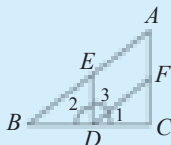


复习与巩固

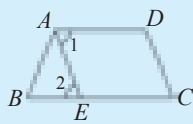
1. 如图,先用刻度尺将线段 AB 四等分,分点分别为 D, E, F ,再经过各分点分别画 AC 的平行线交线段 BC 于 D', E', F' ,比较 BC 被分成的四条线段长度的大小.
2. 如图, $DE \parallel CA$, $DF \parallel BA$, $\angle B = 38^\circ$, $\angle CFD = 53^\circ$,求 $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 的度数.
3. 如图,已知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle C$,找出图中的平行线,并说明理由.



(第1题)

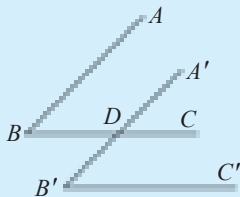


(第2题)

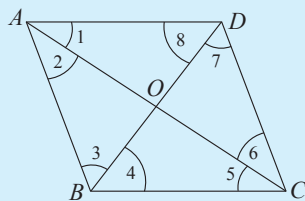


(第3题)

4. 如图,已知 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, BC 交 $A'B'$ 于点 D , $\angle B = 50^\circ$,求 $\angle B'$ 的度数.



(第4题)



(第5题)

5. 如图,
 - (1) 已知 $AD \parallel BC$,可以得出哪些角相等?为什么?
 - (2) 已知 $AB \parallel DC$,可以得出哪些角互补?为什么?
 - (3) 已知 $\angle 3 = \angle 7$,可以判定哪两条直线平行?为什么?
 - (4) 已知 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$,可以判定哪两条直线平行?为什么?

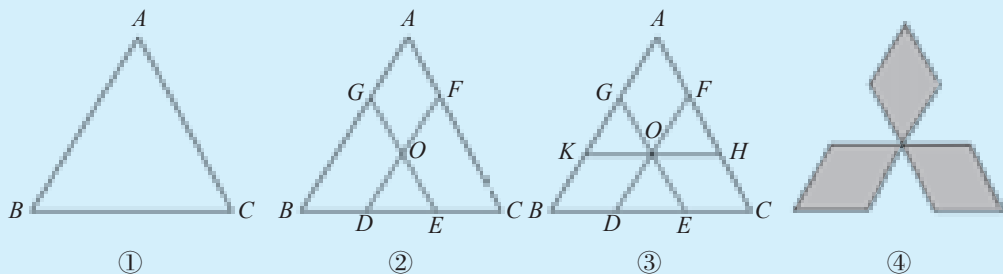
- (5) 由哪两条直线平行, 可以得出 $\angle 4 = \angle 8$? 为什么?
- (6) 由哪两条直线平行, 可以得出 $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$? 为什么?
6. 利用有一个角是 30° 的三角尺和直尺, 根据三角尺中的三个不同角度, 用三种方法过直线 l 外的一点 P , 画直线 l 的平行线.



拓展与延伸

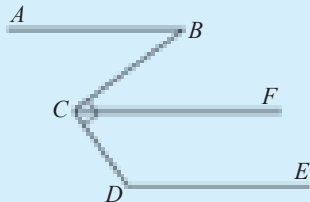
7. 按下列步骤画出图案:

- (1) 用刻度尺画线段 $BC = 2.7$ 厘米, 以 BC 为一边, 用三角尺画 $\angle B = 60^\circ$, 画 $\angle C = 60^\circ$, 这两个角的另两边相交于点 A (图①);
- (2) 用刻度尺将 BC 三等分, 分点分别为 D, E , 经过点 D 画 BA 的平行线 DF , 交 AC 于点 F ; 经过点 E 画 CA 的平行线 EG , 交 AB 于点 G ; DF 与 EG 交于点 O (图②);
- (3) 经过点 O 画 BC 的平行线 KH , 交 AB 于点 K , 交 AC 于点 H (图③);
- (4) 在图③的相应区域中涂上阴影, 擦去其余部分, 便得到图案④.



(第7题)

8. 如图, 已知 $AB \parallel CF$, $CF \parallel DE$, $\angle BCD = 90^\circ$, 求 $\angle D - \angle B$ 的度数.

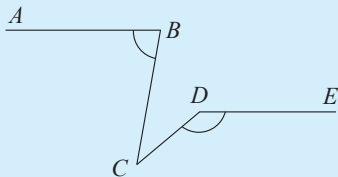


(第8题)

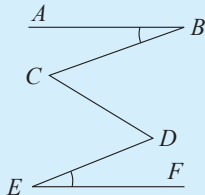


探索与创新

9. 如图, 直线 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle CDE = 140^\circ$, 求 $\angle BCD$ 的度数.



(第9题)



(第10题)

10. 如图, 已知 $AB \parallel EF$, $\angle ABC = \angle DEF$. 试判定 BC 和 DE 的位置关系, 并说明理由.

第10章 一次方程组

内容提要

- 认识二元一次方程组
- 二元一次方程组的解法
- * 三元一次方程组
- 列方程组解应用题



情境导航

雄伟的长城是中华民族的象征。

据有关资料，长城西起嘉峪关，东至辽东虎山，全长约 7 300 千米，其中西段从嘉峪关到山海关，东段从山海关到辽东虎山，西段比东段长约 6 100 千米。

长城的东、西段各长约多少千米？



10.1 认识二元一次方程组



交流与发现

在本章“情境导航”给出的问题中，

(1) 哪些量是已知量？哪些量是未知量？

(2) 有哪些等量关系？

(3) 你能列一元一次方程来解这个问题吗？

(4) 在这个问题中有两个未知量. 如果分别设长城东段的长为 x 千米，西段的长为 y 千米，那么长城的全长可以用含有未知数 x, y 的代数式表示为 _____；西段比东段长 _____.

根据等量关系：东段的长 + 西段的长 = 7 300 千米，可以列出方程

$$x + y = 7\,300; \quad \text{①}$$

根据等量关系：西段的长 - 东段的长 = 6 100 千米，可以列出方程

$$y - x = 6\,100. \quad \text{②}$$

上面列出的两个方程还是一元一次方程吗？它们与一元一次方程有哪些相同点和不同点？与同学交流.

像这样，两边都是整式，含有两个未知数，并且含未知数的项都是一次的方程，叫做**二元一次方程**（linear equation with two unknowns）.

例如， $x + y = 3$ ， $x = 3y + 1$ ， $3x - 5y = -1$ 等都是二元一次方程. 你还能举出一些二元一次方程的例子吗？

当 $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ 时，方程 $x + y = 3$ 的左、右边的值相等. 这就是说，未知数的这一对值适合这个方程. 像这样，适合二元一次方程的一对未知数的值，叫做这

个二元一次方程的解. $\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \begin{cases} x=5, \\ y=-2; \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{2}{3}, \\ y=\frac{11}{3} \end{cases}$ 也都是这个方程的解. 你还能

找出这个方程其他的解来吗？想一想，它有多少个解？二元一次方程 $x = 3y + 1$ 呢？

对于方程①，像

$$\begin{cases} x = 300, \\ y = 7\,000; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 500, \\ y = 6\,800; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 600, \\ y = 6\,700 \end{cases}$$

等都是它的解. 对于方程②，像

$$\begin{cases} x = 300, \\ y = 6\,400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 500, \\ y = 6\,600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 600, \\ y = 6\,700 \end{cases}$$

等都是它的解. 其中，只有

$$\begin{cases} x = 600, \\ y = 6\,700 \end{cases}$$

既是方程①的解也是方程②的解，即它是这两个方程的公共解.

在解决某些问题时，有时需要将几个方程联立在一起，求出它们的公共解，才能使问题得到解决. 例如，在本章“情境导航”给出的问题中，未知数 x, y 必须同时满足方程①和②，把它们联立在一起，写成

$$\begin{cases} x + y = 7\,300, & \text{①} \\ y - x = 6\,100 & \text{②} \end{cases}$$

的形式，于是问题就转化成求这一组方程的公共解的问题了.

一般地，由几个一次方程组成的一组方程，叫做**一次方程组**. 含有两个未知数的一次方程组叫做**二元一次方程组** (system of linear equations with two unknowns).

二元一次方程组中两个方程的公共解叫做这个二元一次方程组的**解**. 求方程组解的过程，叫做**解方程组**.

例如， $\begin{cases} x = 600, \\ y = 6\,700 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} x + y = 7\,300, \\ y - x = 6\,100 \end{cases}$ 的解.

你能判断 $\begin{cases} x = 0, \\ y = -1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 0 \end{cases}$ 是不是二元一次方程组 $\begin{cases} x + y = -1, \\ 3x - 4y = -3 \end{cases}$ 的解吗？试一试.

一般地，二元一次方程有无数个解.





挑战自我

方程组 $\begin{cases} x+y=7\,300, \\ x=600 \end{cases}$ 是二元一次方程组吗？为什么？



练习

1. 举出两个二元一次方程组的例子.
2. 在二元一次方程 $3x+2y=7$ 中, 当 $x=$ _____ 时, $y=\frac{1}{2}$; 当 $x=-1$ 时, $y=$ _____.
3. 已知 x 与 y 的三对值:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=15, \\ y=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ y=\frac{1}{10}. \end{cases}$$

(1) 其中, 哪几对值是方程 $x-3y=3$ 的解? 哪几对值是方程 $3x-10y=5$ 的解?

(2) 哪对值是方程组 $\begin{cases} x-3y=3, \\ 3x-10y=5 \end{cases}$ 的解?



习题10.1



复习与巩固

1. 已知二元一次方程 $x-5y=30$.
 - (1) 用关于 x 的代数式表示 y ;
 - (2) 用关于 y 的代数式表示 x .
2. 已知二元一次方程 $2x+2y-5=0$, 当 y 分别取 $2, -1, 0, \frac{1}{3}$ 时, 求对应的 x 的值.
3. (1) 根据下列关系, 分别求方框内 y 的值:
 - ① $y=4x+2$;
 - ② $2x-3y=4$.

x	→	y
1	→	
2	→	
0	→	
-1	→	

x	→	y
1	→	
2	→	
0	→	
-1	→	

(第3题)

(2) 从上面的框图中, 找出方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ y = 4x + 2 \end{cases}$ 的解.



拓展与延伸

4. 已知二元一次方程 $5x + (k-1)y - 7 = 0$ 的一个解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -3, \end{cases}$ 求 k 的值.

5. 已知适合二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = 4, \\ mx - 4y = 5 \end{cases}$ 的 y 值是 $\frac{1}{2}$, 求方程组的解及 m 的值.



探索与创新

6. 写出一个二元一次方程组, 使 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1 \end{cases}$ 是所写方程组的解.

10.2 二元一次方程组的解法



观察与思考

(1) 怎样求由本章“情境导航”得到的二元一次方程组

$$\begin{cases} x + y = 7\,300, & \text{①} \\ y - x = 6\,100 & \text{②} \end{cases}$$

的解呢?

能把它转化成一元一次方程就好办了!

(2) 由方程②, 用关于 x 的代数式表示另一个未知数 y , 得

$$y = 6\,100 + x. \quad \text{③}$$

如果用方程③中的代数式 $6\,100 + x$ 代替方程①中的 y , 那么就可以得到一个关于 x 的一元一次方程

$$x + (6\,100 + x) = 7\,300.$$

解这个一元一次方程, 得 $x = 600.$

再将 $x = 600$ 代入方程③, 得 $y = 6\,700.$

(3) 检验一下, $\begin{cases} x = 600, \\ y = 6\,700 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} x + y = 7\,300, \\ y - x = 6\,100 \end{cases}$ 的解吗?



(4) 在解得 $x = 600$ 后, 为了求出 y , 能将它代入方程①或方程②吗? 对于方程①, ②, ③而言, 代入哪一个方程求解更简便一些?

(5) 你能概括一下上面解法的主要思路吗?

将方程组中的一个方程的某一个未知数, 用关于另一个未知数的代数式表示出来, 然后将它代入到另一个方程中, 从而转化为解一元一次方程. 方程组的这种解法叫做代入消元法, 简称代入法 (substitution method).

例1 解方程组

$$\begin{cases} 3x = 1 - 2y, & \text{①} \\ 5x - 4y = 31. & \text{②} \end{cases}$$

解 由①, 得

$$x = \frac{1-2y}{3}. \quad \text{③}$$

将③代入②, 得

$$5 \cdot \frac{1-2y}{3} - 4y = 31.$$

解这个一元一次方程, 得 $y = -4$.

将 $y = -4$ 代入③, 得 $x = 3$.

所以
$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -4. \end{cases}$$

想一想, 对于例1中的方程组, 还有另外的代入消元的方法吗? 哪种解法更简便些? 说说你的体会.



练习

1. 用代入法解下列二元一次方程组, 并加以检验:

$$(1) \begin{cases} 18x = y + 9, \\ y = 17x; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = -2y, \\ x + y = 15. \end{cases}$$

2. 用代入法解下列二元一次方程组:

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 9, \\ 3x - y = -1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3m + 2n = 16, \\ 2m + 3n = -1. \end{cases}$$



交流与发现

除了代入法外, 二元一次方程组

$$\begin{cases} x + y = 7\,300, & \text{①} \\ y - x = 6\,100 & \text{②} \end{cases}$$

还有其他解法吗?

(1) 观察方程①和②中含未知数 x 的项的系数, 你发现有什么特点? 这个特点对解方程组有什么启发?

将方程①与②的两边分别相加, 得

$$(x + y) + (y - x) = 7\,300 + 6\,100,$$

即

$$2y = 13\,400,$$

解这个一元一次方程, 得 $y = 6\,700$.

将 $y = 6\,700$ 代入方程①, 得

$$x + 6\,700 = 7\,300,$$

解得

$$x = 600.$$

所以

$$\begin{cases} x = 600, \\ y = 6\,700. \end{cases}$$

方程①②中 x 的系数互为相反数, 如果利用等式的基本性质, 把这两个方程相加, 就能消去 x , 转化成解关于 y 的一元一次方程.



(2) 在上面的方程组中, 含未知数 y 的项的系数有什么特点? 由此你能想出消去方程组中的 y 转化成一元一次方程的方法吗?

将方程①与②的两边分别相减, 得

$$(x + y) - (y - x) = 7\,300 - 6\,100,$$

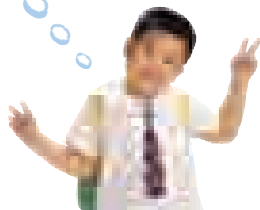
即

$$2x = 1\,200.$$

解这个一元一次方程, 得 $x = 600$.

将 $x = 600$ 代入方程①, 得 $600 + y = 7\,300$.

方程①②中 y 的系数相等, 如果利用等式的基本性质, 把两个方程相减, 就能消去 y , 转化成解关于 x 的一元一次方程.



解得 $y = 6\,700$.

所以
$$\begin{cases} x = 600, \\ y = 6\,700. \end{cases}$$

(3) 想一想, 上面方程组的解法与代入法有什么相同点和不同点? 与同学交流.

通过把两个方程相加或相减消去一个未知数, 从而转化为解一元一次方程. 方程组的这种解法叫做**加减消元法**, 简称**加减法** (addition-subtraction method).

例2 解方程组

$$\begin{cases} 5u + 2v = -9, & \text{①} \\ 3u - 4v = -8. & \text{②} \end{cases}$$

解 ① $\times 2$, 得

$$10u + 4v = -18. \quad \text{③}$$

$$\text{②} + \text{③}, \text{ 得 } 13u = -26.$$

解这个一元一次方程, 得 $u = -2$.

把 $u = -2$ 代入方程 ①, 得 $-10 + 2v = -9$,

$$\text{解得 } v = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } \begin{cases} u = -2, \\ v = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

你还有其他解法吗? 试一试.

把方程①的两边同乘2, 两个方程中含有 v 的项的系数就互为相反数了.



挑战自我



如果关于 m, n 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3m - an = 16, \\ 2m - bn = 15 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} m = 7, \\ n = 1, \end{cases}$ 那么关

于 x, y 的二元一次方程组

$$\begin{cases} 3(x+y) - a(x-y) = 16, \\ 2(x+y) - b(x-y) = 15 \end{cases}$$

的解是什么?



练习

1. 用加减法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 5x - 3y = 1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + 2y = 9, \\ 3x + y = -1; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5, \\ 3x - 2y = -6. \end{cases}$$



习题10.2



复习与巩固

1. 用代入法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} m = 2n + 3, \\ 4m + 5n = -1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + y = -7, \\ 2x - 3y = 5; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x + 4y = 18, \\ \frac{1}{2}x + y = 4; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x - 9y = 8. \end{cases}$$

2. 用加减法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x - y = -4, \\ 3x + y = 19; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3u + 2v = 9, \\ 3u - 5v = 2; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 9m + 2n = 15, \\ 3m + 4n = 10; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 4x + 3y = -4, \\ 3x - 4y = -3. \end{cases}$$

3. 解下列方程组:

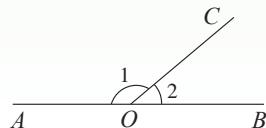
$$(1) \begin{cases} y - 1 = 3(x - 2), \\ y + 4 = 2(x + 1); \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{4}{3}, \\ 5(x - 9) = 6(y - 2). \end{cases}$$

4. 当 $x = 2$ 时, 代数式 $x^2 + ax + b$ 的值是 3; 当 $x = -3$ 时, 这个代数式的值是 -2. 求 a 与 b 的值.

5. 如果甲、乙两数之和为 a , 差为 b , 那么这两个数的积是什么?

6. 如图, 点 O 在直线 AB 上, OC 为射线, $\angle 1$ 比 $\angle 2$ 的 3 倍还多 20° , 利用二元一次方程组, 求 $\angle 1$, $\angle 2$ 的度数.



(第 6 题)



拓展与延伸

7. 已知 $\begin{cases} ax + by = 7, \\ bx - ay = 5 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \end{cases}$ 求 $a + b$ 的值.

8. 如图, 有一台“数值转换器”, 输入一对数 (x, y) 后, 输出一个新数 $3(x + 2y) - 2$. 如果输入 $(2a, 3b)$ 后, 输出的新数是 28; 输入 $(a, 2b)$ 后, 输出的新数是 16, 求 a 与 b 的值.



(第8题)



探索与创新

9. 解方程组 $\begin{cases} ax + by = -2, \\ cx - 7y = 8 \end{cases}$ 时, 甲正确解得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = -2, \end{cases}$ 乙因把 c 写错解得 $\begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$ 求 a, b, c 的值.

*10.3 三元一次方程组^①



交流与发现

小亮与爸爸、爷爷三人年龄之和为 120 岁, 爷爷的年龄比小亮与爸爸年龄之和多 12 岁, 爸爸与小亮年龄之差正好等于爷爷与爸爸年龄之差. 他们三人的年龄分别是多少?

这个问题中有三个未知量: 小亮、爸爸、爷爷的年龄. 设他们分别是 x 岁, y 岁, z 岁. 根据题意, 可列出以下三个方程:

$$x + y + z = 120,$$

$$z = x + y + 12,$$

$$y - x = z - y.$$

^① 本教科书中, 标有星号的内容是选学内容, 不作考试要求.

这个问题的解必须同时满足上面的三个方程. 将这三个方程联立, 得到方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 120, & \text{①} \\ z = x + y + 12, & \text{②} \\ y - x = z - y. & \text{③} \end{cases}$$

像这样, 含有三个未知数的一次方程组, 叫做三元一次方程组 (system of linear equations of three unknowns).

怎样解这个三元一次方程组呢? 你能从二元一次方程组的解法中得到哪些启示? 与同学交流.

解三元一次方程组的基本思路也是消元. 通过消元, 转化成解二元一次方程组或一元一次方程. 消元的方法有代入法和加减法.



把方程②, 分别代入①和③, 消去未知数 z , 化简得二元一次方程组

$$\begin{cases} x + y = 54, & \text{④} \\ -2x + y = 12. & \text{⑤} \end{cases}$$

解由④⑤组成的二元一次方程组, 得

$$\begin{cases} x = 14, \\ y = 40. \end{cases}$$

代入方程②, 得 $z = 66$.

这样, 就得到原三元一次方程组的解 $\begin{cases} x = 14, \\ y = 40, \\ z = 66. \end{cases}$

经检验, 方程组的解符合题意.

所以, 小亮14岁, 爸爸40岁, 爷爷66岁.

例1 解方程组

$$\begin{cases} y + 2z = 5, & \text{①} \\ 3x - 2y + 3z = 1, & \text{②} \\ 2x + 3y - 2z = -3. & \text{③} \end{cases}$$

解 由①, 得 $y = 5 - 2z$, ④

将④代入②, 得

$$3x - 2(5 - 2z) + 3z = 1.$$

化简, 得

$$3x + 7z = 11. \quad ⑤$$

将④代入③, 得

$$2x + 3(5 - 2z) - 2z = -3.$$

化简, 得

$$x - 4z = -9. \quad ⑥$$

将⑤⑥联立, 得二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x + 7z = 11, \\ x - 4z = -9. \end{cases}$$

解这个二元一次方程组, 得 $\begin{cases} x = -1, \\ z = 2. \end{cases}$

将 $z = 2$ 代入方程④, 得 $y = 1$.

所以 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$



练习

1. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} y = 5 - x - 3z, \\ x + y + z = 1, \\ -x + 2y + z = 2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y - z = 3, \\ x + y + z = 1, \\ -x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

例2 解方程组

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2, & ① \\ 3x + 4y - 2z = 5, & ② \\ 4x + 5y - 4z = 2. & ③ \end{cases}$$

解 ① + ②, 得

$$5x + y = 7, \quad ④$$

① $\times 2 +$ ③, 得

$$8x - y = 6. \quad \text{⑤}$$

将 ④ ⑤ 联立, 得二元一次方程组

$$\begin{cases} 5x + y = 7, \\ 8x - y = 6. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

把 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}$ 代入 ①, 得 $2 - 6 + 2z = 2.$

解得 $z = 3.$

所以 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$

方程①和方程②中, z 的系数分别是 2 和 -2, 方程③中 z 的系数为 -4, 能利用加减法消去方程②③中的 z 吗?



例3 解方程组

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{2}, & \text{①} \\ y + z = 3, & \text{②} \\ x + z = \frac{3}{2}. & \text{③} \end{cases}$$

根据方程组系数的特点, 可以灵活地进行消元.

解 ① + ② + ③, 得

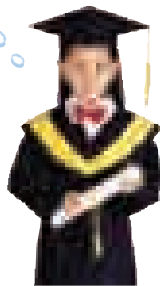
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 7, \\ x + y + z &= \frac{7}{2}. \end{aligned} \quad \text{④}$$

由 ④ - ①, ④ - ②, ④ - ③, 得

$$z = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 2.$$

所以 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$

想一想, 你还有其他解法吗?





练习

1. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3, \\ -2x + 4y + 3z = -3, \\ 5x + 2y - 3z = -12; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 10, \\ -3x + 2y + 2z = -1, \\ -2x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$



习题10.3



复习与巩固

1. 用代入法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 5, \\ y - 3z = -7, \\ 4z + x = 13; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + y + z = -1, \\ 3y - z = -1, \\ 3x + 2y + 3z = -5. \end{cases}$$

2. 用加减法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 3x + 4y - 3z = -7, \\ -2x + 3y + 3z = 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - 5y + 6z = 4, \\ 3x - 2y + 2z = 3, \\ -3x - 3y + 5z = -1. \end{cases}$$

3. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2y - 3z = 1, \\ 2x - y + 3z = -1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - y = -1, \\ y - z = 1, \\ x + z = 2. \end{cases}$$



拓展与延伸

4. 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$, 且 $x + y - z = \frac{1}{12}$, 求 x, y, z .

5. 已知 $\begin{cases} x = 5, \\ y = 2, \\ z = -3 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} 2ax + 3by + cz = 1, \\ 3ax + 5by - 2cz = 11, \\ -2ax - 6by + 3cz = -7 \end{cases}$ 的解, 求 a, b, c 的值.



探索与创新

6. 已知 $\frac{1}{3}(x - y + 2z) = \frac{1}{7}(y - z + 2x) = \frac{1}{2}(z - x + 2y) = 2$, 求 $x + y + z$ 的值.

10.4 列方程组解应用题



交流与发现

长江上一艘游船从沙市港出发, 船速为 17 千米/时, 经过若干小时到达宜昌港. 如果船速增加 1 千米/时, 那么用同样多的时间, 游船可到达宜昌上游 9 千米处的葛洲坝 (图 10-1). 提速前游船由沙市港航行到宜昌港所用的时间是多少? 沙市港到宜昌港的航程是多少?



图 10-1

在这个问题中,

(1) 已知量是什么? 未知量是什么?

(2) 等量关系是什么?

(3) 如果设游船航行所用的时间为 x 时, 沙市港到宜昌港的航程为 y 千米, 你能根据问题中的两个等量关系列出方程组吗?

(4) 你会解所列的方程组吗?

例1

小亮和小莹练习赛跑. 如果小亮让小莹先跑 10 米, 那么小亮跑 5 秒就追上小莹; 如果小亮让小莹先跑 2 秒, 那么小亮跑 4 秒就追上小莹. 两人每秒各跑多少米?

等量关系是：

(1) 小亮跑5秒的路程 = 小莹跑5秒的路程 + 10米；

(2) 小亮跑4秒的路程 = 小莹跑(4 + 2)秒的路程.

解 设小亮每秒跑 x 米，小莹每秒跑 y 米.

根据题意，得

$$\begin{cases} 5x = 5y + 10, \\ 4x = (4 + 2)y. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 6, \\ y = 4. \end{cases}$$

经检验，方程组的解符合题意.

所以小亮每秒跑6米，小莹每秒跑4米.

例2 (中国古代数学问题) 有若干只鸡和兔放在同一个笼子里. 从上面看，有35个头；从下面看，有94只脚. 问笼子里有几只鸡？几只兔？^❶

解 设笼子里有 x 只鸡、 y 只兔. 已知共有35个头、94只脚.

根据题意，得

$$\begin{cases} x + y = 35. & \text{①} \\ 2x + 4y = 94. & \text{②} \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 23, \\ y = 12. \end{cases}$$

经检验，方程组的解符合题意.

所以，笼子里有23只鸡、12只兔.

对于这个问题，你能用四则运算的方法和列一元一次方程的方法求解吗？比较这两种方法与列二元一次方程组的方法，你认为它们各有什么特点？与同学交流.

^❶ 本题出自《孙子算经》. 原题是：“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足. 问雉兔各几何.”



挑战自我

甲、乙二人正在谈论他们的年龄.

甲: 在我是你今年的岁数时, 你那年 10 岁.

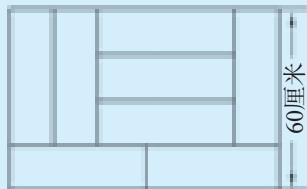
乙: 在我是你今年的岁数时, 你那年 25 岁.

想一想, 甲、乙二人谁的年龄大? 今年甲、乙二人各多少岁?



练习

1. 为绿化校园, 时代中学买了杨树苗和柳树苗共 100 棵. 杨树苗每棵 3 元, 柳树苗每棵 7 元, 买树苗共用 460 元. 两种树苗各买了多少棵?
2. 如图, 用 8 块相同的长方形瓷砖拼成一个宽为 60 厘米的长方形灶台面. 求每块瓷砖的长和宽 (瓷砖间的缝隙忽略不计).



(第 2 题)

例3

2010 年 4 月份中国民航国内和国际航线运送旅客总人数共 2 160 万人, 其中, 国内和国际航线运送旅客人数比 2009 年 4 月份分别增长 13.2% 和 28.8%, 2009 年 4 月份国内航线和国际航线运送旅客总人数为 1 894 万人. 那么 2009 年 4 月份国内和国际航线运送旅客分别有多少万人 (结果精确到万人)?

(参考网站: <http://www.stats.gov.cn>)

设 2009 年 4 月份中国民航国内航线运送旅客 x 万人, 国际航线运送旅客 y 万人, 得到下表:

	2009年4月份	2010年4月份
国内航线运送人数/万人	x	$(1 + 13.2\%)x$
国际航线运送人数/万人	y	$(1 + 28.8\%)y$
合计/万人	1 894	2 160

解

设2009年4月份中国民航国内航线运送旅客 x 万人,国际航线运送旅客 y 万人.

根据题意,得

$$\begin{cases} x+y=1\ 894, \\ (1+13.2\%)x+(1+28.8\%)y=2\ 160. \end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases} x \approx 1\ 791, \\ y \approx 103. \end{cases}$$

经检验,方程组的解符合题意.

所以2009年4月份中国民航国内航线运送旅客1 791万人,国际航线运送旅客103万人.

**加油站**

在解决一类实际问题时,可以通过列出方程组表示问题中的全部数量关系,所以方程组也是刻画现实世界数量关系的有效模型.

例4

果园要将一批水果运往某地,打算租用某汽车运输公司的甲、乙两种货车.过去两次租用这两种货车的信息如下表所示:

	第一次	第二次
甲种货车车辆数/辆	2	5
乙种货车车辆数/辆	3	6
累计运货量/吨	15.5	35

现打算租用该公司3辆甲种货车和5辆乙种货车,可一次刚好运完这批水果.如果每吨运费为30元,果园应付运费多少元?

等量关系是:

(1) 2辆甲种货车运量+3辆乙种货车运量=15.5吨;

(2) 5辆甲种货车运量+6辆乙种货车运量=35吨.

解

设甲、乙两种货车每辆每次分别可运水果 x 吨、 y 吨.

根据题意,得

$$\begin{cases} 2x+3y=15.5, \\ 5x+6y=35. \end{cases}$$

解这个方程组,得
$$\begin{cases} x=4, \\ y=2.5. \end{cases}$$

经检验, 方程组的解符合题意.

这次运水果所需运费为 $30 \times (4 \times 3 + 2.5 \times 5) = 735$ (元).

所以, 果园应付运费 735 元.



智趣园

两鼠穿墙

《九章算术》提出了一个有趣的问题: “今有垣厚五尺, 两鼠对穿, 大鼠日一尺, 小鼠也日一尺. 大鼠日自倍, 小鼠日自半, 问何日相逢, 各穿几何?”

意思是说: 今有一道墙, 厚 5 尺, 两只老鼠从墙的两边分别打洞穿墙. 大鼠第一天进一尺, 以后每天的进度是前一天的 2 倍; 小鼠第一天也进 1 尺, 以后每天的进度是前一天的一半. 问几天后两鼠相遇; 此时, 两鼠各穿墙几尺?



该题当初是用“盈不足术”求解的. 学过一次方程组后, 我们也可以用二元一次方程组求解. 由题意可知, 穿墙第一天, 大鼠、小鼠各穿墙 1 尺, 共 2 尺; 穿墙第二天, 大鼠穿墙 2 尺, 小鼠穿墙 $\frac{1}{2}$ 尺. 两天大鼠和小鼠共穿墙 $\frac{9}{2}$ 尺, 离穿透墙尚差 $\frac{1}{2}$ 尺. 到第三天时, 不用 1 天二鼠即可相遇.

在穿墙的第三天, 设大鼠前进了 x 尺, 小鼠前进了 y 尺, 大鼠该天穿墙速度为 4 尺/天, 小鼠为 $\frac{1}{4}$ 尺/天. 等量关系是: ① 大鼠、小鼠一共穿墙 $\frac{1}{2}$ 尺; ② 该天在相遇前大、小鼠用的时间相等. 你能根据以上分析列出二元一次方程组来求解吗?



练习

1. 时代中学师生 100 人到甲、乙两公司参加社会实践活动, 到甲公司的人数比到乙公司的人数的 2 倍少 8 人, 到两公司参加社会实践的人数各多少?
2. 山青林场有一块面积为 58 公顷的土地, 现计划将其中的 $\frac{1}{4}$ 开辟为果园, 其余的土地种粮食和蔬菜, 并且种蔬菜的土地面积是种粮食的土地面积的 $\frac{1}{4}$. 该林场计划种蔬菜和粮食各多少公顷?

*** 例 5** 一个三位数,三位数字之和为12,个位数字是百位数字与十位数字之和的2倍,百位数字是十位数字的3倍,求这个三位数.

解 设这个三位数的个位数字为 x ,十位数字为 y ,百位数字为 z .

根据题意,得

$$\begin{cases} x + y + z = 12, \\ x = 2(y + z), \\ z = 3y. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 8, \\ y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

经检验,方程组的解符合题意.

所以这个三位数是318.

*** 例 6** (中国古代数学问题)^①今有上等黍3捆,中等黍2捆,下等黍1捆,共打出黍米39斗;又有上等黍2捆,中等黍3捆,下等黍1捆,共打出黍米34斗;再有上等黍1捆,中等黍2捆,下等黍3捆,共打出黍米26斗.问每捆上、中、下黍各能打出黍米多少斗?

解 设每捆上、中、下黍分别能打出黍米 x 斗、 y 斗、 z 斗.

根据题意,得

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39, \\ 2x + 3y + z = 34, \\ x + 2y + 3z = 26. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = \frac{37}{4}, \\ y = \frac{17}{4}, \\ z = \frac{11}{4}. \end{cases}$$

经检验,方程组的解符合题意.

所以,每捆上、中、下黍分别能打出黍米 $\frac{37}{4}$ 斗、 $\frac{17}{4}$ 斗、 $\frac{11}{4}$ 斗.

^① 本题出自《九章算术》“方程”章. 原题是:“今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗.问上、中、下禾实一秉各几何.”



挑战自我

小亮、小莹和大刚每人面前各放有一堆栗子. 小亮将自己面前的栗子分出一些给另外二人后, 这二人的栗子数各增加 1 倍. 接着小莹又将自己面前的栗子分一些给小亮和大刚, 小亮和大刚的栗子数都增加了 1 倍. 然后, 大刚又分给另外二人一些栗子, 使小亮和小莹面前的栗子数也都增加 1 倍. 这时, 他们三人面前的栗子竟然都是 24 颗.

你知道他们三人面前原来各有多少颗栗子吗?



史海漫游

古老的百鸡问题

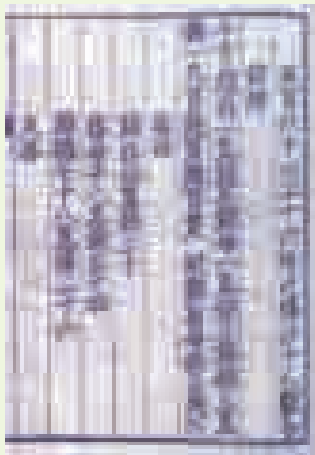
公元 5 世纪左右, 北魏时期的数学家张丘建在他所著的《张丘建算经》中提出了一个著名的“百鸡问题”(图 10-2):

“今有鸡翁一, 直钱五; 鸡母一, 直钱三; 鸡雏三, 直钱一. 凡百钱买鸡百只, 问鸡翁、母、雏各几何?”

题目大意是: 一只公鸡价值 5 钱(我国古代的一种货币单位), 一只母鸡价值 3 钱, 三只雏鸡价值 1 钱. 用 100 钱买了 100 只鸡, 问买公鸡、母鸡和雏鸡各多少只.

这一问题可利用列方程组的方法解决. 设 x, y, z 分别表示所买公鸡、母鸡、雏鸡的只数, 根据题意, 得

$$\begin{cases} x + y + z = 100, & \text{①} \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100. & \text{②} \end{cases}$$



《张丘建算经》(宋刻本)
关于百鸡问题的记载
(选自《中国大百科全书·数学》)
图 10-2

这个方程组中有两个方程，却有三个未知数. 这类方程组在数学上称为不定方程组. 本题是求一个三元一次不定方程组的正整数解问题. 这一问题的提出标志着我国在公元5世纪时已对不定方程组有了系统深入的研究，并为后人学习不定方程组的求解提供了一个入门的范例.

利用我们学过的知识，可以采用下面的方法解这个不定方程组：

由 $② \times 3 - ①$ ，化简得

$$7x + 4y = 100,$$

$$y = 25 - \frac{7}{4}x.$$

因为 y 是正整数，所以 x 应是4的整数倍，且 $(25 - \frac{7}{4}x)$ 也是正整数，所以 x 只能取4, 8, 12. 由此得

$$\begin{cases} x=4, \\ y=18, \\ z=78; \end{cases} \quad \begin{cases} x=8, \\ y=11, \\ z=81; \end{cases} \quad \begin{cases} x=12, \\ y=4, \\ z=84. \end{cases}$$

所以，公鸡、母鸡、雏鸡各买了4只、18只、78只；或8只、11只、81只；或12只、4只、84只.



练习

*1. 甲、乙、丙三个数的和是25，甲数的 $\frac{1}{3}$ 等于乙数的 $\frac{1}{2}$ ，甲数比乙数与丙数的和少1.

求这三个数.

*2. 某市举行中学生足球联赛，比赛的计分规则为：
胜一场得3分，平一场得1分，负一场得0分. 时代中学足球队在12场比赛中，平和负的场数之和等于胜的场数，共积21分. 这个队在这届联赛中胜、平、负各几场？



(第2题)



习题10.4



复习与巩固

1. (中国古代数学问题)^①几个合作经营的商人正分配所得银两,某人在隔壁听见他们说,如果每人分得7两,就剩下4两;如果每人分得9两,还少半斤(旧时1斤=16两).你知道共有多少商人和多少银两吗?
2. “十一”黄金周期间,某景区共接待省内、外游客122万人,总收入达4.8亿元,其中省内、外游客人均消费分别为160元和1200元.该景区接待省内、外游客各多少万人(精确到1万人)?
3. 每千克大豆饼和棉籽饼中,磷和钾的含量(单位:克)分别如下表所示:

	磷	钾
大豆饼	13.2	21.3
棉籽饼	16.3	9.7

现在要用这两种肥料配制成含磷45.8千克、钾40.7千克的混合肥料.大豆饼和棉籽饼各需多少千克?

4. 暑假时一批中学生参加夏令营,途经某旅店住宿.如果每间客房安排住7人,就会有7人没有地方住;如果每间客房安排住9人,就会空出一间房.求旅店的客房数和中学生的人数.
5. 某开发区去年的出口创汇额为25亿美元,今年达到30.55亿美元.已知今年上半年的出口创汇额比去年同期增长18%,下半年比去年同期增长25%,求今年上半年和下半年的出口创汇额.
6. 张大婶和王姐去菜市场买菜.张大婶买了土豆3千克、菠菜2千克,共花费10.2元;王姐买了芹菜1千克、土豆2千克、菠菜1千克,共花费9.2元.已知芹菜每千克3元,问土豆和菠菜每千克各多少元.



拓展与延伸

7. 一张方桌由一个桌面和四条桌腿组成.如果1立方米木料可制作桌面50个,或制作桌腿300条.现有5立方米木料,请你设计一下,用多少木料做桌面,用多少木料做桌腿,恰好配成方桌多少张?

^① 本题出自明代程大位(1533-1606)著《算法统宗》卷十一.原题是:“隔墙听得客分银,不知人数不知银,七两分之多四两,九两分之少半斤.”

*8. (中国古代问题) ① 买2匹马、3头牛或4只羊, 价钱分别都不满10 000文(古时货币单位). 如果买2匹马加上1头牛, 或者买3头牛加上1只羊, 或者买4只羊加上1匹马, 那么各自的价钱正好都是10 000文. 求马、牛、羊的单价.

*9. 某公路收费站对过往车辆的收费标准是: 大客车30元, 小客车15元, 小轿车10元. 某天通过该收费站的大客车是小客车数量的 $\frac{5}{6}$, 小客车是小轿车数量的 $\frac{4}{11}$, 收取小轿车的通行费比大客车和小客车通行费之和少1 050元. 求当天这三种车辆通过的数量.

10. 《一千零一夜》中有这样一段文字: 有一群鸽子, 其中一部分在树上欢歌, 另一部分在地上觅食. 树上的一只鸽子对地上的鸽子说: “如果从你们中飞上来一只, 那么树下的鸽子是整个鸽群的 $\frac{1}{3}$; 如果从树上飞下去一只, 树上、树下的鸽子就一样多.” 你知道原来树上、树下的鸽子各多少只?

探索与创新

11. 甲、乙二人骑自行车同时从相距5千米的两地相向而行, 经过10分钟相遇.

(1) 求甲、乙两人的速度;

(2) 上面的问题(1)有没有解? 如果有解, 有多少个解? 请写出它的两个解;

(3) 请你适当增加上面的问题(1)中的条件, 使问题有唯一解, 并解答你改编后的问题.

*12. 一个三位数, 百位数字比十位数字的2倍多1, 个位数字比十位数字的3倍少1. 如果把把这个三位数的百位数字和个位数字对调, 那么得到的三位数比原来的三位数多99. 求原来的三位数.



回顾与总结

1. 总结本章的主要内容, 并与同学交流.

2. 二元一次方程与一元一次方程有什么不同? 二元一次方程的解有什么特点?

3. 什么是二元一次方程组? 什么是三元一次方程组? 各举一例说明.

4. 解二元一次方程组的基本思路是将方程组向 _____ 转化, 而代入法和加减法是实现这种转化的有效工具. 这两种方法的主要步骤各是什么?

① 本题出自元代朱世杰(1249-1314)著《算学启蒙》. 原题是: “今有二马三牛四羊, 价格各不满一万. 若马添牛一, 牛添羊一, 羊添马一, 则各满一万. 问三色各一, 价钱几何?”

- *5. 解三元一次方程组的基本思路是将三元一次方程组向_____转化, 实现这种转化的工具是_____.
6. 你对解一次方程组的方法有哪些体会? 解一次方程组时, 你认为在什么情况下用代入消元法, 什么情况下用加减消元法更方便? 举例说明.
7. 同一元一次方程一样, 一次方程组也是一种重要的数学模型. 回忆建立和求解一元一次方程模型的过程, 你能说出建立和求解一次方程组模型的过程吗? 与同学交流.
8. 列一次方程组解应用题的关键是什么?
9. 用列二元一次方程组方法解的应用题, 有时也可用列一元一次方程的方法来解决. 你能体会两种方法的不同点吗?



综合练习



复习与巩固

1. 已知二元一次方程组 $\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ bx + 6y = -1 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$ 求 a 与 b .

2. 用代入法和加减法分别解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 5x = y + 5, \\ x = y - 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = -5, \\ 3x - 5y = 9; \end{cases}$$

$$* (3) \begin{cases} x + y = 1, \\ y + z = 6, \\ z + x = 3; \end{cases}$$

$$* (4) \begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + y - 3z = 4, \\ 2x + 3y - 5z = 14. \end{cases}$$

3. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x + 7y = -1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{2}{3}, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = -\frac{9}{4}; \end{cases}$$

$$* (3) \begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 3x + y + 2z = 11, \\ 2x + 3y + z = 11; \end{cases}$$

$$* (4) \begin{cases} 3x + y + 2z = 10, \\ 2x + 3y - z = 9, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

4. 某双层游轮的票价是: 上层票每张 32 元, 下层票每张 18 元. 已知游轮上共有游客 350 人, 而且下层票的总票款比上层票的总票款多 3 700 元. 这艘游轮上、下两层的游客人数分别是多少?

5. 一筒牙膏与一把牙刷原售价共7元. 商场以这种牙膏价格的8折与牙刷价格的6折“捆绑”出售(即将一筒牙膏与一把牙刷配套出售), 售价为每套5.2元. “捆绑”出售前, 一筒牙膏与一把牙刷的售价分别为多少元?
6. 医院用甲、乙两种原料为手术后的病人配置营养品, 每克甲原料含0.5单位蛋白质和1单位铁质, 每克乙原料含0.7单位蛋白质和0.4单位铁质. 如果病人每餐需要35单位蛋白质和40单位铁质, 那么每餐甲、乙两种原料各多少克恰好能满足病人的需要?
7. 邮购一种期刊, 不满100册, 需另加期刊总价的10%作邮费; 超过100册(含100册), 免收邮费. 已知这种期刊每册定价5元, 某公司两次共邮购152册(其中第二次邮购超过100册), 期刊费和邮费总计金额780元. 两次各邮购了多少册?
8. (中国古代数学问题)^①5头牛和2只羊, 共值银10两; 而2头牛和5只羊, 共值银8两. 问一头牛和一只羊各值银几两?
- *9. 甲、乙、丙三个数的和是35, 甲数的2倍比乙数大5, 乙数的 $\frac{1}{3}$ 等于丙数的 $\frac{1}{2}$. 求这三个数.
- *10. 现有1元、5元、10元三种币值的人民币共14张, 总钱数为57元, 其中1元币比5元币多3张. 求三种币值的人民币各有几张.



拓展与延伸

11. 如果方程组

$$\begin{cases} 2x + y = k, \\ x + 2y = 2k - 3 \end{cases}$$

的解中 x 与 y 的和等于5, 求 k 的值.

12. 已知关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} x + 2y = 5m, \\ 6x - y = 4m \end{cases}$$

的解满足方程 $x - 2y + 1 = 0$, 求 m 的值.

13. 某电脑公司销售A, B, C三种型号的电脑, 每台售价分别为6 000元、4 000元、2 500元. 时代中学计划投入100 500元经费用于购买其中两种型号的电脑, 共计36台. 你能设计出几种不同的购买方案? 各是什么方案?
14. 某班进行个人投篮比赛, 有1人未进球, 有2人各进1球, 有7人各进2球, 有2人各进5球, 没有人进5球以上. 小莹和一些同学各进3球, 小亮和一些同学各进4球. 已知进球3球或3球以上的同学平均每人进3.5球, 进球4球或4球以下的同学平均每人进2.5球. 问进3球和进4球的人数各是多少.

^① 本题出自《九章算术》“方程”章. 原题是: “今有牛五、羊二, 直金十两. 牛二羊五, 直金八两. 问牛、羊各直金几何.”

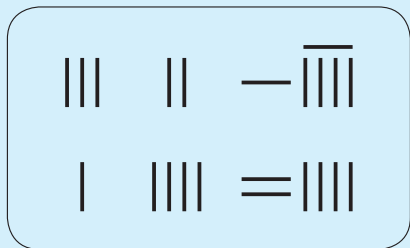


探索与创新

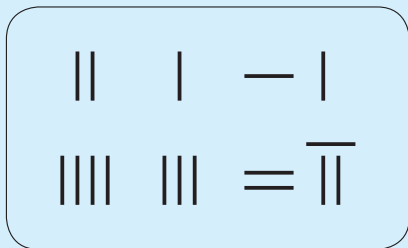
15. 在《九章算术》“方程”章中，一次方程组是通过“算筹”摆放的. 该书中的算筹图是竖排的，为看图方便，我们把它改为横排（图①、图②）. 图中各行从左到右摆出的三组算筹分别表示方程中未知数 x , y 的系数与相应的常数项. 其中，图①所示的算筹图翻译成现代的符号语言，就是

$$\begin{cases} 3x + 2y = 19, \\ x + 4y = 24. \end{cases}$$

你能把图②所示的算筹图翻译出来吗？



①



②

（第15题）

16. 已知方程组 $\begin{cases} (m+1)x - (n-3)y = 11, \\ mx + (n+2)y = 7 \end{cases}$ 的一个解为 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases}$ 求 m, n 的值.

*17. 甲、乙两个数的平均数为 -1 ，乙、丙两个数的平均数是 5 ，甲、丙两个数的平均数是 2 . 甲、乙、丙三个数分别是多少？

18. 某景点的门票价格规定见下表：

购票人数/人	1 ~ 50	51 ~ 100	100以上
每人票价/元	50	45	40

甲、乙两旅游团共103人（甲团人数多于乙团）打算购门票. 如果两团分别各自购票，共需4 860元.

（1）如果两团联合作为一个团体购票可节省多少元？

（2）两个旅游团各有多少人？

第11章 整式的乘除

内容提要

- 同底数幂的乘法
- 积的乘方与幂的乘方
- 单项式的乘法
- 多项式乘多项式
- 同底数幂的除法
- 零指数幂与负整数指数幂
- 绝对值小于1的 nonzero 小数的科学记数法

情境导航

当你站在海边，眺望一望无际的大海时，可曾想到世界海洋的容积有多大？海水是由一个个水分子组成的，一个水分子的质量是 3×10^{-27} 克，在 1 滴水中大约有多少个水分子？

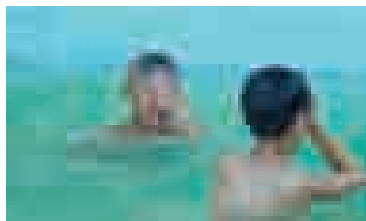


11.1 同底数幂的乘法

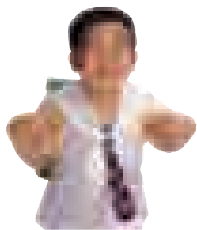


交流与发现

(1) 少年宫的小游泳池中存有约 100 立方米的水. 为了保证池水的清洁卫生, 必须按规定的比例向池水中加施一定量的消毒剂. 为此, 需要将水的体积单位转换成升. 100 立方米的水折合成多少升呢?



游泳池
图 11-1



100 立方米 = 10^2 立方米,
1 立方米 = 10^3 升.

100 立方米
= $10^2 \times 10^3$ 升.



由乘方的意义, 可以得到

$$10^2 \times 10^3 = (10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5.$$

这就是说, 游泳池里大约有水 10^5 升.

(2) 仿照上面的方法, 你会计算 $(-2)^3 \times (-2)^2$, $(\frac{1}{2})^5 \times (\frac{1}{2})^4$ 吗?

(3) 在上面的三个乘法算式中, 两个因数的底数分别有什么特点? 分别比较因数的底数与积的底数、因数的指数与积的指数, 你发现了什么规律? 由此, 你猜测同底数幂的乘法有什么运算性质? 你能说明你的猜测是正确的吗? 与同学交流.

一般地, 设 m, n 都是正整数,

$$a^m \cdot a^n = (\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m \text{ 个 } a}) \cdot (\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n \text{ 个 } a}) \quad (\text{乘方的意义})$$

$$= \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{(m+n) \text{ 个 } a} \quad (\text{乘法结合律})$$

$$= a^{m+n}. \quad (\text{乘方的意义})$$



小资料

底数相同的幂叫做同底数幂, 它们的乘法叫做同底数幂的乘法.

于是, 就得到同底数幂乘法的运算性质:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 都为正整数}).$$

同底数幂的乘法运算可以转化为指数的加法运算.

这就是说, 同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加.

(4) 如果 m, n, p 都是正整数, 你会计算 $a^m \cdot a^n \cdot a^p$ 吗? 由此你能得到什么结论?



例1 计算: (1) $3^2 \times 3^5$; (2) $(-5)^3 \times (-5)^5$.

解 (1) $3^2 \times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$;
(2) $(-5)^3 \times (-5)^5 = (-5)^{3+5} = (-5)^8 = 5^8$.

例2 计算: (1) $a^8 \cdot a^3 \cdot a$; (2) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3$.

解 (1) $a^8 \cdot a^3 \cdot a = a^{8+3+1} = a^{12}$;
(2) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3 = (a+b)^{2+3} = (a+b)^5$.

例3 某台电脑每秒可作 10^{15} 次运算, 它工作 5 小时, 可作多少次运算?

解 $5 \times 3\,600 = 5 \times 3.6 \times 10^3 = 1.8 \times 10 \times 10^3 = 1.8 \times 10^4$.

就是说, 5 小时等于 1.8×10^4 秒.

$$\begin{aligned} 10^{15} \times (1.8 \times 10^4) &= 1.8 \times (10^{15} \times 10^4) \\ &= 1.8 \times 10^{19}. \end{aligned}$$

所以, 该电脑工作 5 小时可作 1.8×10^{19} 次运算.



练习

1. 计算:

$$(1) (-3)^5 \times (-3)^8; \quad (2) \left(\frac{1}{2}x\right) \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \left(\frac{1}{2}x\right)^3.$$

2. 下列计算对不对? 如果不对, 应怎样改正?

$$\begin{aligned} (1) a^2 \cdot a^5 &= a^{10}; & (2) a^3 \cdot a^3 &= 2a^6; \\ (3) a^3 + a^3 &= a^6; & (4) a \cdot a &= a. \end{aligned}$$

3. 填空 (在方框内填上适当的数):

$$(1) 10^3 \times 10^3 \times 10^{\square} = 10^8; \quad (2) a \cdot a^{\square} \cdot a^2 = a^5.$$



习题11.1



复习与巩固

1. 计算:

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3;$$

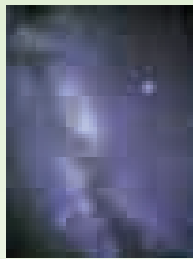
$$(2) a^8 \cdot a^7;$$

$$(3) b^3 \cdot b^6 \cdot b^5;$$

$$(4) (x+y)^3 \cdot (x+y) \cdot (x+y)^2.$$

2. 将 $2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$ 写成底数是2的幂的形式.

3. 光年是天文学上的长度单位, 1光年是光在真空中一年内走过的路程(光传播的速度约为 3×10^8 米/秒). 我们肉眼看到的星星, 几乎都是银河系里的成员, 银河系的直径大约是10万光年. 银河系的直径约为多少千米(精确到 10^{15} 千米)?



银河系
(第3题)



拓展与延伸

4. 计算:

$$(1) a^3 \cdot (-a)^5 \cdot a^{12};$$

$$(2) y^{2n+1} \cdot y^{n-1} \cdot y^{3n+2} \quad (n \text{ 为大于1的整数});$$

$$(3) (-2)^n \times (-2)^{n+1} \times 2^{n+2} \quad (n \text{ 为正整数});$$

$$(4) (x-y)^5 \cdot (y-x)^3 \cdot (x-y).$$

5. 假如你是一艘宇航船的船长, 受命以5年的时间前往半人马星座. 半人马星座与地球的距离约为 4×10^{13} 千米, 而你的宇航船以光速航行, 每年按365天计算, 你能如期到达半人马星座吗?



探索与创新

6. 已知 x, y 为正整数, 且 $a^x = 9^{2n+1}$, $a^y = 729$, 求 a^{x+y} 的值.

7. 已知 n 为正整数, 计算 $x \cdot (-x)^{2n} + (-x)^{2n+1}$.

11.2 积的乘方与幂的乘方



交流与发现

(1) 如图11-2, 时代中学准备将边长为 a 米的正方形花坛, 扩大成边长为 $2a$ 米的正方形花坛. 扩大后新花坛的面积是多少平方米?

新花坛边长为 $2a$ 米, 所以新花坛的面积为

$$\begin{aligned}(2a)^2 &= 2a \cdot 2a \\ &= (2 \times 2) \cdot (a \cdot a) \\ &= 4a^2 \text{ (平方米)}.\end{aligned}$$

(2) 你会计算 $(ab)^2$, $(ab)^3$ 和 $(ab)^4$ 吗?

$$\begin{aligned}(ab)^2 &= (ab) \cdot (ab) \\ &= (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a^2b^2; \\ (ab)^3 &= (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \\ &= (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3b^3; \\ (ab)^4 &= (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \\ &= (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = a^4b^4.\end{aligned}$$

(3) 观察算式 $(ab)^2$, $(ab)^3$ 和 $(ab)^4$ 的计算结果, 你发现了什么规律? 你猜测积的乘方运算有什么性质? 能说明你的猜测是正确的吗? 与同学交流.

一般地, 设 m 是正整数,

$$\begin{aligned}(ab)^m &= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \cdots \cdot (ab)}_{m \text{ 个 } (ab)} && \text{(乘方的意义)} \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ 个 } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{m \text{ 个 } b} && \text{(乘法运算律)} \\ &= a^m b^m. && \text{(乘方的意义)}\end{aligned}$$

于是, 就得到积的乘方的运算性质:

$$(ab)^m = a^m b^m \quad (m \text{ 为正整数}).$$

这就是说, 积的乘方等于各因数乘方的积.

想一想, 当 m 为正整数时, $(abc)^m$ 怎样计算? 与同学交流.

例1 计算: $(ax)^5$.

解 $(ax)^5 = a^5 x^5$.

例2 计算: $(-2xy)^3$.

解 $(-2xy)^3 = (-2)^3 \cdot x^3 \cdot y^3 = -8x^3 y^3$.

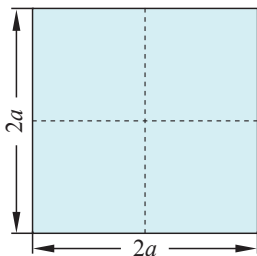


图 11-2

这时运算顺序发生了什么变化?





练习

1. 计算:

(1) $(ab)^4$;

(2) $(-3b)^3$;

(3) $(\frac{1}{3}m)^4$;

(4) $-(xy)^5$;

(5) $(7ab)^2$;

(6) $(-4ab)^3$.

2. 计算:

(1) $(-ab)^5$;

(2) $8^2 \times (0.125)^2$;

(3) $(-2xy)^6$.



交流与发现

(1) 地球可以近似地看作球体, 它的半径约为 6.37×10^3 千米, 它的体积约为多少 (精确到 10^{10} 立方千米)?

$$\begin{aligned} \text{地球的体积 } V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3}\pi \times (6.37 \times 10^3)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \times 6.37^3 \times (10^3)^3. \end{aligned}$$

$$\text{因为 } (10^3)^3 = 10^3 \times 10^3 \times 10^3 = 10^{3+3+3} = 10^{3 \times 3} = 10^9,$$

$$\begin{aligned} \text{所以, 地球的体积 } V &\approx \frac{4}{3} \times 3.14 \times 6.37^3 \times 10^9 \\ &\approx 1.08 \times 10^{12} \text{ (立方千米)}. \end{aligned}$$

(2) 你会计算 $(5^3)^4$ 和 $[(-3)^2]^3$ 吗? 试一试.

根据乘方的意义和同底数指数幂的意义, 得

$$(5^3)^4 = 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3 = 5^{3+3+3+3} = 5^{3 \times 4} = 5^{12};$$

$$\begin{aligned} [(-3)^2]^3 &= (-3)^2 \times (-3)^2 \times (-3)^2 \\ &= (-3)^{2+2+2} = (-3)^{2 \times 3} = (-3)^6. \end{aligned}$$

(3) 观察算式 $(10^3)^3$, $(5^3)^4$ 和 $[(-3)^2]^3$ 的特点和计算结果, 你发现了什么规律? 由此, 你猜测幂的乘方运算有什么性质? 能说明你的猜测是正确的吗? 与同学交流.

一般地, 设 m, n 都是正整数,



小资料

球的体积公式是

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 其中 r 是球的半径.

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}^{n \text{ 个 } a^m} \quad (\text{乘方的意义})$$

$$= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ 个 } m}} \quad (\text{同底数幂乘法的运算性质})$$

$$= a^{mn}. \quad (\text{乘法意义})$$

于是, 就得到幂的乘方的运算性质:

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 都为正整数}).$$

这就是说, 幂的乘方, 底数不变, 指数相乘.

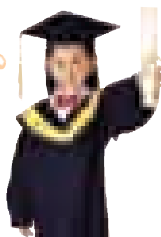
例3 计算: $(-5ab^2)^3$.

解
$$\begin{aligned} (-5ab^2)^3 &= (-5)^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 \\ &= -125a^3b^6. \end{aligned}$$

例4 计算: $(2^3)^2 \times (5^2)^3$.

解
$$\begin{aligned} (2^3)^2 \times (5^2)^3 &= 2^{3 \times 2} \times 5^{2 \times 3} \\ &= 2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6. \end{aligned}$$

幂的乘方运算可以转化为指数的乘法运算.



挑战自我

你能比较 2^{77} , 3^{44} , 5^{33} 的大小吗?



练习

1. 下列计算对不对? 如果不对, 应怎样改正?

(1) $(x^3)^2 = x^9$;

(2) $m^3 \cdot m^5 = m^{15}$;

(3) $a^4 \cdot a^4 = 2a^4$;

(4) $(t^6)^4 = t^{10}$.

2. 计算:

(1) $(10^2)^4$;

(2) $(x^4)^3$;

(3) $(xy^2)^5$;

(4) $(-3x^2)^2$;

(5) $(b^{n-1})^2$;

(6) $[(a+b)^2]^3$.



习题11.2



复习与巩固

1. 计算:

$$(1) (ab)^4; \quad (2) (-4x)^5; \quad (3) 2^{10} \times 0.5^{10}; \quad (4) (-3abc)^2.$$

2. 计算:

$$(1) (pq^3)^5; \quad (2) (7a^5b^2)^2; \quad (3) (x^2y^3)^4; \quad (4) (-2 \times 10^3)^2.$$

3. 下列计算对不对? 如果不对, 应怎样改正?

$$(1) (ax)^3 = ax^3; \quad (2) (6xy)^2 = 12x^2y^2;$$

$$(3) (-m^3)^2 = -m^5; \quad (4) (-2ab^2)^2 = 4a^2b^2.$$

4. 一个正方体的棱长为 2×10^3 厘米, 它的体积是多少立方厘米?



拓展与延伸

5. 计算:

$$(1) (-a^3)^4 - (-a^4)^3; \quad (2) (-x^3) \cdot (-x^2)^2;$$

$$(3) (0.25)^{2012} \times 4^{2013}; \quad (4) (-a^2)^{2n+1} \cdot (-a^3)^{2n-1} \quad (n \text{ 是大于1的整数}).$$

6. 如果 n 是正整数, 计算 $[-(\frac{1}{2})^n]^2 + (-\frac{1}{2})^{2n-1} \times \frac{1}{2}$.

7. 海王星的半径约为地球半径的4倍, 地球的体积为 V 立方千米, 海王星的体积约为多少立方千米?



探索与创新

8. 已知 m, n 都是正整数, 且 $x^m = a, x^n = b$ ($x \neq 0$), 试用含 a, b 的代数式表示 x^{3m+2n} .

11.3 单项式的乘法



交流与发现

如图11-3, 王大伯有一块由6个宽都是 a 米、长都是 ka 米的长方形菜畦相连而成的菜地. 怎样求出这块菜地的面积?

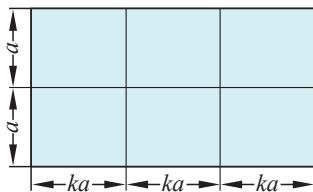
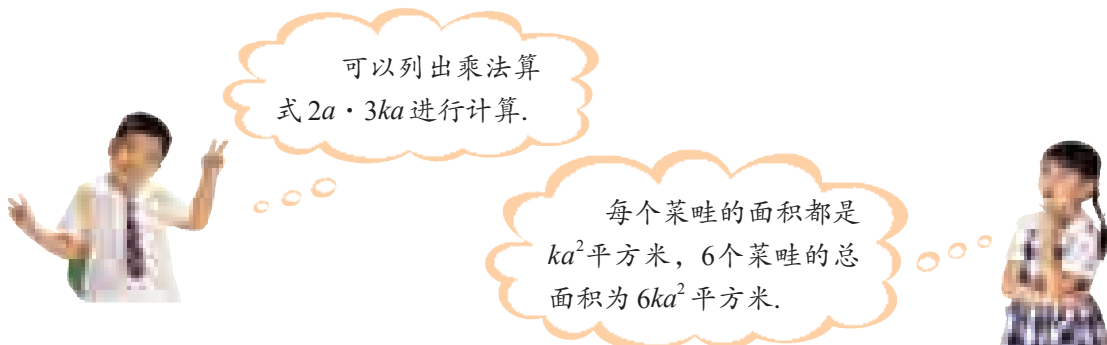


图 11-3



他们的说法都是合理的. 由此可见, 应当有 $2a \cdot 3ka = 6ka^2$.

观察上面得到的等式, 你发现它的左边与右边有什么特点?

上面等式的左边是两个单项式相乘, 等式右边的单项式就是左边两个单项式的积. 如果按照乘法的交换律、结合律和同底数幂的乘法性质, 也可以得到

$$2a \cdot 3ka = (2 \times 3) ka \cdot a = 6ka^2.$$

这里得到的单项式 $2a$ 与 $3ka$ 的乘积 $6ka^2$, 与上面由实际问题得到的等式是一致的. 这就是说, 两个单项式相乘, 可以按照乘法的运算律, 转化为有理数的乘法和同底数幂的乘法进行运算.

一般地, 单项式与单项式相乘有以下法则:

单项式相乘, 把它们的系数相乘, 字母部分的同底数幂分别相乘. 对于只在一个单项式中含有的字母, 连同它的指数作为积的一个因式.

例1 计算:

$$(1) 4a^3 \cdot 7a^4; \quad (2) 7ax \cdot (-2a^2bx^2).$$

解

$$(1) 4a^3 \cdot 7a^4 = (4 \times 7) \cdot (a^3 \cdot a^4) = 28a^7;$$

$$(2) 7ax \cdot (-2a^2bx^2) = [7 \times (-2)] \cdot (a \cdot a^2) \cdot b \cdot (x \cdot x^2) \\ = -14a^3bx^3.$$

例2 求单项式 $\frac{1}{2}x^3y^2$, $-\frac{2}{3}xy^3z$, $\frac{3}{5}x^2yz^2$ 的积.

解

$$\frac{1}{2}x^3y^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}xy^3z\right) \cdot \frac{3}{5}x^2yz^2 \\ = \left[\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{5}\right] \cdot (x^3 \cdot x \cdot x^2) \cdot (y^2 \cdot y^3 \cdot y) \cdot (z \cdot z^2) \\ = -\frac{1}{5}x^6y^6z^3.$$



练习

1. 计算:

$$(1) 3x^2 \cdot 4x;$$

$$(2) 3xy^2 \cdot \left(-\frac{5}{9}x^3yz\right);$$

$$(3) \left(-\frac{1}{4}ax^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}bx^3\right) \cdot (-15ay);$$

$$(4) (2a)^2 \cdot (a^2)^3.$$

2. 下列计算对不对? 如果不对, 应怎样改正?

$$(1) 2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^6;$$

$$(2) 2x^3 + 3x^2 = 5x^5;$$

$$(3) (-2ab) \cdot 3bc = -6abc;$$

$$(4) \left(-\frac{4}{3}xy\right) \cdot (-3xy)^2 = -12x^3y^3.$$



交流与发现

如图 11-4, 如果王大伯家的菜地两侧各有一条宽 0.5 米的小路. 怎样求出包括小路在内的菜地的面积?

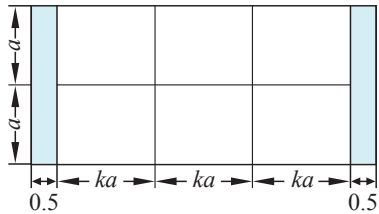
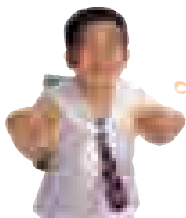


图 11-4



可以列出乘法算式 $2a \cdot (3ka + 1)$ 进行计算.

这块地面积为 6 个菜畦的面积和两段小路面积的和, 即 $6ka^2 + 2a$.



他们的说法都是合理的. 由此可见, 应当有

$$2a \cdot (3ka + 1) = 6ka^2 + 2a.$$

观察上面得到的等式, 你发现它的左边与右边有什么特点?

上面等式的左边是一个单项式与一个多项式相乘, 右边是这个单项式与这个多项式的积. 按照乘法对加法的分配律和单项式的乘法法则, 得到

$$2a \cdot (3ka + 1) = 2a \cdot 3ka + 2a \cdot 1 = 6ka^2 + 2a.$$

这里得到的单项式 $2a$ 与多项式 $3ka + 1$ 的积, 与上面由实际问题得到的等式是一致的. 这就是说, 单项式与多项式相乘可以按照乘法对于加法的分配律, 转化成单项式的乘法进行.

一般地, 单项式与多项式相乘有以下法则:

单项式与多项式相乘，先将单项式分别乘多项式的各项，再把所得的积相加.

例3 计算： $2ax \cdot (3a^2x - 2a^2x^2)$.

解

$$\begin{aligned} & 2ax \cdot (3a^2x - 2a^2x^2) \\ &= 2ax \cdot 3a^2x - 2ax \cdot 2a^2x^2 \\ &= 6a^3x^2 - 4a^3x^3. \end{aligned}$$

例4 化简： $x \cdot (x - y + z) + (x - y - z) \cdot y - z \cdot (x - y + z)$.

解

$$\begin{aligned} & x \cdot (x - y + z) + (x - y - z) \cdot y - z \cdot (x - y + z) \\ &= (x^2 - xy + xz) + (xy - y^2 - yz) - (xz - yz + z^2) \\ &= x^2 - xy + xz + xy - y^2 - yz - xz + yz - z^2 \\ &= x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$



练习

1. 计算：

$$(1) 3x \cdot (x^2 + x + 2); \quad (2) -a^2 \cdot (a + b) + b \cdot (a^2 - b^2).$$

2. 下列计算对不对？如果不对，应怎样改正？

$$(1) (5x^2y - 2xy^2) \cdot 3x = 15x^2y - 6xy^2;$$

$$(2) (-2t) \cdot (3t + t^2 - 1) = -6t^2 - 2t^3 + 2;$$

$$(3) \left(-\frac{1}{3}xy^2\right) \cdot (-3xy + 9yz - 1) = x^2y^3 - 3xy^3z - \frac{1}{3}xy^2;$$

$$(4) a^n (2a^n - 3a^{n-1} + a) = 2a^{2n} - 3a^{2n-1} + a^{n+1}.$$



习题11.3



复习与巩固

1. 计算：

$$(1) 4a^3 \cdot 8a^2;$$

$$(2) 2x^2y^2z \cdot 3xyz^3 \cdot y^5z;$$

$$(3) 2ab^2 \cdot 3a^2bc^2;$$

$$(4) (-4x^2y) \cdot (-5xy^3).$$

2. 计算:

(1) $(-1.2 \times 10^3) \times (5 \times 10^2) \times (3 \times 10^7)$; (2) $(\frac{1}{3} \times 10^2)^8 \times (3 \times 10^3)^5$;

(3) $(-\frac{1}{5}ab^2c) \cdot (-5a^2b)^3$; (4) $(4x^4y)^2 \cdot (-xy^3)^5$.

3. 计算:

(1) $(2x - \frac{1}{2}) \cdot (-4x)$; (2) $3xy \cdot (x^2y - xy)$.

4. 化简:

(1) $3a^2 - 2a \cdot (5 + 1.5a)$; (2) $t \cdot (t + 4) - 3 \cdot (-t^2 - 1)$;

(3) $-2x \cdot (-x^2 + 2x - 1)$; (4) $(\frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{9}ab - \frac{4}{3}) \cdot (-3a^2)$.

5. 先化简, 再求值:

(1) $x^2 \cdot (x^2 - x + 1) - x \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)$, 其中 $x = \frac{1}{2}$;

(2) $x \cdot (x^2 + 1) - x^2 \cdot (x - 3) - 3(x^2 + x - 1)$, 其中 $x = \frac{1}{5}$.



拓展与延伸

6. 计算:

(1) $(3xy^2)^2 + (-4xy^3) \cdot (-xy)$; (2) $t^3 - 2t \cdot [t^2 - 2(t - 3)]$.

7. 解下列方程:

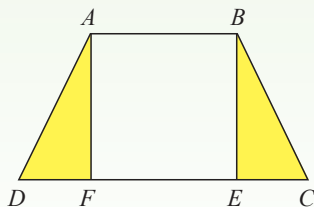
(1) $6x^2 - 2x \cdot (3x + 2) + 9x = -10$;

(2) $24x - 6x \cdot (13x - 9) = -13 - 13x \cdot (6x - 1)$.



探索与创新

8. 如图, 梯形 $ABCD$ 的下底长为 a , 上底长为 b , 四边形 $ABEF$ 是正方形. 用多项式表示图中黄色图形的面积.



(第8题)

11.4 多项式乘多项式



交流与发现

汽车从北京出发, 以 a 千米/时的速度行驶, 经过 t 小时到达天津. 然后, 汽车速度比原来增加 b 千米/时, 行驶时间比北京到天津多用 w 小时到达泰山

(图 11-5). 怎样求出从天津到泰山的路程?



图 11-5

他们的说法都是合理的.

由此可见, 应当有

$$(a+b) \cdot (t+w) = (a+b) \cdot t + (a+b) \cdot w.$$

观察上面得到的等式, 你发现它的左边与右边有什么特点?

上面等式的左边是多项式 $a+b$ 与多项式 $t+w$ 相乘, 右边是这两个多项式的积. 将 $(a+b)$ 看做一个整体, 运用单项式乘多项式的法则, 得到

$$(a+b) \cdot (t+w) = (a+b) \cdot t + (a+b) \cdot w.$$

这与上面由实际问题得到的等式是一致的. 这就是说, 多项式的乘法可以转化成单项式乘多项式进行. 再运用单项式与多项式相乘的法则, 便得到

$$(a+b) \cdot t + (a+b) \cdot w = at + bt + aw + bw.$$

由上面这个等式, 你发现多项式与多项式应当怎样相乘?

一般地, 多项式与多项式相乘有以下法则:

多项式与多项式相乘, 先用一个多项式的每一项分别乘另一个多项式的每一项, 再把所得的积相加.

例1 计算:

(1) $(x+2) \cdot (x-5)$;

(2) $(3x-y) \cdot (x+2y)$.

解

(1) $(x+2) \cdot (x-5)$

$$= x \cdot x + x \cdot (-5) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-5)$$

$$= x^2 - 5x + 2x - 10$$

$$= x^2 - 3x - 10;$$

$$(2) (3x - y) \cdot (x + 2y)$$

$$= 3x \cdot x + 3x \cdot 2y - y \cdot x - y \cdot 2y$$

$$= 3x^2 + 6xy - xy - 2y^2$$

$$= 3x^2 + 5xy - 2y^2.$$

例2 计算: $(a + b) \cdot (a - 2b) + 2b^2$.

解 $(a + b) \cdot (a - 2b) + 2b^2$

$$= a^2 - 2ab + ab - 2b^2 + 2b^2$$

$$= a^2 - ab.$$



练习

1. 计算:

$$(1) (m + 3) \cdot (m + \frac{1}{3});$$

$$(2) (y - 4) \cdot (y - 5);$$

$$(3) (3x - 1) \cdot (x + 2);$$

$$(4) (3n - 2m) \cdot (5n - 4m).$$

2. (1) 计算 $(2x + y) \cdot (2y + x)$;

(2) 你能画一个图形, 用图形的面积解释(1)的结果吗?

例3 计算:

$$(1) (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2);$$

$$(2) (2x - 1) \cdot (-x^2 + 3x - 1).$$

解 (1) $(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2);$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3;$$

$$(2) (2x - 1) \cdot (-x^2 + 3x - 1)$$

$$= -2x^3 + 6x^2 - 2x + x^2 - 3x + 1$$

$$= -2x^3 + 7x^2 - 5x + 1.$$

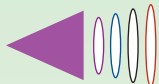
例4 计算: $(y + 2) \cdot (y^2 - 2y + 1) - y \cdot (y^2 + 1).$

解

$$\begin{aligned}
 & (y+2) \cdot (y^2-2y+1) - y \cdot (y^2+1) \\
 &= (y^3-2y^2+y+2y^2-4y+2) - (y^3+y) \\
 &= y^3-2y^2+y+2y^2-4y+2-y^3-y \\
 &= -4y+2.
 \end{aligned}$$

**挑战自我**

小莹说：“我发现不论 n 取怎样的正整数，代数式 $(n+1) \cdot (n^2-n+2) + n \cdot (2n^2-1) + 1$ 的值都是3的倍数”。她说得对吗？为什么？

**广角镜****趣谈转化思想**

匈牙利女数学家罗莎·彼得（Rosen Peter）曾提出一个有趣的问题：“你的面前有煤气灶、水龙头、一只空的水壶和火柴，如果你想烧开水，应当按怎样的顺序去做？”你会说：“先将壶中装满水，再把壶放在煤气灶上，点燃煤气。”这个答复会使提问者满意，认为你已经解决了这个问题。提问者继续提问：“如果壶中已经装满水，其他条件没变，你应当怎样去做？”这时你可能很有信心地回答：“把装满水的壶直接放在煤气灶上，点燃煤气。”然而，这一回答却未能使提问者满意，因为提问者认为：“只有物理学家才会这样做，而数学家则会倒掉壶中的水，并宣称他已经把后一问题转化为先前已经解决的问题了。”

这个例子形象地比喻了数学中的转化思想。它体现了一个将未知的问题转化为已知的问题的过程。转化是一种具有普遍意义的思想，我们在学习数学的新知识时，总是设法把新知识与已有的知识联系起来，运用已有知识去认识和分析新知识、处理和解决新知识中的问题，从而使新知识也成为已有知识。在解决数学问题时，也总是通过由未知到已知、由难到易、由复杂到简单等转化达到解决问题的目的。

转化思想在本册教科书中的应用十分广泛。例如，通过代入法或加减法，二元一次方程组转化为一元一次方程、三元一次方程组转化为二元一次方程组加以解决。再如，同底数幂的乘法运算转化为指数的加法运算，幂的乘方运算转化为指数的乘法运算，单项式与多项式相乘转化为单项式与单项式相乘，多项式与多项式相乘转化为单项式与多

项式相乘等，都是转化的例子。

从学过的数学内容中，你还能举出体现转化思想的例子来吗？



练习

1. 计算：

$$(1) (x-2) \cdot (x^2+2x+\frac{1}{2});$$

$$(2) (a-b) \cdot (a^2-ab+b^2);$$

$$(3) (3x-2) \cdot (2x-5) \cdot (x+1);$$

$$(4) (x+y) \cdot (x-y)^2.$$



习题11.4



复习与巩固

1. 计算：

$$(1) (x-2a) \cdot (2x+a);$$

$$(2) (7x-8) \cdot (x-\frac{1}{2}).$$

2. 一个长方形花坛，相邻两边的长分别为 a 米和 b 米. 如果边长各增加 2 米，它的面积是多少平方米？比原来增加了多少平方米？

3. 用右边的图形解释下面等式的意义：

$$(2a+b) \cdot (a+2b) - 2b^2 = 2a^2 + 5ab.$$

4. 计算：

$$(1) (2m+n+1) \cdot (2m-n);$$

$$(2) (x+5) \cdot (x^2-x+\frac{1}{5});$$

$$(3) (3x+2a) \cdot (x-2a-1) + 2a \cdot (2a+1);$$

$$(4) 6t^2 - (2t-1) \cdot (-3t^2+t-5).$$

5. 先化简，再求值：

$$(1) (3a+1) \cdot (2a-3) - (6a-5) \cdot (a-4), \text{ 其中 } a=2;$$

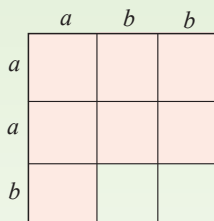
$$(2) (2x-3) \cdot (x^2+x-1) + (-x+2) \cdot (2x^2+1),$$

其中 $x=1$.

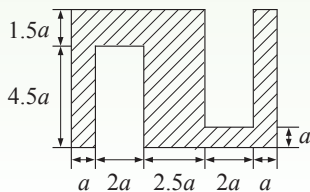


拓展与延伸

6. 如图，计算图形中阴影部分的面积（单位：厘米）。



(第3题)



(第6题)

7. 计算:

$$(1) (x+2y) \cdot (2x-2y) + (2x-2y) \cdot (3x+2y) - 8(x^2-y^2);$$

$$(2) (a+2b) \cdot (a+b) - [(a-b) \cdot (a-2b) - (2a-b) \cdot (3a+b)];$$

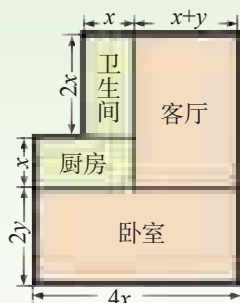
$$(3) (x^2+2x+2) \cdot (x+2) + (-x^2+1) \cdot (x-5).$$

8. 一个三角形底边的长为 a , 高为 h . 如果将底边长增加1, 高减少1, 而面积不变, 那么 a 和 h 应满足什么关系?



探索与创新

9. 某新建小区一居室住房的结构如图所示(长度单位: 米). 如果卧室与客厅地面铺木地板, 卫生间与厨房地面铺瓷砖, 那么木地板与瓷砖的面积各多少平方米?



(第9题)

10. 计算下列各式:

$$(x-1) \cdot (x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(x-1) \cdot (x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(x-1) \cdot (x^3+x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

.....

你发现有什么规律? 请你写出:

$$(x-1) \cdot (x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

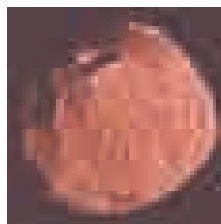
11.5 同底数幂的除法



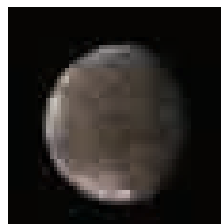
交流与发现

火星有两颗卫星, 即火卫1和火卫2, 火卫1的质量约为 10^{16} 千克. 截止到2005年4月, 已发现木星有58颗卫星, 其中木卫4的质量约为 10^{23} 千克. 木卫4的质量约为火卫1质量的多少倍?

这里 10^{23} 与 10^{16} 是同底数幂. 上面的问题是要计算 $10^{23} \div 10^{16}$ 的商, 由同底数幂乘法的运算性质, $10^7 \times 10^{16} = 10^{23}$, 可以得到



火卫1



木卫4

图 11-6

$$10^{23} \div 10^{16} = 10^7.$$

所以, 木卫4的质量约为火卫1质量的 10^7 倍.

类似地, 你会计算 $(-3)^5 \div (-3)^2$ 和 $(\frac{1}{2})^6 \div (\frac{1}{2})^2$ 吗?

从上面的同底数幂的除法运算中, 你发现幂的底数和指数分别有什么规律? 与同学交流.

一般地, 设 $a \neq 0$, m, n 都是正整数, 并且 $m > n$, 因为除法是乘法的逆运算, 由

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m,$$

可以得到同底数幂的除法的运算性质:

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \text{ 都是正整数, } m > n).$$

这就是说, 底数不等于零的同底数的幂相除, 底数不变, 指数相减.

例1 计算: $(-1.5)^8 \div (-1.5)^7$.

解 $(-1.5)^8 \div (-1.5)^7$
 $= (-1.5)^{8-7} = (-1.5)^1 = -1.5.$

同底数幂的除法运算可以转化为指数的减法运算.

例2 计算: $(a+b)^6 \cdot (a+b)^2 \div (a+b)^3$.

解 $(a+b)^6 \cdot (a+b)^2 \div (a+b)^3$
 $= (a+b)^{6+2} \div (a+b)^3$
 $= (a+b)^8 \div (a+b)^3$
 $= (a+b)^{8-3} = (a+b)^5.$



智趣园

计算机的存储容量

计算机存储容量的基本单位是字节, 用B表示. 人们常用KB (简称K), MB (简称M) 或GB (简称G) 作为信息储量的计量单位. 它们之间的关系是: $1 \text{ KB} = 2^{10} \text{ B}$, $1 \text{ MB} = 2^{10} \text{ KB}$, $1 \text{ GB} = 2^{10} \text{ MB}$. 每个汉字是由两个字节来表示的, 1 KB 可以记录 512 个

汉字, 1 MB可以记录 51 万个汉字, 1 GB就可以记录多达 5 亿个汉字.

小亮家的计算机硬盘容量为 512 GB.

(1) 一部长篇小说的字数按 20 万字计算, 这台电脑可以存入多少部这样的长篇小说?

(2) 一张普通软盘的容量是 1.44 MB, 这台计算机硬盘的容量是 1 张软盘容量的多少倍?

(3) 据英国媒体 2003 年 9 月 14 日报道, 研究人员发现人脑的记忆容量是 10^8 B. 按照这篇报道, 人脑的记忆容量是小亮家的计算机硬盘容量的多少倍?



图 11-7 计算机



练习

1. 计算:

$$(1) 7^8 \div 7^6;$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^6 \div \left(\frac{1}{2}\right)^3;$$

$$(3) (-m)^5 \div (-m)^2; \textcircled{1}$$

$$(4) (2 \times 10^8) \div (5 \times 10^3).$$

2. 下列计算对不对? 如果不对, 应怎样改正?

$$(1) a^6 \div a^2 = a^3;$$

$$(2) (-a)^3 \div (-a) = -a^2;$$

$$(3) a^{2m} \div a^m = a^2;$$

$$(4) a^{m+1} \div a^{m-1} = a^2.$$

3. 填空 (在方框内填上合适的数):

$$(1) x^5 \div x^{\square} = x^2;$$

$$(2) y^{\square} \div y = y.$$

4. 10^{100} 的 $\frac{1}{10}$ 是多少?



习题11.5

1. 计算:

$$(1) 0.1^8 \div 0.1^6;$$

$$(2) \left(-\frac{1}{3}\right)^7 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^4;$$

① 本书中除式中含有字母时, 约定除式中的字母都不为0.

(3) $(a-b)^3 \div (a-b)$;

(4) $(xy)^5 \div (xy)^3$.

2. 下列计算对不对? 如果不对, 应该怎样改正?

(1) $a^6 \div a = a^6$;

(2) $8^3 \div 2^3 = 4$;

(3) $5^4 \div 5^4 = 0$;

(4) $(-b)^4 \div (-b)^2 = -b^2$.

3. 在下列括号内填上适当的代数式, 使等式相等.

(1) $x^5 \cdot (\quad) = x^9$;

(2) $a^6 \cdot (\quad) = a^{11}$;

(3) $b^3 \cdot b^3 \cdot (\quad) = b^{27}$;

(4) $x^2 \cdot x^5 \cdot (\quad) = x^{19}$.

4. 计算:

(1) $(m^2)^3 \div (m^3)^2$;

(2) $x^{12} \div x^3 \div x^4$;

(3) $(-\frac{1}{2})^6 \div (\frac{1}{4})^2$.



拓展与延伸

5. 计算:

(1) $(t^8 \div t^2)(t^{15} \div t^9) \cdot t^2$;

(2) $(x^{n+1} \cdot x^{n+2}) \div (x^{n-1} \cdot x^n)$ (n 为大于1的整数).

6. 据新华社报道, 我国2009年研制成功超级计算机“天河一号”, 2010年升级为“天河一号A”, 其运算速度可达每秒2 507万亿次, 成为当时世界上运算速度最快的超级计算机. 而世界上最早的电子计算机“ENIAC”的运算速度仅为每秒5 000次. “天河一号A”的运算速度是“ENIAC”运算速度的多少倍(精确到 10^{10} 倍)?



国产超级计算机“天河一号”

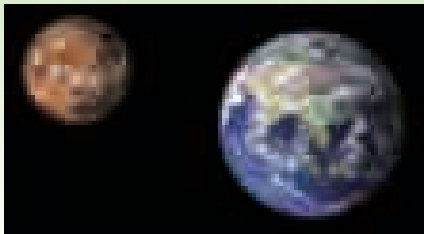
(第6题)



探索与创新

7. 有一个到火星旅行的计划, 往返的行程共需要3个地球年(包括在火星上停留449个地球天). 已知火星和地球之间的距离为 3.4×10^7 千米, 那么往返地球和火星时的平均

速度为多少千米/时（精确到1千米/时）？
（地球年、地球天分别指地球上的一年、一天，即1年=365天，1天=24时）



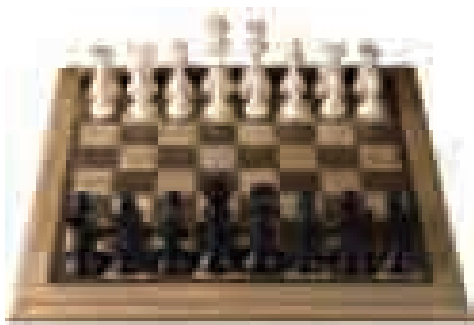
火星与地球
（第7题）

11.6 零指数幂与负整数指数幂



观察与思考

（1）你听说过这样一个故事吗？古印度舍罕国王打算重赏国际象棋发明者宰相西萨. 西萨要求在棋盘（图 11-8）的第1个格内只赏1粒麦子，在第2个格内只赏2粒，第3个格内只赏4粒，以后的每格内都比上一格的麦粒多放1倍，直至第64格——棋盘的最后一格. 结果国王找人一算，发现即使把国库中的全部麦子都给这位宰相，还远远不够！

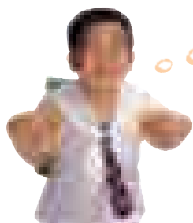


国际象棋棋盘
图 11-8

在这个故事中，从第2个格开始，各方格的麦粒数都可以写成底数是2的正整数指数幂的形式，如下表所示：

方格序号	1	2	3	4	5	...	64
麦粒个数	1	2^1	2^2	2^3	2^4	...	2^{63}

能把第1个格内的麦粒数也写成底数为2的幂的形式吗？



按照表中的规律，第1个格中的麦粒数用底数是2的幂表示，应写成 2^0 ，不过，这样就出现零指数了。

“ $2^0=1$ ”，这在数学上合理吗？



(2) 观察除式 $2^3 \div 2^3$ ，你发现被除式和除式有哪些特点？如何计算它们的商？

由于被除数和除数相等，因此它们的商等于1，即 $2^3 \div 2^3 = 1$ 。

如果仿照同底数幂除法的运算性质进行计算，就得

$$2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0.$$

为了使被除式的指数等于除式的指数时，同底数幂除法的运算性质也能使用，应当规定 $2^0 = 1$ 。

(3) 一般地，为了使同底数幂的除法性质 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (m, n 是正整数， $m > n, a \neq 0$) 当 $m = n$ 时也成立，你认为应对零指数幂的意义作怎样的规定？

我们规定，

$$a^0 = 1 \text{ (其中 } a \neq 0 \text{)}.$$

这就是说，任何不等于零的数的零次幂等于1，零的零次幂没有意义。

这样一来，幂指数的范围从正整数扩充到全体自然数了。



例如， $10^0 = 1$ ， $(-\frac{1}{3})^0 = 1$ 。你能再举出几个数的零次幂的例子吗？

(4) 在上面的规定中，为什么有 $a \neq 0$ 的限制？与同学交流。

例1 计算： $2x^0$ ($x \neq 0$)。

解 $2x^0 = 2 \times 1 = 2$ 。

例2 计算： $a^2 \div a^0 \cdot a^2$ ($a \neq 0$).

解 $a^2 \div a^0 \cdot a^2 = a^2 \div 1 \cdot a^2 = a^2 \cdot a^2 = a^4$.

想一想， $a^2 \div (a^0 \cdot a^2)$ 等于什么？



练习

1. 计算：

(1) 6^0 ;

(2) $(-8)^0$;

(3) $(x-y)^0$ ($x \neq y$);

(4) $\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})^0$;

(5) $(100 \times 2^0) \div (10 \times 2^0)$;

(6) $10^3 \div 10^0 \times 10^5$.

2. 填空（在方框内填上合适的数）：

(1) $a^2 \div a^{\square} = a^2$ ($a \neq 0$);

(2) $x \cdot x^2 \cdot x^{\square} = x^5 \cdot x^0$ ($x \neq 0$).

3. 当 a 为怎样的有理数时， $(a-1)^0 = 1$?



观察与思考

(1) 如图 11-9，数轴上点 A 表示的数是 8，一动点 P 从点 A 出发，向左按以下规律跳动：第 1 次跳动到 OA 的中点 A_1 处，第 2 次从 A_1 点跳动到 OA_1 的中点 A_2 处，第 3 次从 A_2 点跳动到 OA_2 的中点 A_3 处. 如果把点 A 表示的数写成 2^3 ，那么点 A_1, A_2, A_3 应怎样分别用底数是 2 的幂的形式表示？

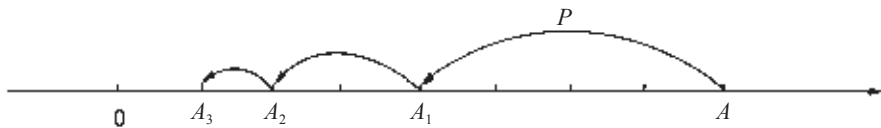
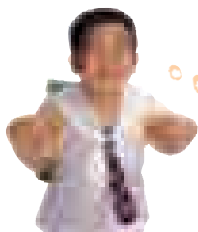


图 11-9

点 A, A_1, A_2, A_3 依次可以写成 $2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ ，这里 $2^3 = 8, 2^2 = 4, 2^1 = 2, 2^0 = 1$.

(2) 如果动点 P 按 (1) 中的规律继续向左跳动到点 $A_4, A_5, A_6, \dots$ 处，你能把点 A_4, A_5, A_6 所表示的数写成 2 的整数指数幂的形式吗？它们应当分别等于多少？



按照上面的规律, 点 A_4, A_5, A_6 所表示的数写成底数是 2 的幂的形式, 应分别是 $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}$. 不过, 这样就出现负整数指数幂了.

按照上面的规律, 点 A_4, A_5, A_6 所表示的数分别是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. 应当有 $2^{-1} = \frac{1}{2}, 2^{-2} = \frac{1}{4}, 2^{-3} = \frac{1}{8}$. 这在数学上合理吗?



(3) 观察除式 $2^2 \div 2^3$ 和 $2^2 \div 2^4$. 你发现被除式和除式有哪些特点? 如何计算它们的商?

由分数的意义和约分法则, 得

$$2^2 \div 2^3 = \frac{2^2}{2^3} = \frac{2^2}{2^2 \times 2} = \frac{1}{2}, \quad 2^2 \div 2^4 = \frac{2^2}{2^4} = \frac{2^2}{2^2 \times 2^2} = \frac{1}{2^2}.$$

如果仿照同底数幂除法的运算性质进行计算, 就得

$$2^2 \div 2^3 = 2^{2-3} = 2^{-1}; \quad 2^2 \div 2^4 = 2^{2-4} = 2^{-2}.$$

为了使被除式的指数小于除式的指数时, 同底数幂除法的运算性质也能使用, 应当规定 $2^{-1} = \frac{1}{2}, 2^{-2} = \frac{1}{2^2}, 2^{-3} = \frac{1}{2^3}, 2^{-4} = \frac{1}{2^4}, \dots$

(4) 一般地, 为了使同底数幂的除法 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (m, n 是正整数, $m \geq n, a \neq 0$) 当 $m < n$ 时也成立, 你认为应对负整数指数幂的意义做怎样的规定?

我们规定,

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad (a \neq 0, p \text{ 是正整数}).$$

这就是说, 任何不等于零的数的 $-p$ (p 为正整数) 次幂, 等于这个数的 p 次幂的倒数. 零的负整数指数幂没有意义.

这样一来, 幂指数的范围又从全体自然数扩充到全体整数了.



(5) 想一想, 在上面的规定中, 为什么有 $a \neq 0$ 的限制?

例3 计算: 4^{-3} , $(-1)^{-3}$, $(0.2)^{-2}$.

解

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}; \quad (-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$(0.2)^{-2} = \frac{1}{(0.2)^2} = \frac{1}{0.04} = 25.$$

例4 计算: $(\frac{1}{2})^{-3}$, $2^{-2} \times 10^{-2}$.

解

$$(\frac{1}{2})^{-3} = 1 \div (\frac{1}{2})^3 = 1 \div \frac{1}{8} = 8;$$

$$2^{-2} \times 10^{-2} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{10^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{400}.$$



练习

1. 以下是法定长度计量单位对照和换算表:

名称	千米	米	分米	厘米	毫米	微米	纳米	飞米
符号	km	m	dm	cm	mm	μm	nm	fm
换算关系	1千米 = 10^3 米		1分米 = 10^{-1} 米	1厘米 = 10^{-2} 米	1毫米 = 10^{-3} 米	1微米 = 10^{-6} 米	1纳米 = 10^{-9} 米	1飞米 = 10^{-15} 米

(1) 用小数表示, 1毫米、1微米、1纳米各是多少米?

(2) 用正整数指数幂表示, 1厘米等于多少纳米? 多少飞米?

(3) 用负整数指数幂表示, 1飞米等于多少纳米? 多少微米? 多少厘米?

2. 计算: 5^{-2} , 10^{-4} , $(-3)^{-3}$, $(\frac{1}{3})^{-4}$.



交流与发现

引入了零指数和负整数指数之后, 正整数指数幂的运算性质能继续使用吗?

(1) 观察下面两组含有零指数幂和负整数指数幂的算式:

$$2^5 \times 2^0;$$

$$2^5 \div 2^0;$$

$$2^5 \times 2^{-2};$$

$$2^5 \div 2^{-2};$$

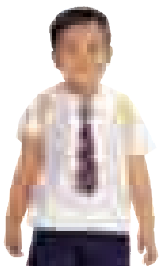
$$2^{-5} \times 2^{-2};$$

$$2^{-5} \div 2^{-2};$$

$$2^0 \times 2^{-2}.$$

$$2^0 \div 2^{-2}.$$

分别按照整数指数幂的意义和仿照同底数幂的乘法与除法的运算性质进行计算, 所得到的结果是否相同?



$$2^5 \times 2^{-2} = 2^5 \times \frac{1}{2^2} = \frac{2^5}{2^2} = 2^3,$$

$$2^5 \times 2^{-2} = 2^{5-2} = 2^3.$$

$$2^0 \div 2^{-2} = 1 \div \frac{1}{2^2} = 4,$$

$$2^0 \div 2^{-2} = 2^{0-(-2)} = 2^2 = 4.$$



对于同一个算式, 这两种算法的结果是相同的. 由此可见, 同底数幂乘法和除法的运算性质在整数范围内仍能使用.

(2) 你能通过举例, 验证积的乘方和幂的乘方的运算性质对于零指数和负整数指数仍能使用吗? 与同学交流.

(3) 由上面的验证过程, 你能得到什么结论?

引入零指数和负整数指数后, 原有的正整数指数幂的运算性质可以扩展到全体整数指数.

例5

计算: (1) $5^2 \div 5^{-1}$;

(2) $(\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^{-2}$;

(3) $(3 \times 10^{-3})^2$.

解

(1) $5^2 \div 5^{-1} = 5^{2-(-1)} = 5^3 = 125$;

(2) $(\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^{-2} = (\frac{1}{2})^{3+(-2)} = \frac{1}{2}$;

(3) $(3 \times 10^{-3})^2 = 3^2 \times (10^{-3})^2 = 0.000\ 009$.

例6

计算: (1) $x^5 \cdot x^{-3}$; ①

(2) $(-a^2b) \div (-a^2b)^{-2}$.

解

(1) $x^5 \cdot x^{-3} = x^{5+(-3)} = x^2$;

(2) $(-a^2b) \div (-a^2b)^{-2} = (-a^2b)^{1-(-2)} = (-a^2b)^3 = -a^6b^3$.

① 今后本书中出现零指数幂或负整数指数幂时, 底数均是不等于零的数.



练习

1. 计算:
- (1) $2^{-2} \times 2^{-3}$;

(2) $3^3 \times 3^{-2} \div 3^8$;

(3) $x^2 \cdot x^3 \div x^8$;

(4) $a^5 \cdot a^2 \div a^{-6}$;

(5) $(a^{-2})^{-3}$;

(6) $(m^2n^{-3})^5$.
2. 计算: $(a+1)^3 \cdot (a+1)^{-1} \div (a+1)^{-2}$.



交流与发现

江河湖海都是由一滴滴水汇集而成,每一滴水中含有许许多多的水分子.
一个水分子的质量大约为 0.000 000 000 000 000 000 03 克,这样小的数写起来太麻烦了,有没有其他的记法呢?

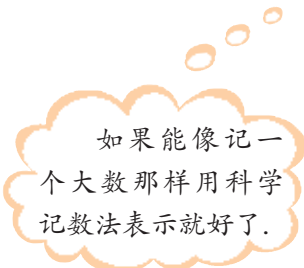


小资料

一滴水的体积大约为 0.05 毫升,质量大约为 0.05 克,含有大约 1 670 000 000 000 000 000 000
 $= 1.67 \times 10^{21}$ 个水分子.



一滴水



如果能像记一个大数那样用科学记数法表示就好了.



根据乘方的意义,填写下表:

10 的幂	表示的意义	化成小数	1 前面的 0 的个数 (包括小数点前面的那个零)
10^{-1}	$\frac{1}{10}$	0.1	1
10^{-2}	$\frac{1}{100}$	0.01	2
10^{-3}			
10^{-4}			

你发现 10 的负整数指数幂用小数表示时有什么规律吗?

$$10^{-n} = \underbrace{0.00\cdots01}_{n\text{个}0}.$$

利用10的负整数指数幂, 一个水分子的质量可写成

$$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 03 = 3 \times \underbrace{0.00\cdots01}_{23\text{个}0} = 3 \times 10^{-23} \text{ (克)}.$$

同样地, 一个水分子的半径为0.000 000 001 925 米, 可写成 1.925×10^{-9} 米.

一个绝对值小于1的非零小数可以记作 $\pm a \times 10^{-n}$ 的形式, 其中 $1 \leq a < 10$, n 是正整数. 这种记数方法, 是绝对值小于1的非零小数的科学记数法.

在上面的科学记数法中, n 等于原数中第一个非零数字前面所有零的个数 (包括小数点前面的那个零).

例如, $0.000\ 012\ 3 = 1.23 \times 10^{-5}$, $-0.35 = -3.5 \times 10^{-1}$.

写成科学记数法形式 $\pm a \times 10^{-n}$ 的数, 可以在计算器上表示.

例如, 在计算器上输入 $\underbrace{0.00\cdots03}_{23\text{个}0}$, 再按  键, 可将原数直接化为科学记数法的形式 3×10^{-23} .

另外, 3×10^{-23} 可以按下列按键顺序输入:



计算器屏幕上显示的结果如图 11-10 ① 所示.

也可以这样操作:



这时计算器屏幕显示的结果如图 11-10 ② 所示.



①



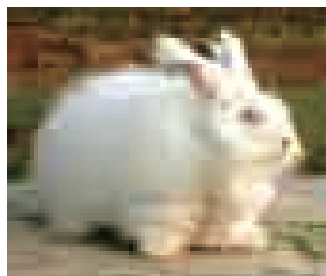
②

图 11-10

例7 安哥拉长毛兔(图 11-11)最细的兔毛直径约为 5×10^{-6} 米,将这个数写成小数的形式.

解 $5 \times 10^{-6} = 0.000\ 005$.

所以,安哥拉长毛兔最细的兔毛直径约为 0.000 005 米.



安哥拉长毛兔
图 11-11

例8 已知某花粉直径为 360 000 纳米,用科学记数法表示,该花粉的直径是多少米?

解 1 纳米 = 10^{-9} 米,
 $360\ 000 \times 10^{-9} = 3.6 \times 10^{-4}$.
 该花粉的直径为 3.6×10^{-4} 米.



练习

- 用科学记数法表示下列各数,并用计算器进行验证:
 - 0.000 08;
 - 0.000 000 100 2;
 - 0.300 1;
 - 0.000 408.
- 先将 2.385×10^{-8} 输入计算器,再写成小数的形式.
- 解答本章“情境导航”中的问题(精确到 10^{19} 个).



习题11.6



复习与巩固

- 计算: 5^0 , $(-1)^0$, $(a-b)^0$.
- 计算: 20^{-2} , 5^{-3} , 8^{-4} , $(a-b)^{-2}$.
- 计算:
 - $b^2 \div b^3 \cdot b^8$;
 - $10^8 \times 10^0 \times 10^{-2}$;
 - $(m^3 \cdot m^5) \div (m \cdot m^9)$;
 - $q^6 \div q^3 \div q^5$;
 - $3^{-2} \times 3^3$;
 - $a^3 \div a^{-5}$;
 - $(x^{-5})^2$;
 - $(t^3y)^{-2}$.

4. 用负整数指数幂表示:

(1) 1平方厘米等于多少平方米? 多少平方千米?

(2) 1立方厘米等于多少立方米? 多少立方千米?

5. 光在真空中的传播速度约为 300 000 千米/秒, 那么光每前进1米用多少时间(精确到 10^{-10} 秒)?

6. 蓝鲸是地球上最重的动物, 成年蓝鲸的质量可达 150 吨, 而一条沙丁鱼的质量约为 30 克. 一条蓝鲸的质量是一条沙丁鱼质量的多少倍? 反之, 一条沙丁鱼的质量是一条蓝鲸质量的多少倍?



蓝 鲸
(第 6 题)

7. 用科学记数法表示下列各数:

(1) 0.085;

(2) -0.000 085.

8. 将下列各数写成小数的形式:

(1) 3.67×10^{-5} ;

(2) -2.8×10^{-6} .

9. 在计算器上分别输入下列各数:

(1) $2.818\ 2 \times 10^{-5}$;

(2) 1.6×10^{-8} .

10. 计算(结果用科学记数法表示):

(1) $(8.616\ 2 \times 10^{-3}) \times 10^{-8}$;

(2) $(6.12 \times 10^{-8}) \div (-1.2 \times 10^{-5})$.

11. 填空(在方框内填上合适的数):

(1) $1.618 \times 10^{\square} = 0.000\ 161\ 8$;

(2) $\square \times 10^{\square} = 0.000\ 818\ 2$.



拓展与延伸

12. 计算:

(1) $(y-x)^3 \div (y-x)^{-2}$;

(2) $(-2)^{100} \div (-2)^{-101}$;

(3) $(\frac{1}{3})^{-2} \times (\frac{3}{2})^{-3}$;

(4) $(a^{-2}b^{-3})^{-3}$.

13. 填空(在方框内填上合适的数):

(1) $x^{\square} \div x^5 = x^{-2}$;

(2) $m^5 \div m^2 \cdot m^{\square} = m^{-2}$.

14. 1 毫秒等于 10^{-3} 秒, 那么 1 毫秒等于多少小时(用科学记数法表示, 精确到 10^{-8} 时)?

15. 太阳释放的辐射能功率为 3.8×10^{23} 千瓦, 到达地球的仅占 20 亿分之一. 到达地球的辐射能功率是多少千瓦(用科学记数法表示, 精确到 10^{13} 千瓦)?



用天文望远镜观测到的太阳
(第 15 题)



探索与创新

16. 人们用“捡了芝麻，丢了西瓜”比喻因小失大. 有人做过实验，2万粒芝麻的质量约80克，如果一个西瓜的质量为4千克，一粒芝麻的质量是这个西瓜的质量的多少倍？
17. 请查阅资料，举出几个用科学记数法表示绝对值小于1的非零小数的实际数据，并编制一道数学应用题.



(第16题)



回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容？总结一下，并与同学交流.
2. 在本章中学习了幂的哪些运算性质？分别举例说明.
3. 单项式与单项式相乘应注意些什么？单项式与多项式以及多项式与多项式相乘应注意些什么？举例说明.
4. 零指数幂和负整数指数幂的意义是什么？为什么这里规定底数不等于零？
5. 引入零指数幂和负整数指数幂后，原有的幂的运算性质可以扩展到全体整数指数. 请以 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 为例，说明当 m, n 为任意整数时，这个性质也成立.
6. 怎样用科学记数法表示一个绝对值小于1的非零小数？怎样表示一个绝对值大于10的数？举例说明. 你认为二者有什么相同点和不同点？
7. 在本章的学习中，转化的数学思想是怎样体现的？



综合练习



复习与巩固

1. 计算：

$$(1) a \cdot 2a^2 \cdot 3a^3;$$

$$(2) \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \div \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$(3) (2xy^2)^3;$$

$$(4) b^3 \div b^5 \cdot 3b^{-2};$$

$$(5) (2a^2)^2 \cdot (3a^3)^3;$$

$$(6) (2ab^{-2})^2.$$

2. 计算:

(1) $(a^2)^2 \cdot a^{10}$;

(2) $(x^2y^2)^2 \cdot (x^3y^3)^3$;

(3) $(a^2b)^2 \cdot (2ab + \frac{1}{2}a^2b^3)$;

(4) $(a^2b^2) \cdot [(ab^2)^2 + (2ab)^3 + 3a^2]$;

(5) $(2x+y) \cdot (3x-2y)$;

(6) $(6a-5) \cdot (a^2+2a+3) + 15$.

3. 用科学记数法表示下列各数:

(1) 0.000 000 035 7;

(2) 0.000 302.

4. 把下列各数写成小数形式:

(1) 2.318×10^{-7} ;

(2) 1.6×10^{-6} .

5. 选择题:

(1) $a^5 \div a^2 \div a^7$ 等于 ().

(A) a^{-3}

(B) a^0

(C) a^{-4}

(D) a^{14}

(2) $(3a-bc) \cdot (-bc-3a)$ 等于 ().

(A) $bc^2 - 9a^2$

(B) $b^2c^2 - 3a^2$

(C) $9a^2 - b^2c^2$

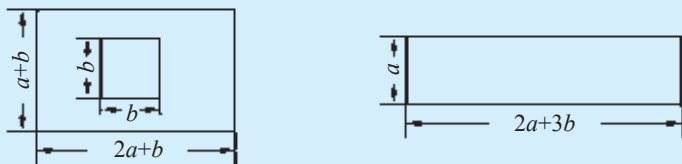
(D) $b^2c^2 - 9a^2$

6. 先化简, 再求值:

(1) $(x-2y) \cdot (x+2y-1) + 4y^2$, 其中 $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$;

(2) $(a+b) \cdot (2a-b) + (2a+b) \cdot (a-2b)$, 其中 $a = -2$, $b = 3$.

7. 如图, 一个相邻两边的长分别为 $2a+b$ 和 $a+b$ 的长方形, 中间挖去一个边长为 b 的正方形, 剩余部分的面积与一个相邻两边的长分别为 $2a+3b$ 和 a 的长方形的面积相等吗? 为什么?



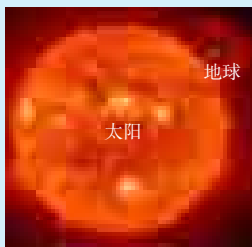
(第7题)

8. 家电商场销售某种品牌的电视机, 已知每台电视机的售价为 m 元, 平均每天销售 n 台. 国庆节期间, 每台优惠 300 元, 销售量平均每天增加了 10 台. 国庆节期间这种电视机平均每天的营业额是多少?
9. 国家质量监督局规定: 针织内衣等产品的甲醛含量应在百万分之七十五以下. 试将百万分之七十五用科学记数法表示出来.

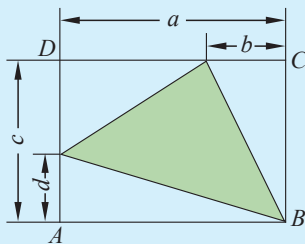


拓展与延伸

10. 地球的体积约为 10^{12} 立方千米, 太阳的体积约为 1.4×10^{18} 立方千米. 地球的体积约是太阳体积的多少倍 (用科学记数法表示, 精确到 10^{-8})?
11. 如图, 四边形 $ABCD$ 是长方形, 尺寸如图所示, 求绿色三角形的面积.



地球与太阳
(第 10 题)



(第 11 题)



探索与创新

12. 研究下列算式, 你发现有什么规律?

$$1 \times 2 \times 3 - 2^3 = -2,$$

$$2 \times 3 \times 4 - 3^3 = -3,$$

$$3 \times 4 \times 5 - 4^3 = -4,$$

.....

- (1) 请将你找出的规律用公式表示出来, 并用你学过的知识推导出这个公式;
- (2) 用得到的公式计算: $999 \times 1\,000 \times 1\,001$.
13. 小亮在做“化简 $(2x+k) \cdot (3x+2) - 6x \cdot (x+3) + 5x + 16$, 并求 $x=2$ 时的值”一题时, 错将 $x=2$ 看成了 $x=-2$, 但结果却和正确答案一样. 由此你能推算出 k 的值吗?
14. (1) 将 a^n 填入下面的表中:

$a \backslash n$	3	2	1	0	-1	-2	-3
10							
2							
1							
$\frac{1}{2}$							
$\frac{1}{10}$							

- (2) 仿照上表, 请你设计一个表格, 列出当 a 分别取 $-\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{2}$, -1 , -2 , -10 , 且 n 分别取 $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ 时, 幂 a^n 的值;
- (3) 观察两个表格, 你能发现其中有哪些规律? 与同学交流.

第 12 章 乘法公式与因式分解

内容提要

- 平方差公式
- 完全平方公式
- 用提公因式法进行因式分解
- 用公式法进行因式分解





情境导航

美丽壮观的城市广场，是人们休闲旅游的好地方，已经成为现代城市的一道风景线。

某城市广场呈长方形，长为 803 米，宽为 797 米，你能用简便的方法计算出它的面积吗？

12.1 平方差公式



观察与思考

(1) 时代中学计划将一个边长为 a 米的正方形花坛, 改造成长为 $(a+2)$ 米、宽为 $(a-2)$ 米的长方形花坛. 你会计算改造后的花坛面积吗? 如果改造成长为 $(a+1)$ 米、宽为 $(a-1)$ 米的长方形花坛呢?

$$(a+2) \cdot (a-2) = a^2 - 2a + 2a - 4 = a^2 - 4;$$

$$(a+1) \cdot (a-1) = a^2 - a + a - 1 = a^2 - 1.$$

(2) 观察上面两个乘式中的因式以及它们的乘积, 你发现了什么?

(3) 如图 12-1, 在长为 $a+b$, 宽为 $a-b$ 的长方形中, 剪去一个长为 $a-b$, 宽为 b ($a > b > 0$) 的小长方形, 然后把长方形 ① ② 拼接成图 12-2 所示的图形. 分别计算它们的面积. 由此, 你得出一个怎样的等式?

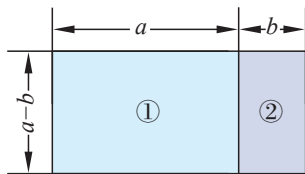


图 12-1

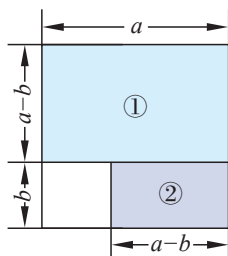


图 12-2

(4) 设 a, b 都是有理数, 利用多项式的乘法法则, 计算这两个数的和与这两个数的差的积, 你能推导出一般性的结论吗?

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

由此得到平方差公式

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$$

这就是说, 两个数的和与这两个数的差的乘积, 等于这两个数的平方差.

例如, $(5+x) \cdot (5-x) = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$.

例1 利用平方差公式计算：

$$(1) (3x+2y) \cdot (3x-2y);$$

$$(2) (-7+2m^2) \cdot (-7-2m^2);$$

$$(3) (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1).$$

解 (1) $(3x+2y) \cdot (3x-2y)$

$$= (3x)^2 - (2y)^2$$

$$= 9x^2 - 4y^2;$$

$$(2) (-7+2m^2) \cdot (-7-2m^2)$$

$$= (-7)^2 - (2m^2)^2$$

$$= 49 - 4m^4;$$

$$(3) (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)$$

$$= (x^2-1) \cdot (x^2+1)$$

$$= x^4-1.$$

平方差公式中的 a 和 b
可以表示任意的代数式.



想一想，利用平方差公式可以使哪一类多项式的乘法变得简单一些？

例2 利用平方差公式计算本章“情境导航”中提出的问题.

解 $803 \times 797 = (800+3) \times (800-3)$

$$= 800^2 - 3^2$$

$$= 640\,000 - 9 = 639\,991.$$

所以，这个城市广场的面积为 639 991 平方米.



挑战自我

利用平方差公式计算 $(1+\frac{1}{2}) \times (1+\frac{1}{4}) \times (1+\frac{1}{16}) \times (1+\frac{1}{256})$.



练习

1. 利用平方差公式计算：

$$(1) (a+6) \cdot (a-6);$$

$$(2) (1+x) \cdot (1-x);$$

$$(3) (x-20y) \cdot (x+20y);$$

$$(4) (a-3) \cdot (a+3) \cdot (a^2+9).$$



习题12.1



复习与巩固

1. 计算:

$$(1) (2x+8) \cdot (2x-8);$$

$$(2) (2+5a) \cdot (5a-2);$$

$$(3) (1.2m-n) \cdot (1.2m+n);$$

$$(4) (3a^2 + \frac{1}{4}b) \cdot (3a^2 - \frac{1}{4}b).$$

2. 利用平方差公式计算:

$$(1) 73 \times 67;$$

$$(2) 99.8 \times 100.2.$$

3. 计算:

$$(1) (2a-1) \cdot (2a+1) \cdot (4a^2+1);$$

$$(2) (2x-5) \cdot (2x+5) - (7+2x) \cdot (2x-7).$$



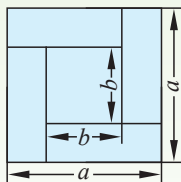
拓展与延伸

4. 你能利用右图中的面积关系解释平方差公式吗?

5. 计算:

$$(1) a^4 - (a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2+b^2);$$

$$(2) \frac{2015}{2015^2 - 2016 \times 2014}.$$



(第4题)



探索与创新

6. 化简:

$$(3+2) \times (3^2+2^2) \times (3^4+2^4) \times (3^8+2^8) \times \cdots \times (3^{64}+2^{64}).$$

12.2 完全平方公式



观察与思考

一个正方形花坛的边长是 a 米, 如果把它每条边长都增加 b 米, 所得到的新正方形花坛的面积便是 $(a+b)^2$ 平方米 (图 12-3).

(1) 你能用多项式的乘法法则计算 $(a+b)^2$ 吗?

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

由此得到公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

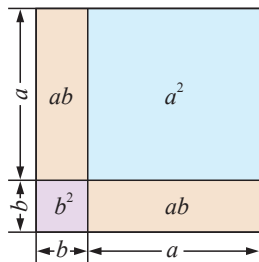


图 12-3

你能利用图 12-3 中的面积关系说明这个公式吗？与同学交流.

(2) 用 $(-b)$ 代替上式中的 b , 得

$$(a-b)^2 = [a + (-b)]^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

由此得出公式

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

你能用一个几何图形的面积关系说明这个公式吗？

这就是说，两数和（差）的平方等于这两个数的平方和加上（减去）它们乘积的2倍.

这两个公式统称完全平方公式.

完全平方公式与平方差公式都叫做乘法公式 (multiplication formula).

例1 利用完全平方公式计算：

$$(1) \left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^2;$$

$$(2) (2m - 5n)^2;$$

$$(3) (-0.5a + 0.1b)^2.$$

解

$$(1) \left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}y + \left(\frac{2}{3}y\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{4}{9}y^2;$$

$$(2) (2m - 5n)^2$$

$$= (2m)^2 - 2 \times 2m \cdot 5n + (5n)^2$$

$$= 4m^2 - 20mn + 25n^2;$$

公式中的 a 和 b , 可以表示任意的代数式.



$$\begin{aligned}
 & (3) (-0.5a + 0.1b)^2 \\
 &= (-0.5a)^2 + 2 \cdot (-0.5a) \cdot 0.1b + (0.1b)^2 \\
 &= 0.25a^2 - 0.1ab + 0.01b^2.
 \end{aligned}$$

例2 利用完全平方公式计算：

$$(1) \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y^2\right)^2; \quad (2) 101^2.$$

解

$$\begin{aligned}
 (1) & \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y^2\right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}y^2 + \left(\frac{2}{3}y^2\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}xy^2 + \frac{4}{9}y^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 101^2 &= (100 + 1)^2 \\
 &= 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2 \\
 &= 10\,000 + 200 + 1 \\
 &= 10\,201.
 \end{aligned}$$



练习

1. 利用完全平方公式计算：

$$(1) (2a + 5b)^2; \quad (2) (1.2m + 3n)^2;$$

$$(3) (3x - y)^2; \quad (4) (4p - 2q)^2.$$

2. 利用完全平方公式计算：

$$(1) \left(-\frac{1}{2}a + 5b\right)^2; \quad (2) \left(-\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y\right)^2.$$

3. 利用完全平方公式计算：

$$(1) 54^2; \quad (2) 997^2.$$

例3 计算：

$$\begin{aligned}
 (1) & (x - 2y) \cdot (x + 2y) - (x + 2y)^2 + 8y^2; \\
 (2) & (a + 2b + 3c) \cdot (a + 2b - 3c).
 \end{aligned}$$

解

$$\begin{aligned}
 & (1) (x-2y) \cdot (x+2y) - (x+2y)^2 + 8y^2 \\
 &= (x^2 - 4y^2) - (x^2 + 4xy + 4y^2) + 8y^2 \\
 &= x^2 - 4y^2 - x^2 - 4xy - 4y^2 + 8y^2 \\
 &= -4xy;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (2) (a+2b+3c) \cdot (a+2b-3c) \\
 &= [(a+2b)+3c] \cdot [(a+2b)-3c] \\
 &= (a+2b)^2 - (3c)^2 \\
 &= a^2 + 4ab + 4b^2 - 9c^2.
 \end{aligned}$$

可以把 $(a+2b)$
看做平方差公式中的 a .

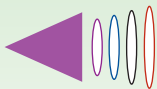
例4计算: $(a+b)^3$.**解**

$$\begin{aligned}
 & (a+b)^3 \\
 &= (a+b) \cdot (a+b)^2 \\
 &= (a+b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) \\
 &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
 \end{aligned}$$

**挑战自我**

计算: $15^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $25^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $35^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $45^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

你发现个位数字是5的两位数的平方的末尾两位数有什么规律? 个位数字是5的三位数的平方的末尾两位数呢? 你能利用完全平方公式, 解释这个规律吗?

**广角镜****奇妙的“贾宪三角形”**

我国北宋数学家贾宪(11世纪人, 生卒年代不详)在1050年左右首先发现了一个奇妙的“三角形”(图12-4), 这个“三角形”被称为贾宪三角形.

这个“三角形”有什么奇妙之处呢？

(1) “三角形”第1行有1个数，第2行有2个数……第 n 行有 n 个数.

(2) 从第一行开始，每行中的各个数字之和依次为：

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$$

第 n 行中的数字之和是 2^{n-1} .

(3) 每行中的数字呈左右对称，由1开始由小变大，然后由大变小，最后回到1.

(4) “三角形”两腰上的数字都是“1”. 除1之外，其余每个数字都是它“双肩”上的两个数字之和，如 $2 = 1 + 1$ ， $10 = 4 + 6$ ， $35 = 15 + 20$.

不仅如此，这个“三角形”第 $n+1$ 行中的数竟与 $(a+b)^n$ (n 是正整数) 展开式各项的系数完全吻合. 例如，当 n 为2, 3时，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

展开式中各项的系数1, 2, 1; 1, 3, 3, 1恰为“三角形”中第3行和第4行的数. 类似地，

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

由以上四式，还可以猜测， $(a+b)^n$ 的展开式有以下特点：展开式的项数为 $n+1$ ，每一项的次数都是 n ，各项中 a 的指数由 n 逐项减少到0， b 的指数由0逐项增加到 n .

$(a+b)^n$ 展开式中项数、系数和各项次数的规律，将在高中学习二项式定理时，予以证实.

按照上面所说的规律，你能写出 $(a+b)^7$ 的展开式吗？

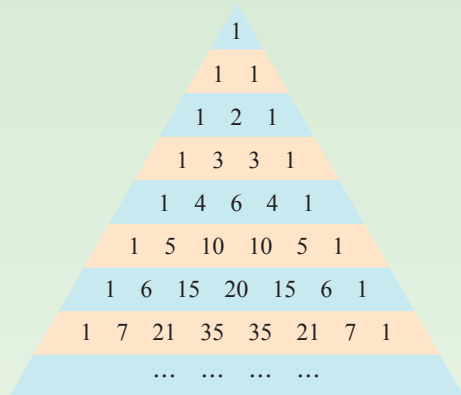


图 12-4

练习

1. 计算下列各题：

(1) $(3x-2y)^2 + (3x+2y)^2$;

(2) $4(x-1) \cdot (x+1) - (2x+3)^2$.

2. 先化简，再求值： $(x+y)^2 - 4xy$ ，其中 $x=12$ ， $y=9$.



习题12.2



复习与巩固

1. 计算:

$$(1) (2m+3)^2;$$

$$(2) (-1.3a+2b)^2;$$

$$(3) (-2p-7q)^2;$$

$$(4) (a-\frac{1}{3}b)^2.$$

2. 利用乘法公式计算:

$$(1) 91^2;$$

$$(2) -198^2.$$

3. 计算:

$$(1) 3(2-y)^2 - 4(y+5)^2;$$

$$(2) (m-n-1) \cdot (m-n+1).$$

4. 回答下列问题:

$$(1) a^2+b^2 \text{ 加上什么式子可以得到 } (a+b)^2?$$

$$(2) a^2+ab+b^2 \text{ 加上什么式子可以得到 } (a-b)^2?$$

5. 已知 $a+b=5$, $ab=-6$, 求下列各式的值:

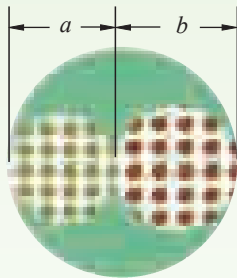
$$(1) a^2+b^2;$$

$$(2) (a-b)^2.$$



拓展与延伸

6. 如图, 某公园要在一块直径为 $(a+b)$ 米的圆形空地上, 建两个直径分别为 a 米与 b 米的圆形花坛, 其余部分设计为草坪. 求草坪的面积.



(第6题)

7. 已知 $(x+y)^2=4$, $(x-y)^2=10$, 求 x^2+y^2 和 xy 的值.

8. 用完全平方公式计算:

$$(1) (x+y+z)^2;$$

$$(2) (a-b)^3.$$

9. 计算: (1) $1001^2 \times 999^2$;

$$(2) 20.2^2 + 19.8^2.$$



探索与创新

10. 观察下面的4个等式:

$$3^2 = 2 + 2^2 + 3, \quad 4^2 = 3 + 3^2 + 4, \quad 5^2 = 4 + 4^2 + 5, \quad 6^2 = 5 + 5^2 + 6.$$

(1) 请你写出第5个等式;

(2) 如果用 n 表示正整数, 你能用含有字母 n 的等式表示出你发现的规律吗? 你能说明所发现的规律是正确的吗?

$$11. \text{ 计算: } \underbrace{99 \cdots 9}_{n \text{ 个 } 9} \times \underbrace{99 \cdots 9}_{n \text{ 个 } 9} + \underbrace{199 \cdots 9}_{n \text{ 个 } 9}.$$

12.3 用提公因式法进行因式分解



观察与思考

由单项式与多项式的乘法法则，可以得到

$$m(a+b+c) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

反过来，你能把多项式 $ma+mb+mc$ 写成两个整式乘积的形式吗？

多项式 $ma+mb+mc$ 的各项都含有相同的因式 m ，我们把因式 m 叫做这个多项式各项的**公因式** (common factor)。

把公因式 m 提出来，作为积的一个因式，其余部分作为另一个因式，就得到

$$ma+mb+mc = m(a+b+c).$$

这里逆向运用了
乘法对加法的分配律.



把一个多项式化成几个整式的乘积的形式，叫做**因式分解** (factorization)。

上面所用的因式分解的方法，叫做**提公因式法**。

例1 把下列各式进行因式分解：

(1) $3a^2+12a$;

(2) $-4x^2y-16xy+8x^2$.

解

(1) $3a^2+12a$

$$= 3a \cdot a + 3a \cdot 4$$

$$= 3a(a+4);$$

(2) $-4x^2y-16xy+8x^2$

$$= -4x \cdot xy - 4x \cdot 4y + 4x \cdot 2x$$

$$= -4x(xy+4y-2x).$$

用提公因式法进行因式分解，
关键在于找出多项式各项的公因式，并把各项的公因式一次提出.



例2 把下列各式进行因式分解：

(1) $a(m-6)+b(m-6)$;

(2) $3(a-b)+a(b-a)$.

解

$$(1) a(m-6) + b(m-6)$$

$$= (m-6)(a+b);$$

$$(2) 3(a-b) + a(b-a)$$

$$= 3(a-b) - a(a-b)$$

$$= (a-b)(3-a).$$

公因式也可以
是多项式.



想一想, 提出多项式各项的公因式与多项式的乘法之间有什么关系? 多项式的乘法与因式分解有什么关系? 与同学交流.



挑战自我

$3^{200} - 4 \times 3^{199} + 10 \times 3^{198}$ 是 7 的倍数吗? 为什么?



练习

1. 下列各式从左到右的变形, 哪些是因式分解? 哪些不是?

$$(1) (x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2;$$

$$(2) a^2 - 4a + 4 = a(a-4) + 4;$$

$$(3) m^2n - 8n = n(m-8);$$

$$(4) x^2 + 4x + 2 = x^2 + 2(2x+1).$$

2. 把下列各式进行因式分解:

$$(1) x^2 + xy;$$

$$(2) -4b^2 + 2ab;$$

$$(3) 3ax - 12bx + 3x;$$

$$(4) 6ab^3 - 2a^2b^2 + 4a^3b.$$

3. 把下列各式进行因式分解:

$$(1) 2(x-y) - (x-y)^2;$$

$$(2) 6(m-n)^2 + 3(m-n).$$



习题12.3



复习与巩固

1. 把下面多项式中各项的公因式填在括号内:

$$(1) 4a^2b^2 + 6ab^3;$$

()

$$(2) -49a^2 + 7ab^3 - 21a;$$

()

$$(3) 7(a-2)^2 + 14(a-2);$$

()

$$(4) a^2b(x-y) - ab(y-x)^2. \quad (\quad)$$

2. 把下列各式进行因式分解:

$$(1) a^2b - 3ab;$$

$$(2) xy^3 + x^3y;$$

$$(3) 8abc + 4bc^2;$$

$$(4) 6ab + 8b - bd;$$

$$(5) 14mnx + 7mx + 21nx;$$

$$(6) 2m^3n + 16m^2n^2 + 4mn^3.$$

3. 把下列各式进行因式分解:

$$(1) a(m+n) - b(m+n);$$

$$(2) (a+b)(a-b) - (b+a);$$

$$(3) m(a-3) - n(3-a);$$

$$(4) x(x-y) + y(y-x).$$



拓展与延伸

4. 把下列各式进行因式分解:

$$(1) 5(a-1)^2 - 10(1-a);$$

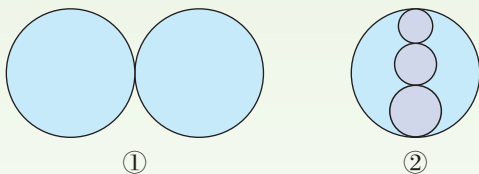
$$(2) ab(x-y)^2 - ab^2(y-x)^2.$$

5. 计算:

$$(1) \frac{2^{2013}}{2^{2012} - 2^{2013}};$$

$$(2) (-3)^n + 3(-3)^{n-1}.$$

6. 如图, 公园计划修建喷水池, 图①和图②是两种设计方案. 方案①是两个面积相等的大圆形水池, 方案②是一个大的圆形水池内又有三个圆形小水池. 如果两种方案中大圆的直径相等, 这两种方案需用的喷水池外围的砌墙用料一样多吗? 为什么?



(第6题)



探索与创新

7. 计算: $\frac{10^{2n+1} + 10^{2n-1}}{10^{2n+1} - 10^{2n-1}}$ (其中 n 为正整数).

8. 任意写出一个十位数字与个位数字不相等的两位数, 把它们的十位数字与个位数字对调, 得到另一个两位数. 用较大的两位数减去较小的两位数, 所得的差一定能被9整除吗? 为什么?

12.4 用公式法进行因式分解



观察与思考

你能把下列多项式进行因式分解吗？

$$(1) a^2 - b^2;$$

$$(2) a^2 + 2ab + b^2.$$

它们都是乘法公式中等号右边的形式，能利用乘法公式试一试吗？



把乘法公式

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

的左边和右边分别交换位置，就得到

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

把它们作为公式，就可以把具备平方差或完全平方形式的多项式进行因式分解，这种因式分解的方法叫做公式法.

例1 把下列各式进行因式分解：

$$(1) 4x^2 - 25;$$

$$(2) 16a^2 - 9b^2.$$

解

$$(1) 4x^2 - 25$$

$$= (2x)^2 - 5^2$$

$$= (2x+5)(2x-5);$$

可以把 $4x^2$ 写成 $(2x)^2$ ，把 25 写成 5^2 ，因而多项式 $4x^2 - 25$ 具备 $a^2 - b^2$ 的形式.



$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 16a^2 - 9b^2 \\
 &= (4a)^2 - (3b)^2 \\
 &= (4a + 3b)(4a - 3b).
 \end{aligned}$$

例2 把下列各式进行因式分解：

$$(1) \quad 25x^2 + 20x + 4; \quad (2) \quad 9m^2 - 6mn + n^2; \quad (3) \quad x^2 + x + \frac{1}{4}.$$

解 (1) $25x^2 + 20x + 4$

$$\begin{aligned}
 &= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2 \\
 &= (5x + 2)^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 9m^2 - 6mn + n^2 \\
 &= (3m)^2 - 2 \times 3m \cdot n + n^2 \\
 &= (3m - n)^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & x^2 + x + \frac{1}{4} \\
 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.
 \end{aligned}$$

可以把 $25x^2$ 写成 $(5x)^2$ ，
把4写成 2^2 ，而 $20x$ 恰能写成
 $2 \times 5x \times 2$ 的形式。



练习

1. 把下列各式进行因式分解：

$$(1) \quad x^2 - \frac{1}{9};$$

$$(2) \quad 4m^2 - n^2;$$

$$(3) \quad 25 - 4x^2y^2;$$

$$(4) \quad 49x^2 - 36y^2.$$

2. 把下列各式进行因式分解：

$$(1) \quad a^2 + 8a + 16;$$

$$(2) \quad m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{16};$$

$$(3) \quad 25m^2 + 30mn + 9n^2;$$

$$(4) \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2.$$

例3 把下列各式进行因式分解：

$$(1) \quad -2x^4 + 32x^2;$$

$$(2) \quad 3ax^2 - 6axy + 3ay^2.$$

解 (1) $-2x^4 + 32x^2$

$$= -2x^2(x^2 - 16)$$

$$= -2x^2(x+4)(x-4);$$

$$\begin{aligned}(2) \quad 3ax^2 - 6axy + 3ay^2 &= 3a(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= 3a(x-y)^2.\end{aligned}$$

把一个多项式进行因式分解的步骤是什么?

例4 把下列各式进行因式分解:

$$(1) (a-2b)^2 - (2a+b)^2;$$

$$(2) 50n - 20n(x-y) + 2n(x-y)^2.$$

解

$$(1) (a-2b)^2 - (2a+b)^2$$

$$= [(a-2b) + (2a+b)] [(a-2b) - (2a+b)]$$

$$= (3a-b)(-a-3b)$$

$$= -(3a-b)(a+3b);$$

$$(2) 50n - 20n(x-y) + 2n(x-y)^2$$

$$= 2n[25 - 10(x-y) + (x-y)^2]$$

$$= 2n[5 - (x-y)]^2$$

$$= 2n(5-x+y)^2.$$



智趣园

任何整数都能写成两个整数的平方差吗

我们知道

$$\begin{aligned}2\ 015 &= 2 \times 1\ 007 + 1 = 1\ 007^2 + 2 \times 1\ 007 + 1 - 1\ 007^2 \\ &= (1\ 007 + 1)^2 - 1\ 007^2 \\ &= 1\ 008^2 - 1\ 007^2.\end{aligned}$$

因此, 2 015 能写成两个整数的平方差.

是不是任意整数都能写成两个整数的平方差呢?

一般地, 任意奇数都可以写成两个整数 (并且是相邻的) 的平方差.

事实上, $2n+1 = n^2 + 2n+1 - n^2 = (n+1)^2 - n^2$ (n 是正整数).

任意偶数也能写成两个整数的平方差吗? 不妨看 2 012. 由于

$$2\ 012 = 4 \times 503 = 503^2 + 2 \times 503 + 1 - 503^2 + 2 \times 503 - 1 = (503+1)^2 - (503-1)^2,$$

因而, 2 012 能写成两个整数的平方差.

一般地,形如 $4n$ (n 为正整数)的偶数可以写成两个整数的平方差.

事实上, $4n = n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 = (n+1)^2 - (n-1)^2$.

但是,2 014由于不能被4整除,所以不能写成两个整数的平方差.如果不信,请你自己试一试.一般地,形如 $4n+2$ (n 为自然数)的偶数都不能写成两个整数的平方差.其道理将来学过“反证法”后,便会明白.



练习

1. 把下列各式进行因式分解:

(1) $x - xy^2$;

(2) $9x^3 - 18x^2 + 9x$;

(3) $4x^2 - \frac{1}{25}$;

(4) $4a - 4a^2 - 1$.

2. 把下列各式进行因式分解:

(1) $25a^2 - 4(b+c)^2$;

(2) $(x+y)^2 + 6(x+y) + 9$.



习题12.4



复习与巩固

1. 把下列各式进行因式分解:

(1) $a^2 - 9b^2$;

(2) $25x^2 - 36$;

(3) $1 + 6y + 9y^2$;

(4) $49x^2 + 28x + 4$;

(5) $a^2 - 8a + 16$;

(6) $81m^2 - 144mn + 64n^2$.

2. 把下列各式进行因式分解:

(1) $a^4 - b^4$;

(2) $m^3n^2 - m^5n^2$;

(3) $ax^2 - 4a^2x + 4a^3$;

(4) $-a^3 + 2a^2b - ab^2$.

3. 把下列各式进行因式分解:

(1) $4(x-2)^2 - 1$;

(2) $(a+1)^2 - (a-1)^2$;

(3) $(p+q)^2 + 4(p+q) + 4$.

4. 利用因式分解计算:

(1) $2\,015^2 - 2\,013^2$;

(2) $207^2 - 207 \times 14 + 49$.



拓展与延伸

5. 将 391 写成平均数是 20 的两个数的乘积.

6. 把下列各式进行因式分解:

$$(1) x(x-y) + y(y-x);$$

$$(2) a^5 - \frac{1}{49}a^3;$$

$$(3) m^2(m-1) - 4(1-m)^2;$$

$$(4) (a-b)^n - (a-b)^{n-2} \quad (n \text{ 是大于 } 2 \text{ 的整数}).$$



探索与创新

7. 两个正方形的周长之差为 8 厘米, 面积之差为 72 平方厘米. 求这两个正方形的边长.

8. 下列各式:

$$3^2 - 1, \quad 5^2 - 1, \quad 7^2 - 1, \quad 9^2 - 1$$

的结果都能被 8 整除吗? 由此你猜测到什么规律? 说明你的结论是正确的.



回顾与总结

1. 本章学习了哪些主要内容? 总结一下, 并与同学交流.

2. 本章中你学过哪些乘法公式?

3. 什么是因式分解? 能举例说明因式分解与多项式乘法的关系吗?

$$m(a+b+c) \xrightleftharpoons[\text{因式分解}]{\text{多项式乘法}} ma+mb+mc$$

$$(a+b)(a-b) \xrightleftharpoons[\text{因式分解}]{\text{多项式乘法}} a^2-b^2$$

$$(a \pm b)^2 \xrightleftharpoons[\text{因式分解}]{\text{多项式乘法}} a^2 \pm 2ab + b^2$$

从上面的图示中你悟出了什么?

4. 你学过哪些因式分解的方法? 怎样把一个多项式进行因式分解?

5. 怎样验证因式分解的正确性?



综合练习



复习与巩固

1. 填空:

$$(1) \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b\right) = \frac{4}{9}a^2 - \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) (3u + 2v)^2 = 9u^2 + \underline{\hspace{2cm}} + 4v^2;$$

$$(3) \text{ 如果 } a^2 + ma + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2, \text{ 那么 } m \text{ 的值是 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \text{ 多项式 } 12xy^2z^3 + 18x^2y^3z - 30x^3yz^2 \text{ 各项的公因式是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 计算:

$$(1) (3a + 2b) \cdot (3a - 2b);$$

$$(2) (-2y^2 + 5x) \cdot (-2y^2 - 5x);$$

$$(3) \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right);$$

$$(4) \left(-3a + \frac{2}{3}b\right)^2;$$

$$(5) (-2m - 3n)^2;$$

$$(6) (a - 3b - 3) \cdot (a - 3b + 3).$$

3. 选择题:

(1) 把多项式 $m^2(a-2) + m(a-2)$ 进行因式分解, 所得的结果是 ().

(A) $(a+2) \cdot (m^2+m)$

(B) $(a-2) \cdot (m^2-m)$

(C) $m(a-2) \cdot (m-1)$

(D) $m(a-2) \cdot (m+1)$

(2) 下列各式不能运用平方差公式进行因式分解的是 ().

(A) $-a^2 + b^2$

(B) $-x^2 - y^2$

(C) $49x^2 - z^2$

(D) $16m^2 - 25n^2$

(3) 下列各式能运用完全平方公式进行因式分解的是 ().

(A) $16x^2 - 4xy + y^2$

(B) $m^2 + mn + n^2$

(C) $9p^2 - 24pq + 16q^2$

(D) $u^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{4}$

4. 把下列各式进行因式分解:

$$(1) -4a^3b^2 + 6a^2b - 2ab;$$

$$(2) 6(x-y)^2 + 3(y-x)^3;$$

$$(3) 6(x-3)^2 - 24;$$

$$(4) 5p^2q + 10pqr + 5qr^2;$$

$$(5) x^2(a-b) + 4(b-a);$$

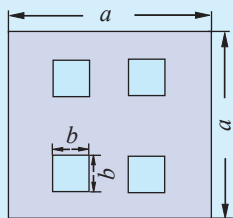
$$(6) (a+b)^2 + a + b + \frac{1}{4}.$$

5. 利用因式分解计算下列各题:

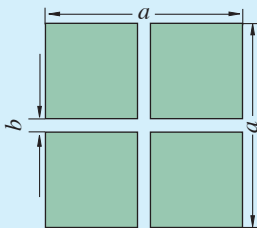
$$(1) 2.39 \times 91 + 156 \times 2.39 - 2.39 \times 47;$$

$$(2) 3^{2012} + 6 \times 3^{2013} + 3^{2014}.$$

6. 如图, 在边长为 a 厘米的正方形钢板上, 挖去4个边长均为 b 厘米的小正方形. 利用因式分解的知识, 计算当 $a = 9.82$ 厘米, $b = 2.41$ 厘米时剩余部分的面积.



(第6题)



(第7题)

7. 如图, 请你利用这个图形, 解释公式 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.



拓展与延伸

8. 已知 $(a + b)^2 = 7$, $(a - b)^2 = 3$, 求下列各式的值:

(1) ab ;

(2) $a^2 + b^2$.

9. 研究下列算式, 你发现有什么规律?

$$3^2 - 1^2 = 8 = 8 \times 1, \quad 5^2 - 3^2 = 16 = 8 \times 2,$$

$$7^2 - 5^2 = 24 = 8 \times 3, \quad 9^2 - 7^2 = 32 = 8 \times 4,$$

.....

请将你找出的规律用公式表示出来, 并说明它的正确性.



探索与创新

10. 利用因式分解计算下列各题:

(1) $(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{10^2})$;

(2) $(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$.

11. 小亮有两根长度都是 $4a$ 厘米的铁丝, 打算把其中一根折成正方形, 把另一根折成有一边长为 b 厘米的长方形. 请你帮助小亮算一算, 正方形的面积与长方形的面积哪一个较大? 为什么?
12. 同一价格的某种商品在三个商场都进行了两次价格调整, 甲商场第一次提价的百分率为 a ($a > 0$), 第二次提价的百分率为 b ($b > 0$); 乙商场两次提价的百分率都是 $\frac{a+b}{2}$; 丙商场第一次提价的百分率为 b , 第二次提价的百分率为 a . 两次提价后, 这种商品在哪个商场的售价最高? 为什么?

第13章 平面图形的认识

内容提要

- 三角形
- 多边形
- 圆

情境导航

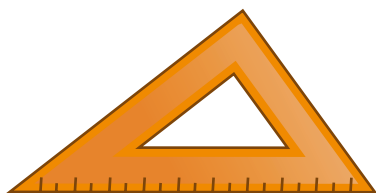
埃及金字塔是世界七大奇迹中唯一幸存的建筑，目前尚有 70 余座，其中最著名的胡夫金字塔，始建于公元前 2700 年左右，塔现高 136.5 米（原为 146.59 米），底部四边的每边现长为 227 米（原为 230.77 米），体积约 282.1 万立方米，它由 230 万块石块砌成，平均每块重 2.5 吨，在 1889 年巴黎埃菲尔铁塔建成以前，它一直是世界上最高的建筑物。

你能看出金字塔的各个侧面是什么形状吗？



13.1 三角形

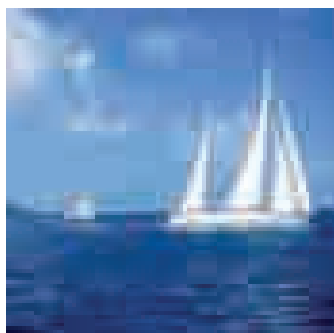
在日常生活中，我们经常看到三角形的形象，图 13-1 中教具、彩旗、船帆等就是三角形的. 你还能举出一些类似的实例吗？



教 具



彩 旗



帆 船

图 13-1

在上一学段，我们已经认识了三角形. 任意画出几个三角形，你能说出这些三角形是怎样画出来的吗？它们有什么共同特征？

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做**三角形** (triangle). 组成三角形的线段叫做三角形的**边** (side), 相邻两边的公共端点叫做三角形的**顶点** (vertex). 相邻两条边所组成的角，叫做三角形的**内角** (interior angle), 简称三角形的**角**.

在图 13-2 中，线段 AB , BC , CA 是这个三角形的三条边，点 A , B , C 是这个三角形的三个顶点， $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 是这个三角形的角，边 BC , CA , AB 分别叫做 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边.

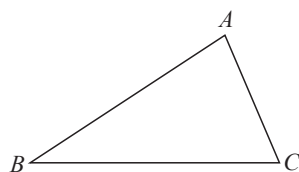


图 13-2

三角形用符号“ $\triangle$ ”来表示，顶点是 A , B , C 的三角形记作 $\triangle ABC$ ，读作“三角形 ABC ”.



实验与探究

(1) 用量角器度量图 13-3 中三个三角形的每个角的度数, 它们分别有几个锐角、几个直角、几个钝角?

(2) 你还记得三角形三个角的和是多少度吗?

(3) 三角形的一个角能大于 180° 吗? 能等于 180° 吗? 为什么?

(4) 观察图 13-3, 在三角形的三个角中, 你发现至少有几个角是锐角? 至多呢?

(5) 在三角形中, 如果有一个角是直角, 这个角是最大角吗? 为什么? 这时, 其他两个角的和是多少度?

(6) 在三角形中, 如果有一个角是钝角, 这个角是最大角吗? 为什么? 这时, 其他两个角的和的范围是什么?

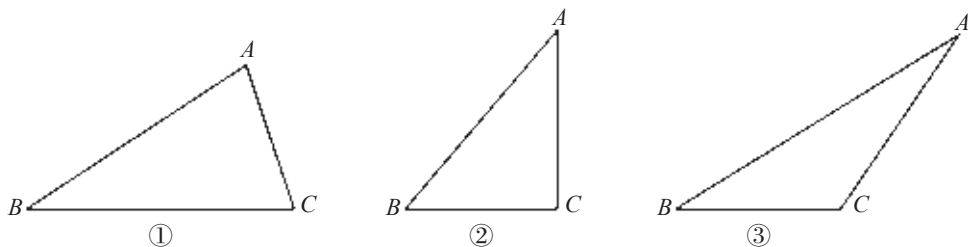


图 13-3

图 13-3 ① 中的三角形的三个角都是锐角, 图 ② 中的三角形有一个角是直角, 图 ③ 中的三角形有一个角是钝角.



三个角都是锐角的三角形叫做**锐角三角形** (acute triangle). 有一个角是直角的三角形叫做**直角三角形** (right triangle). 有一个角是钝角的三角形叫做**钝角三角形** (obtuse triangle).

由此, 三角形可按最大角的大小分类如下:

三角形 $\begin{cases} \text{锐角三角形} \\ \text{直角三角形} \\ \text{钝角三角形} \end{cases}$

直角三角形通常用符号“ $\text{Rt}\triangle$ ”表示，图 13-4 中的直角三角形记作 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，它的各边的名称如图所示。

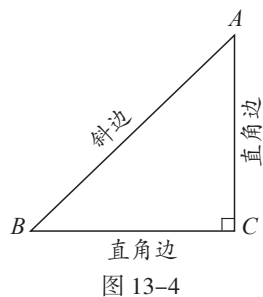


图 13-4

直角三角形的两个锐角互余.

(7) 比较图 13-5 中每个三角形三条边的长短，你有什么发现？与同学交流。

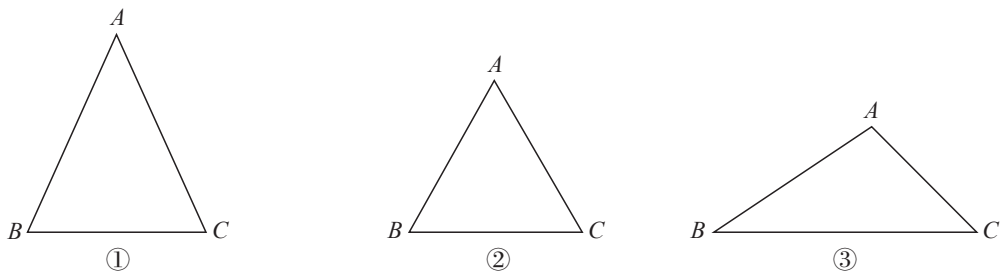


图 13-5

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形 (isosceles triangle)。如图 13-6，在等腰三角形 ABC 中， $AB = AC$ ，它的各边与各角的名称如图所示。

三边都相等的三角形叫做等边三角形 (equilateral triangle)，也叫做正三角形。

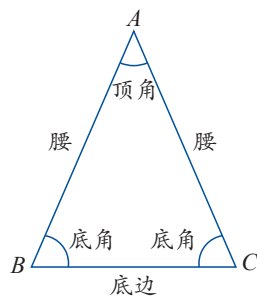


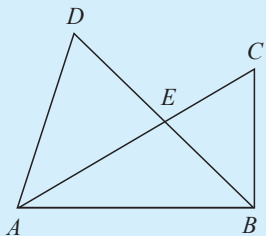
图 13-6

(8) 观察图 13-5 ① ②，你认为等边三角形与等腰三角形有什么关系？与同学交流。



练习

- 如图，线段 AC 与 BD 相交于点 E ，连接 AD ， AB ， BC 。
 - 指出图中有几个三角形，并分别用字母表示出来；
 - $\angle AED$ 是哪个三角形的角？ $\angle DBC$ 呢？
 - AE 是哪两个三角形的公共边？ AB 是哪几个三角形的公



(第 1 题)

共边？图中还有哪些三角形有公共边？

(4) $\angle D$ 是哪两个三角形的公共角？图中还有哪些三角形有公共角？

2. 在一个三角形中，如果有两个内角互余，这个三角形是什么三角形？为什么？

3. 在直角三角形中，哪条边最长？为什么？



观察与思考

任意画出一个三角形（图 13-2）.

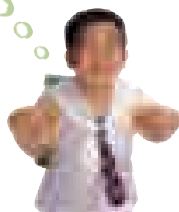
(1) 如果从 $\triangle ABC$ 任意一个顶点出发，沿三角形的边走到另外一个顶点，有几条不同的路线？哪条路线较长？说明理由.

(2) 你能用式子分别表示 (1) 中的结论吗？



$$\begin{aligned} AB + AC &> BC, \\ AC + BC &> AB, \\ AB + BC &> AC. \end{aligned}$$

两点之间线段最短.



(3) 通过上面的三个式子，你能归纳出什么结论？

三角形的任意两边之和大于第三边.

例1 分别用下列长度的三条线段能组成三角形吗？为什么？

(1) 4, 6, 10;

(2) 5, 6, 7.



加油站

如果三条线段中有两条线段的和小于或等于第三条线段，它们就不能组成三角形. 为了简便，只要检验两条较短线段长度的和是否大于第三条线段的长就可以判断这三条线段能否组成一个三角形.

解

(1) 因为 $4 + 6 = 10$,

所以，用这三条线段不能组成三角形；

(2) 长度分别为 5, 6 的线段是这三条线段中两条较短的线段，

因为 $5 + 6 > 7$,

所以, 用这三条线段能组成三角形.

例2 等腰三角形的周长为21厘米, 如果它的一边长为5厘米, 求其他两边的长.

解 因为长为5厘米的边可能是等腰三角形的腰, 也可能是它的底边, 所以应分两种情况进行讨论.

(1) 如果底边长为5厘米, 设腰长为 x 厘米, 由已知条件, 得

$$5 + 2x = 21,$$

解这个方程, 得 $x = 8$.

因为 $5 + 8 > 8$, 8厘米、8厘米、5厘米长的三条线段可以组成三角形.

(2) 如果腰长为5厘米, 设底边长为 x 厘米, 由已知条件, 得

$$2 \times 5 + x = 21,$$

解这个方程, 得 $x = 11$.

但 $5 + 5 < 11$, 所以用5厘米、5厘米、11厘米长的三条线段不能组成三角形.

由(1)(2)可知, 这个三角形其他两边的长都是8厘米.



练习

1. 分别用下列长度的三条线段能组成三角形吗? 为什么?

(1) 3, 4, 5; (2) 4, 4, 8; (3) 4, 9, 9;

(4) 5, 7, 11; (5) 2, 3, 6.

2. 用一根长为7厘米的铁丝围成一个三条边长均为整数厘米的三角形, 有几种不同的方案?



实验与探究

(1) 画一个三角形和它的一个角的平分线, 这条平分线与该角的对边相交吗?

三角形一个角的平分线与这个角的对边相交, 角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的**角平分线**.

如图 13-7, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的一点, 且 $\angle BAD = \angle DAC$, 那么线段 AD 就是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线.

(2) 一个三角形有几条角平分线? 在图 13-7 中, 画出 $\triangle ABC$ 所有的角平分线. 再任意画一个三角形, 并画出它所有的角平分线. 你有什么发现? 与同学交流.

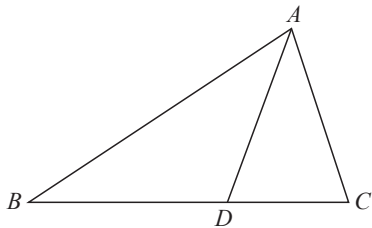


图 13-7



一个三角形有三条角平分线, 它们都在三角形的内部, 并且相交于一点.

(3) 画一个三角形, 任取它的一个顶点, 画出连接它与对边中点的线段.

在三角形中, 连接一个顶点与对边中点的线段叫做这个三角形的**中线** (median).

如图 13-8, 在 $\triangle ABC$ 中, $BE = EC$, 那么线段 AE 就是 $\triangle ABC$ 的一条中线.

(4) 一个三角形有几条中线? 在图 13-8 中, 画出 $\triangle ABC$ 所有的中线. 再任意画一个三角形, 并画出它所有的中线. 你有什么发现? 与同学交流.

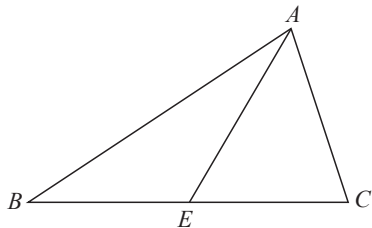


图 13-8

一个三角形有三条中线, 它们都在三角形的内部, 并且相交于一点 (图 13-9). 这个点叫做三角形的**重心** (barycenter).

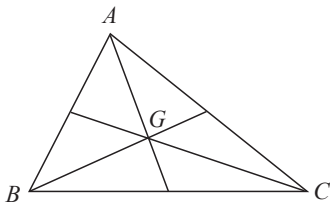


图 13-9



小资料

取一块质地均匀的三角形木板, 用一枚铁钉顶在这个三角形的重心上, 木板会保持平衡 (图 13-10). 这是重心的物理性质.

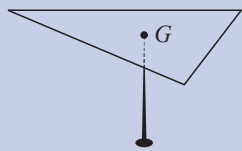


图 13-10

(5) 过去我们学习过三角形的面积公式 $S = \frac{1}{2}ah$, 你能说出什么是三角形的高吗? 画一个三角形, 你能画出它的一个顶点到对边所在直线的垂线段吗?

三角形的一个顶点到它的对边所在直线的垂线段叫做这个三角形的高 (height).

三角形面积公式中的“高”, 实际上是指高的长度, 即一个顶点到对边所在直线的距离.



如图 13-11, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, D 是垂足, 那么线段 AD 就是 $\triangle ABC$ 的一条高.

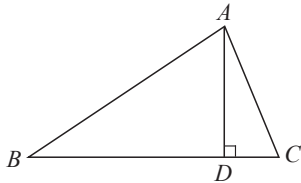
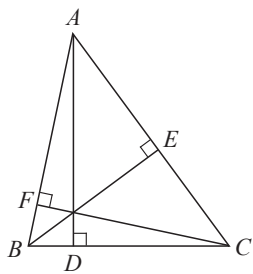


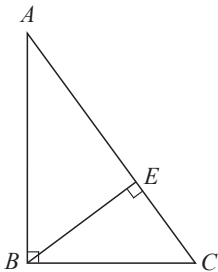
图 13-11

(6) 一个三角形有几条高? 分别画出锐角三角形、直角三角形和钝角三角形, 并画出它们所有的高. 你有什么发现? 与同学交流.

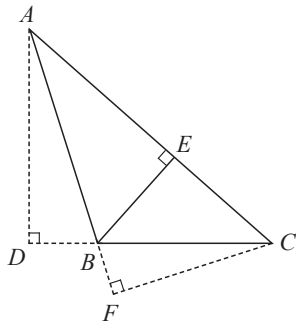
每一个三角形都有三条高. 由于三角形形状不同, 三角形的高可能在三角形的内部 (图 13-12 ①), 可能与边重合 (图 13-12 ②), 也可能在三角形外部 (图 13-12 ③).



①



②



③

图 13-12



挑战自我

如图 13-13 所示, 七年级一、二班的同学在植树节前要绿化一块三角形空地. 你能帮助他们把这块地划分成面积相等且都是三角形形状的两块地吗? 你有几种划分方法?

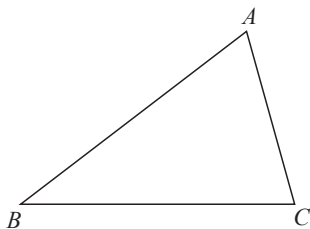


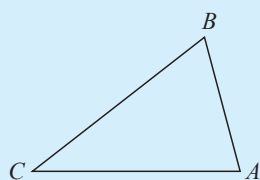
图 13-13



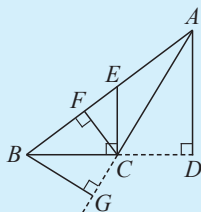
练习

1. 如图, 已知 $\triangle ABC$.

- (1) 分别画出 $\triangle ABC$ 的中线 AD 和角平分线 AE ;
- (2) 观察(1)中画出的图形, 你能找出图中有哪些等量关系?



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 垂足为点 D , $EC \perp BC$ 交 AB 于点 E , $CF \perp AB$, 垂足为点 F , $BG \perp AC$, 垂足为点 G .

- (1) 分别写出 $\triangle ABC$ 各条边上的高;
- (2) CF 是哪几个三角形的高?

如图 13-14, AC 是 $\triangle ABC$ 的一条边, 反向延长 $\triangle ABC$ 的另一条边 CB , 得到射线 CE , 请你指出边 CA 与 CE 所组成的角. 它与 $\triangle ABC$ 的内角有什么不同?

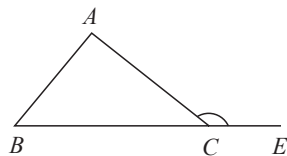


图 13-14

三角形一个角的一边与另一边的反向延长线所组成的角, 叫做三角形的外角 (exterior angle).



交流与发现

如图 13-15, 延长 $\triangle ABC$ 的三边, 分别得直线 DE , FG , MN .

思考下列问题:

- (1) $\angle BCG$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角吗? $\angle ECG$ 呢? 为什么?

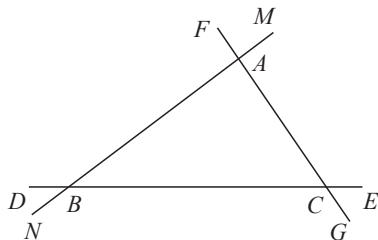


图 13-15

(2) 写出 $\triangle ABC$ 的所有外角, 并指出它们之间哪些角是相等的;

(3) 三角形的一个外角(例如 $\angle ACE$)跟与它相邻的内角有什么数量关系?

(4) 三角形的一个外角(例如 $\angle ACE$)跟与它不相邻的两个内角的和有什么数量关系? 为什么?

在图13-15中, 因为 $\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$,
所以 $\angle ACE = \angle BAC + \angle ABC$.



三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

(5) 比较三角形的一个外角(例如 $\angle ACE$)跟与它不相邻的任何一个内角, 哪个大? 能说明你的理由吗?



在图13-15中, 因为 $\angle ACE = \angle BAC + \angle ABC$, 所以 $\angle ACE > \angle BAC$, $\angle ACE > \angle ABC$.

由此可知, 三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角.

例3 如图13-16, 已知 $\angle ACD = 150^\circ$, $\angle A = 2\angle B$, 求 $\angle B$ 的度数.

解 因为 $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角, 所以 $\angle ACD = \angle A + \angle B$.

又因为 $\angle A = 2\angle B$,

于是 $\angle ACD = 2\angle B + \angle B = 3\angle B$.

由 $\angle ACD = 150^\circ$, 得 $3\angle B = 150^\circ$,

所以 $\angle B = 50^\circ$.

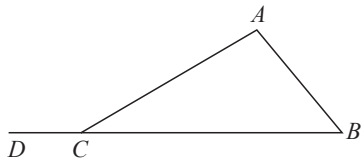


图 13-16

例4 如图13-17, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, $\angle ABD = \angle A$, $\angle C = 3\angle A$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的各内角的度数;

(2) 求 $\angle ADB$ 的度数.

解

(1) 因为 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 所以 $\angle ABC = 2\angle ABD$. 因为 $\angle ABD = \angle A$, 所以 $\angle ABC = 2\angle A$.

在 $\triangle ABC$ 中,

因为 $\angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$,

所以 $\angle A + 2\angle A + 3\angle A = 180^\circ$,

即 $6\angle A = 180^\circ$.

从而 $\angle A = 30^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

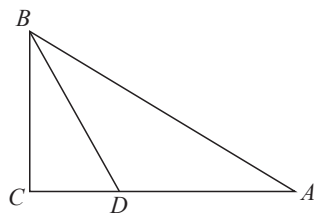


图 13-17

(2) 因为 $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$, 且 $\angle ADB$ 是 $\triangle DCB$ 的外角,

所以 $\angle ADB = \angle C + \angle DBC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.



挑战自我

将一副三角尺按图 13-18 的方式放置, 如果不计三角尺的厚度, 求它们的两条斜边所成的钝角 α 的度数.

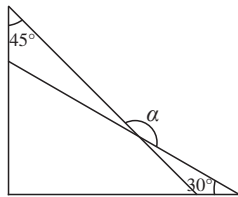


图 13-18

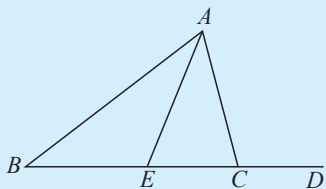


练习

- (1) 如果三角形的一个外角等于与它相邻的内角, 这个三角形是什么三角形?

(2) 如果三角形的一个外角小于与它相邻的内角, 这个三角形是什么三角形? 为什么?

(3) 如果三角形的一个外角大于与它相邻的内角, 能判定这个三角形的形状吗? 为什么?
- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 40^\circ$, AE 是 $\angle BAC$ 的平分线, $\angle ACD = 106^\circ$. 求 $\angle AEC$ 的度数.



(第2题)

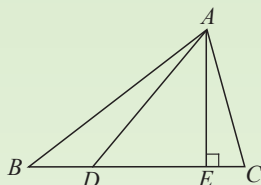


习题13.1



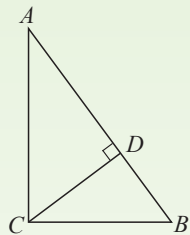
复习与巩固

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AE \perp BC$, 点 E 是垂足, 点 D 是边 BC 上的一点, 连接 AD .



(第1题)

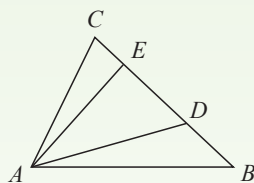
- (1) 写出 $\triangle ABE$ 的三个内角;
 - (2) 在 $\triangle ABD$ 中, $\angle B$ 的对边是_____ ; 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 的对边是_____ ;
 - (3) 图中共有_____个三角形, 把它们分别写出来. 这些三角形中, 哪些是直角三角形? 哪些是锐角三角形? 哪些是钝角三角形?
 - (4) 线段 AD 是哪几个三角形的公共边?
 - (5) $\angle ADC$ 是哪几个三角形的公共角? $\angle AED$ 呢?
2. 有5根细木棒, 长度分别是2厘米、4厘米、6厘米、8厘米和10厘米. 从中任意取出3根, 能组成多少个不同的三角形?
3. 已知等腰三角形的周长是10, 且各边长都为整数, 求各边的长.
4. AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $AB = 10$, $AC = 7$, $\triangle ABD$ 的周长比 $\triangle ACD$ 的周长大多少?
5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是 AB 边上的高. 写出图中的直角三角形, 并指出图中相等的锐角.



(第5题)

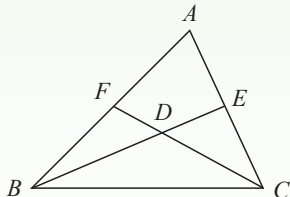
6. 观察右图, 填空:

- (1) $\angle ADE = \angle B + \angle$ _____,
 $\angle ADB = \angle C + \angle$ _____ = $\angle AED + \angle$ _____;
- (2) 用“ $>$ ”或“ $<$ ”填空:
 $\angle AEC$ _____ $\angle ADE$; $\angle AEC$ _____ $\angle B$.

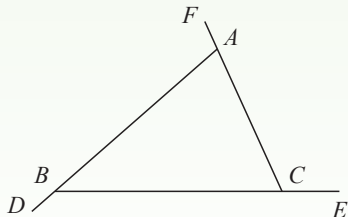


(第6题)

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$, $\angle C$ 的角平分线 BE , CF 交于点 D , $\angle A = 70^\circ$. 求 $\angle BDC$ 的度数.



(第7题)



(第8题)

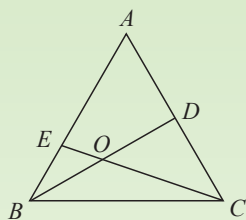
8. 如图, $\angle BAF$, $\angle CBD$ 与 $\angle ACE$ 是 $\triangle ABC$ 的三个外角. 你能求出这三个外角度数之和吗? 说明你的理由.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A - \angle B = 60^\circ$, $\angle B - \angle C = 15^\circ$. 求 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的度数.

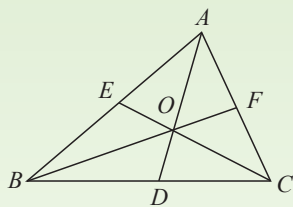


拓展与延伸

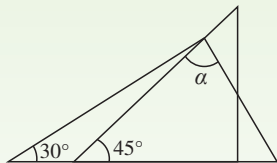
10. 图中具有一条公共边的三角形有多少对?
11. 已知等腰三角形一腰上的中线将它的周长分为9和12两部分, 求原等腰三角形的腰长和底边长.
12. 如图, $\triangle ABC$ 的三条中线相交于一点 O , 图中哪些三角形面积分别相等? 为什么?
13. 一个三角形两个外角的和是与它们都不相邻的内角的3倍, 求这个内角的度数.
14. 把一副三角尺如图所示放置, 如果不计三角尺的厚度, 图中 $\angle \alpha$ 的度数是多少?



(第10题)



(第12题)

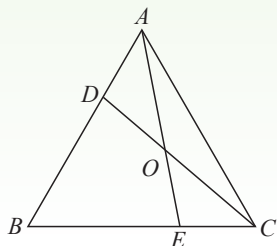


(第14题)



探索与创新

15. 现有长为150厘米的铁丝, 把它截成 n 段($n > 2$), 使其中任意3段均不能作为同一个三角形的边. 请你对于 $n = 3$, 4, 5的情形, 各给出一种满足条件的截法.
16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D , E 分别是 AB , BC 边上的一点, $BD = 2AD$, $BE = 2CE$. AE , CD 相交于点 O . $\triangle ADO$ 的面积与 $\triangle CEO$ 的面积是否相等? 为什么?



(第16题)

13.2 多边形



观察与思考

观察图13-19, 你能说出这些图形有什么共同特征吗?

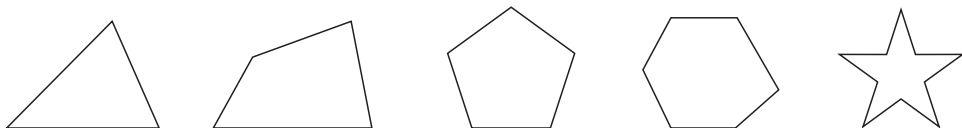


图13-19

平面内，若干条线段首尾顺次相接，且有公共端点的线段不在同一条直线上，这样得到的图形叫做**多边形** (polygon). 组成多边形的各条线段叫做多边形的**边**，它们的公共端点叫做多边形的**顶点**，相邻两条边所组成的角叫做多边形的**内角**，简称多边形的角.

一个多边形有四条边，叫做**四边形** (quadrilateral)；有五条边，叫做**五边形** (pentagon)；一般地，有 n 条边，叫做 **n 边形** (n 是大于2的整数).

观察图 13-19，思考下面的问题：

(1) 把图中四边形、五边形和六边形的顶点分别用字母表示出来，然后分别读出这些多边形，说出这些多边形的每条边和每个角；

(2) 对于一个 n 边形来说，它的边数、顶点个数和角的个数分别是多少？

(3) 分别连接图 13-19 中四边形、五边形、六边形不相邻的任意两个顶点，得到哪些线段？

三边形习惯上叫做三角形，它是边数最少的多边形.



连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的**对角线** (diagonal).

(4) 数一数，四边形一共有几条对角线？五边形呢？六边形呢？

分别度量图 13-20 中每个多边形的边和角，你发现它们具有什么特点？

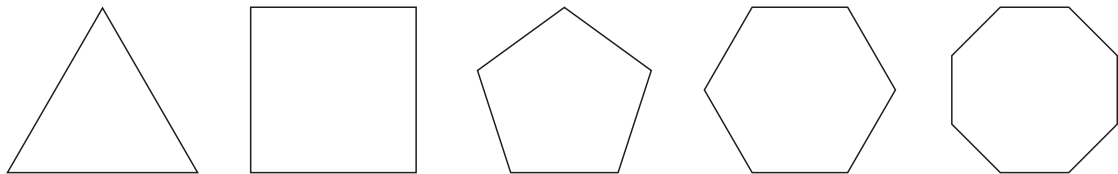


图 13-20

各边相等，各角也相等的多边形叫做**正多边形** (regular polygon).

图 13-20 中的各个多边形分别叫做正三角形 (等边三角形)、正方形 (正四边形)、正五边形、正六边形和正八边形.



挑战自我

你能用若干个（个数不限）同样大小的含 45° 的三角尺拼成四边形吗？这些四边形内角度数有几种不同情况？试一试.

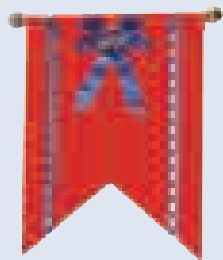


智趣园

多边形有两类：一类是凸多边形，它的每个内角都小于 180° ，例如我们认识的三角形、平行四边形、梯形、正多边形都是凸多边形；另一类是凹多边形^❶，它的内角中至少有一个大于 180° .

如图 13-21 是一面锦旗的图片，它是一个凹五边形. 你能找出它的哪个内角大于 180° 吗？图 13-19 中的五角星形是凹多边形吗？

你能分别画出一个凹四边形和凹六边形吗？试试看.



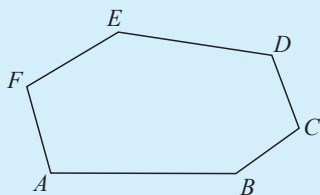
锦旗

图 13-21

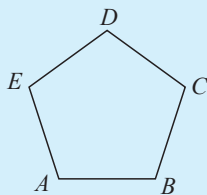


练习

1. 举出生活中多边形的实例.
2. 图中的多边形是几边形？说出它的边、顶点与内角.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，画出正五边形 $ABCDE$ 的所有对角线.



实验与探究

- (1) 一个正方形的内角和是多少度？一个长方形呢？
- (2) 在纸上任意画出一个四边形 $ABCD$. 将四边形的四个内角剪下来（图

❶ 在本书中主要研究凸多边形. 如果没有特别说明，今后所说的多边形都是指凸多边形.

13-22), 并将剪下来的各个内角按图 13-23 所示的方式拼在一起, 你有什么发现?

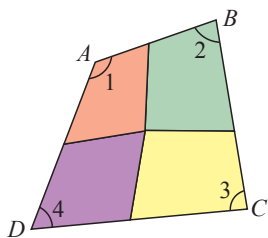


图 13-22

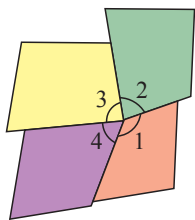
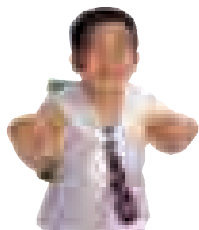


图 13-23



在图 13-23 中 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ 有公共的顶点, 相邻的角有一条公共边, 它们恰好拼成了一个周角, 所以四边形 $ABCD$ 的内角和是 360° .

(3) 除了利用上面的实验方法外, 利用三角形的内角和的性质, 能说明四边形的内角和是 360° 吗?

如图 13-24, 在一个任意的四边形 $ABCD$ 内任取一点 O , 连接 AO , BO , CO , DO , 得到 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ 和 $\triangle ODA$.

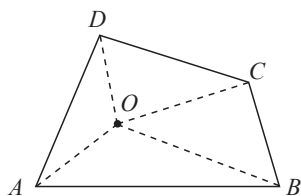


图 13-24

这四个三角形所有内角之和为 $4 \times 180^\circ$, 比四边形 $ABCD$ 的内角和多出了以 O 为顶点的四个角之和, 即 360° .

从而, 可以得出任意四边形的内角和等于 $4 \times 180^\circ - 360^\circ = 360^\circ$.

(4) 用上面的方法, 你能求出任意五边形的内角和吗 (图 13-25)?

(5) 如果 O 是 n 边形 $A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n$ 内的一点, 连接 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_{n-1}, OA_n$, 你能利用 $\triangle OA_1A_2, \triangle OA_2A_3, \cdots, \triangle OA_{n-1}A_n, \triangle OA_nA_1$ 的所有内角的度数之和, 推导出 n 边形 $A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n$ 的内角和吗? 与同学交流.



小资料

为了解决问题的需要, 在原来图形上添画的线叫做**辅助线**. 辅助线通常画成虚线.

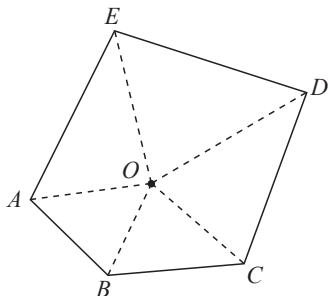


图 13-25

n 边形的内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$.



观察与思考

你还记得什么是三角形的外角吗？三角形外角的意义可以推广到多边形上.

多边形一个角的一边与另一边的反向延长线所组成的角，叫做多边形的外角.

任意画出一个四边形 $ABCD$. 思考下面的问题:

- (1) 从四边形 $ABCD$ 的任意一个顶点 (例如顶点 C) 处, 画四边形的外角. 你能画出几个? 它们具有什么位置关系和数量关系 (图 13-26)?
- (2) 四边形 $ABCD$ 共有多少个外角?
- (3) 四边形 $ABCD$ 的一个外角跟与它相邻的内角有什么数量关系?

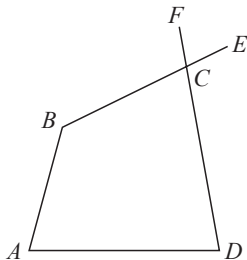


图 13-26

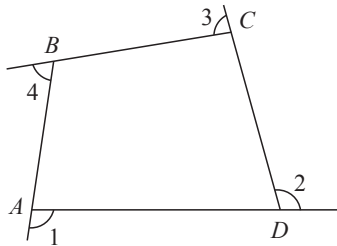


图 13-27

- (4) 如图 13-27, 在四边形 $ABCD$ 的每个顶点处分别画出它的一个外角, 这些外角的和是多少? 你是怎样得到这个结果的? 五边形呢? 六边形呢?

四边形 $ABCD$ 的每个外角都与相邻的内角组成一个平角. 四边形有 4 个内角, 组成的四个平角的和是 $4 \times 180^\circ$. 再减去四边形的内角和 360° , 因此这 4 个外角的和为 360° .



一般地, 在多边形的每个顶点处分别取多边形的一个外角, 这些外角的和叫做多边形的外角和. 如图 13-27 所示, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ 的和就是四边形

$ABCD$ 的外角和. 四边形的外角和等于 360° .

(5) n 边形的外角和是多少? 说明你的理由.

n 边形的每一个内角跟与它相邻的一个外角都组成一个平角, n 边形有 n 个内角, 所以, 这些平角的和为 $n \cdot 180^\circ$, 其中所有内角的和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 因此 n 边形的外角和为

$$\begin{aligned} & n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ \\ &= n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 2 \times 180^\circ \\ &= 360^\circ. \end{aligned}$$

真奇妙! 多边形的外角和竟然与边数无关.



多边形的外角和等于 360° .



挑战自我

任意多边形的内角中, 最多有几个锐角? 说明理由.



练习

1. 分别计算九边形、十二边形、二十边形的内角和.
2. 求正八边形的每个内角与每个外角的度数.



习题13.2



复习与巩固

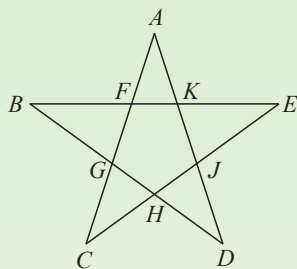
1. 把 n 边形内的任意一点与各顶点相连接, 这些线段把 n 边形分成多少个三角形? 把 n 边形一边上的任意一点 (不是顶点) 与其他边上的各顶点相连接, 这些线段把 n 边形分成多少个三角形?
2. 如果一个多边形从一个顶点出发的对角线把这个多边形分成6个三角形, 这个多边形是几边形?
3. 下面的说法正确吗? 如果不正确, 你能用一个例子作出说明吗?
(1) 如果一个多边形的各边都相等, 那么它是正多边形;

- (2) 如果一个多边形的所有内角都相等, 那么它是正多边形.
4. 正三角形、正方形、正五边形、正六边形的一个内角各是多少度?
5. 一个多边形的内角和为 2700° , 求它的边数.
6. 一个多边形的内角和与外角和相等, 这个多边形是几边形?



拓展与延伸

7. 如图, 五角星中含有几个五边形? 几个四边形? 几个三角形? 把它们分别表示出来.
8. 能不能找出一个多边形, 使它的每一个内角都是与它相邻外角的3倍?

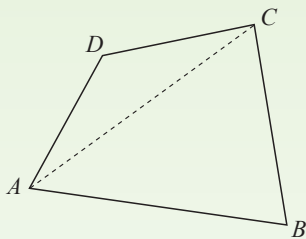


(第7题)

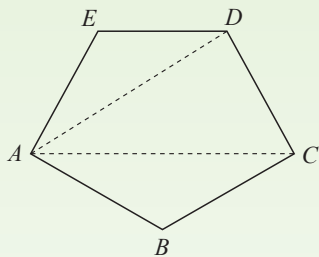


探索与创新

9. (1) 四边形 $ABCD$ 中, 从顶点 A 引对角线 AC , 将四边形分为几个三角形? 这几个三角形所有内角之和与四边形内角之和有什么关系?



(第9(1)题)



(第9(2)题)

- (2) 五边形 $ABCDE$ 中, 过顶点 A 最多能引几条对角线? 它们将五边形分为几个三角形? 这几个三角形所有内角之和与五边形内角之和有什么关系?
- (3) 过 n 边形的任意一个顶点最多可引几条对角线? 它们将 n 边形分为几个三角形? 这几个三角形所有内角之和与 n 边形内角之和有什么关系? 由此你能得出 n 边形内角之和的公式吗? 试一试.
10. 四边形的边比三角形的边多了一条, 内角和多了多少度? 五边形的边比四边形的边多了一条, 内角和多了多少度? 由此可以推测, 多边形的边每多一条, 内角和多了多少度? 说明你的理由.

13.3 圆



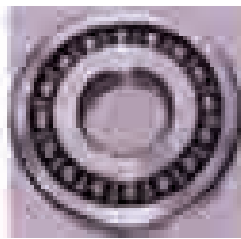
观察与思考



圆 桌



车 轮



轴 承

图 13-28

(1) 在图 13-28 中有许多圆的形象, 你还能举出圆的几个实例吗?

(2) 你能说明用圆规画圆的道理吗? 除了可以用圆规画圆之外, 你还有其他画圆的方法吗? 用你知道的方法画圆, 体会圆是怎样画出来的.

如图 13-29, 在平面内线段 OA 绕固定的端点 O 旋转一周, 另一个端点 A 所描出的封闭曲线叫做圆 (circle). 点 O 叫做圆的圆心 (center of a circle), 连接圆心和圆上任意一点的线段叫做半径 (radius). 以点 O 为圆心的圆记作 $\odot O$, 读作“圆 O ”; 线段 OA 是 $\odot O$ 的一条半径.

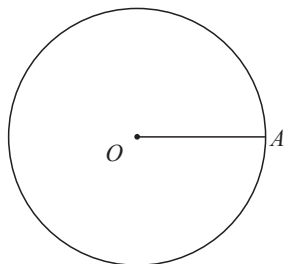


图 13-29

(3) 一个圆有多少条半径? 对于同一个圆来说, 这些半径的长相等吗? 为什么? 与同学交流.



实验与探究

画一个半径为 5 厘米的 $\odot O$, 在 $\odot O$ 上任意取 A, B 两点, 连接 OA, OB .

(1) OA 与 OB 的长分别是多少?

(2) 如果 $OC = 5$ 厘米, 你能说出点 C 的位置吗?

(3) 如果 M, N 是平面内的两点, 且 $OM = 7$ 厘米, $ON = 3$ 厘米, 你能分

别说出点 M , N 与圆的位置关系吗?

(4) 观察图13-30, 平面内的点与圆有几种位置关系?

在平面内, 点与圆的位置关系有三种: 点在圆外、点在圆上、点在圆内.

例如图13-30中, 点 A 在圆外, 点 B 在圆上, 点 C 在圆内.

点在圆外, 即这个点到圆心的距离大于半径;
 点在圆上, 即这个点到圆心的距离等于半径;
 点在圆内, 即这个点到圆心的距离小于半径.

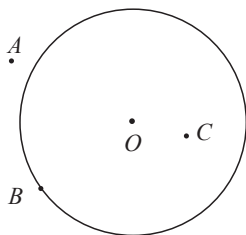


图 13-30

圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合.

(5) 你能用集合语言描述圆的内部和外部吗?

① 圆的内部是_____点的集合;

② 圆的外部是_____点的集合.

(6) 在 $\odot O$ 上任取两点, 用线段连接它们, 所得到的线段叫做**弦** (chord). 再画出一条经过圆心 O 的弦, 它与 $\odot O$ 的半径有什么关系?

经过圆心的弦叫做**直径** (diameter).

例如图 13-31, C, D 是 $\odot O$ 上的两点, 线段 CD 是 $\odot O$ 的弦; 弦 AB 过圆心 O , 它是 $\odot O$ 的一条直径. 由于 OA, OB 是 $\odot O$ 的两条半径, O 是 AB 的中点, 因此在同一个圆中, 直径等于半径的 2 倍. 一个圆有无数条直径.

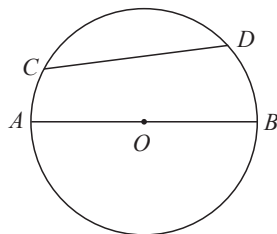


图 13-31

圆上任意两点间的部分叫做**圆弧**, 简称**弧** (arc), 用符号 “ $\frown$ ” 表示. 以 C, D 两点为端点的圆弧记作 $\widehat{CD}$, 读作 “弧 CD ”. 由于以 C, D 为端点的弧有两条, 为了加以区别, 有时也用三个字母表示弧. 例如, 在图 13-31 中, $\widehat{ACD}$ 与 $\widehat{ADB}$ 分别表示两条不同的弧.

圆的一条直径的两个端点把圆分成两条弧, 每一条弧都叫做**半圆** (semicircle). 大于半圆的弧叫做**优弧**, 小于半圆的弧叫做**劣弧**. 一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做**扇形** (sector). 例如, 图 13-32 中的 $\widehat{CBD}$ 是优弧, 弧 $\widehat{CAD}$ 是劣弧, 扇形 $OCBD$ 和扇形 $OCAD$ 分别是由半径 OC, OD 与 $\widehat{CBD}$ 和半径 OC, OD 与 $\widehat{CAD}$ 组成的扇形.

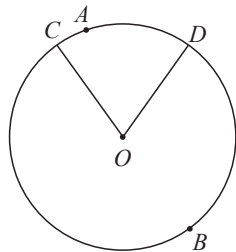


图 13-32



练习

- 已知 $\odot O$ 的半径为 8 厘米, A 为平面内的一点. 当 OA 符合下列条件时, 分别指出点 A 与 $\odot O$ 的位置关系:
 - $OA = 7.9$ 厘米;
 - $OA = 8$ 厘米;
 - $OA = 8.01$ 厘米.
- 圆的一条弦所对的弧有几条?
 - 在图 13-31 中有几条弧? 哪些是优弧? 哪些是劣弧?



交流与发现

观察图 13-33 的两幅图片.



① 硬 币

② 环形靶

图 13-33

(1) 图 ① 中, 同一币值的两枚硬币的边缘都是圆. 把其中的一枚硬币放到另一枚硬币上, 这两个圆能重合吗?

(2) 图 ② 是一个练习射击用的环形靶, 它是由若干个圆组成的. 这些圆的圆心和半径有什么特点? 与同学交流.

能够重合的圆叫做**等圆**. 如图 13-34, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 是等圆. 圆心相同、半径不等的圆叫做**同心圆**. 如图 13-35, $r_1 > r_2$, 半径分别是 r_1 和 r_2 的两个圆都以点 O 为圆心, 它们是同心圆.

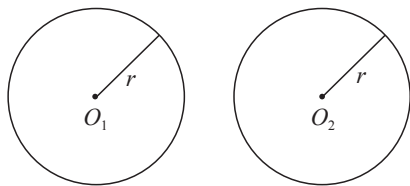


图 13-34

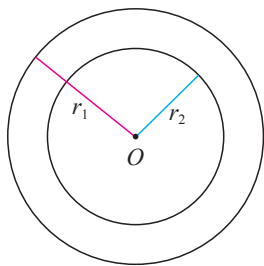


图 13-35

(3) 用圆规分别画出两个等圆和两个同心圆. 画等圆和画同心圆有什么不同?

等圆的半径相等, 只是圆心的位置不同.

(4) 你见过国际奥委会的会徽吗(图 13-36)? 会徽上的五个圆是等圆吗? 你还能举出生活中等圆的实例吗?

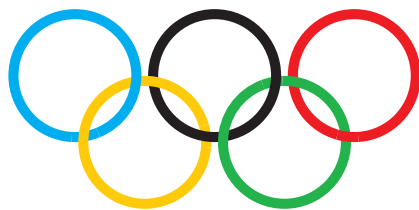


图 13-36 奥运五环会徽

例1 两个同心圆之间的部分叫做圆环. 如果圆环中大圆的半径为 r , 小圆的半径为 $\frac{r}{2}$, 求圆环的面积.

解 圆环的面积等于大圆面积与小圆面积的差, 所求圆环的面积为

$$\pi r^2 - \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \pi r^2.$$

例2 (1) 用长度分别为 1 米和 2 米的两根绳子围成两个同心圆, 这两个圆半径之差是多少?

(2) 把地球的赤道近似地看做一个圆. 如果环绕地球赤道有一个圆, 它的周长比赤道的周长多 1 米, 这两个同心圆半径之差是多少? 想想看, 两圆之间能伸进你的拳头吗?

解 (1) 1 米长的绳子围成的圆的半径为 $\frac{1}{2\pi}$ 米, 2 米长的绳子围成的圆的半径为 $\frac{2}{2\pi}$ 米. 所以, 两个同心圆的半径之差为

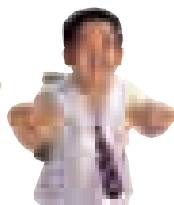
$$\frac{2}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.159 \text{ (米)}.$$

(2) 设地球的半径为 r , 因为赤道与环绕赤道的圆是两个同心圆, 所以这两个圆半径之差为

$$\frac{2\pi r + 1}{2\pi} - r = \left(r + \frac{1}{2\pi}\right) - r = \frac{1}{2\pi} \approx 0.159 \text{ (米)}.$$

一个成年人的拳头高约 8 厘米, 所以两圆之间能伸进一个人的拳头.

太奇妙了, (1)(2) 两题的答案竟然都是 0.159 米.





挑战自我

(1) 如图 13-37, 将一枚半径为 r 的硬币沿一条直线从点 M 出发, 滚动一周, 到达点 N . 线段 MN 的长是多少? 硬币的圆心走过的路程是多少?

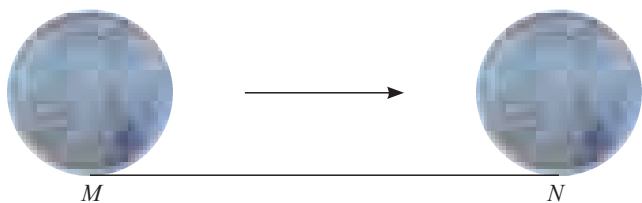


图 13-37

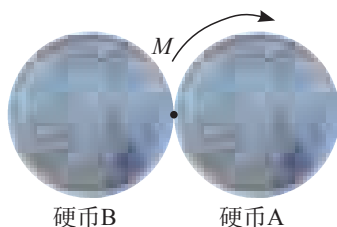


图 13-38

(2) 如图 13-38, 取两枚半径都为 r 的硬币 A, B, 平放到桌面上, 将硬币 A 固定, 硬币 B 从硬币 A 的边缘上的一点 M 出发, 沿硬币 A 的边缘滚动一周, 回到原来的位置. 硬币 B 的圆心走过的路程是多少? 在滚动时硬币 B 转了几周?



练习

1. 你能用图形表示“平面内到点 A 的距离大于 2 厘米而小于 3 厘米的点的集合”吗?
2. 如果 $\odot A$ 的周长是 $\odot B$ 的周长的 4 倍, 那么 $\odot A$ 的面积是 $\odot B$ 的面积几倍?



习题13.3



复习与巩固

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$ 厘米, $BC = 4$ 厘米, $CA = 5$ 厘米.
 - (1) 以点 A 为圆心, 以 3 厘米长为半径画圆, 确定点 B , C 与 $\odot A$ 的位置关系;
 - (2) 以点 A 为圆心, 以 4 厘米长为半径画圆, 确定点 B , C 与 $\odot A$ 的位置关系;
 - (3) 以点 B 为圆心, 以 4 厘米长为半径画圆, 确定点 A , C 与 $\odot B$ 的位置关系.
2. 早在 2 000 多年前的战国时期,《墨经》一书中就给出了圆的描述性定义:“圆(这里读 yuán), 一中同长也.”这就是说, 圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合. 其中, 定点是_____, 定长是_____.

3. A, B 两点的距离为 4 厘米. 用图形表示具有下列性质的点的集合, 并指出它们是怎样的图形:

- (1) 到点 A 的距离等于 3 厘米的点的集合;
- (2) 到点 B 的距离等于 3 厘米的点的集合;
- (3) 到 A, B 两点的距离都等于 3 厘米的点的集合;
- (4) 到 A, B 两点的距离都不大于 3 厘米的点的集合.

4. 以一个定点为圆心, 可以画_____个圆, 它们是_____; 以一条已知线段为半径画圆, 可以画_____个圆, 它们是_____; 以一个定点为圆心, 以一条已知线段为半径, 可以画_____个圆.

5. (1) 已知圆的周长为 4π , 求它的面积;

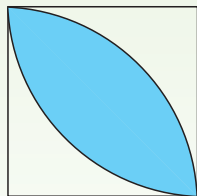
(2) 已知圆的周长为 c , 求它的面积.

6. 在半径为 R 的圆形工件中截去一个圆孔, 剩余面积是圆孔面积的 3 倍, 求圆孔的半径.



拓展与延伸

7. 如图, 正方形的边长为 2, 分别以正方形的两个相对顶点为圆心, 以正方形的一边为半径画弧. 求蓝色图形的面积.



(第 7 题)

8. 小亮家距学校 10 千米, 小莹家距小亮家 3 千米.

(1) 如果小亮家、小莹家、学校在同一条直线上, 那么小莹家距学校多少千米?

(2) 如果小亮家、小莹家、学校在同一平面内, 那么小莹家与学校的距离在什么范围内? 你能画一个图形表示出来吗?



探索与创新

9. 在同一个圆中, 画出一条直径与任意一条不过圆心的弦, 比较它们的长短, 你会得到什么结论? 请说明理由.



回顾与总结

1. 本章学习的主要内容是什么? 总结一下, 与同学交流.

2. 你会对三角形进行分类吗? 分类的依据是什么?

3. 三角形的三边之间具有怎样的数量关系? 如果 a, b, c 是三条线段, 且 $a+b>c$, 它们能组成三角形吗?

4. 三角形中有哪些主要线段? 本章中你学过这些主要线段的哪些性质? 这些主要线段有

哪些相同点和不同点？

5. 三角形的内角和是多少度？怎样用它推导出多边形的内角和公式？
6. 什么是三角形的外角？三角形的外角有哪些性质？
7. 多边形的外角和与它的边数有没有关系？多边形的外角和公式是怎样得出的？
8. 什么是正多边形？正 n 边形的每一个内角是多少度？
9. 圆是一种怎样的几何图形？如何确定平面内的一个点与圆的位置关系？什么叫做弧、弦、等圆？等圆与同心圆有什么不同？



综合练习



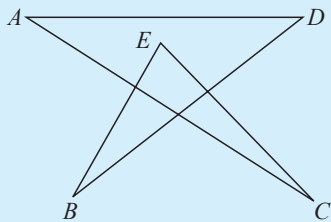
复习与巩固

1. 选择题：

- (1) 在三角形的三个外角中，钝角的个数最多是 ().
 (A) 0个 (B) 1个 (C) 2个 (D) 3个
- (2) 一个多边形的内角和不可能是 ().
 (A) 1800° (B) 1260° (C) 1080° (D) 5100°

2. 填空题：

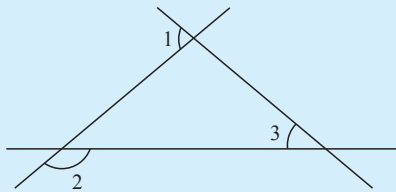
- (1) 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle A + \angle B = 2\angle C$ ，那么 $\angle C$ 的度数是 _____；
- (2) 如图， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的度数是 _____.



(第2(2)题)

3. 下面的说法中哪些是正确的？

- (1) 三角形中最小的锐角不能大于 60° ；
 - (2) 三角形的一个外角等于这个三角形的两个内角的和；
 - (3) 三角形任意两个内角的和大于第三个内角；
 - (4) 直角三角形只有一条高；
 - (5) 在同圆中任意两条直径都互相平分；
 - (6) 三角形一边上的高小于这个三角形的其他两边.
4. 已知等腰三角形两边的长分别是7厘米和8厘米，求它的周长.

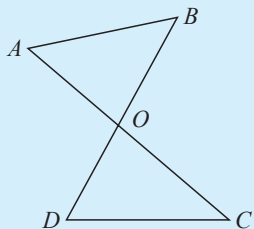


(第5题)

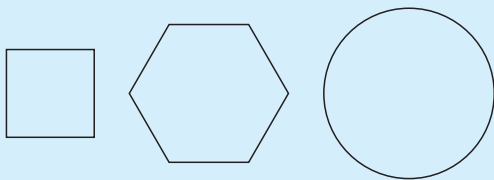
5. 如图，已知 $\angle 1 = 80^\circ$ ， $\angle 2 = 140^\circ$ ，求 $\angle 3$ 的度数.

6. 一个多边形各个内角的度数的平均数是 135° ，这是一个几边形？

7. 如图，线段 AC 与 BD 相交于 O 点，连接 AB ， CD 。 $\angle A + \angle B$ 与 $\angle C + \angle D$ 有什么数量关系？说明理由。



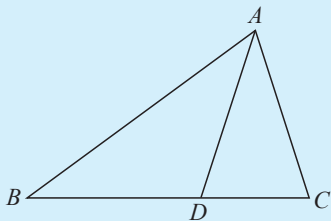
(第7题)



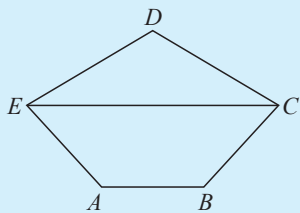
(第8题)

8. 如图，正方形与正六边形的边长都是1，圆的半径也是1，长度分别等于它们周长的三条线段能组成一个三角形吗？

9. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $\angle C = \angle ADC$ ， $\angle B = \angle BAD$ 。求 $\triangle ABC$ 各内角的度数。



(第9题)



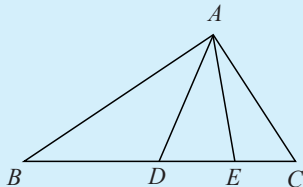
(第10题)

10. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中， $\angle A = \angle B$ ， $\angle BCD = \angle DEA$ ，并且 $\angle CED = \angle ECD$ 。你能判定 AB 与 EC 平行吗？为什么？

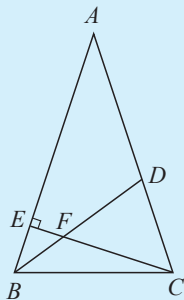


拓展与延伸

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E 是边 BC 上的两点， $\angle B = \angle EAC$ ， $\angle ADC = \angle DAC$ 。 AD 平分 $\angle BAE$ 吗？说明理由。



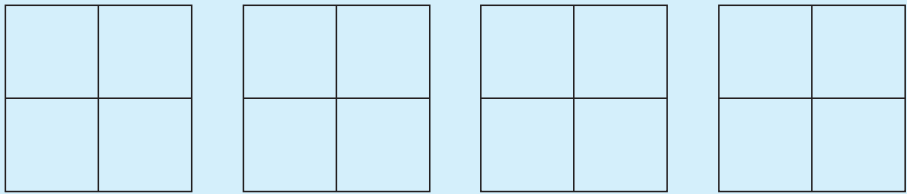
(第11题)



(第12题)

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle A$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，交 AC 边上的高 CE 于点 F 。求 $\angle BFC$ 的度数。

13. 如图, 在下列各方格纸中, 每个小正方形的边长都是1, 分别以小正方形顶点的连线为边作面积为2的多边形(包括凹多边形). 请尽可能多地找出不同的答案.



(第13题)

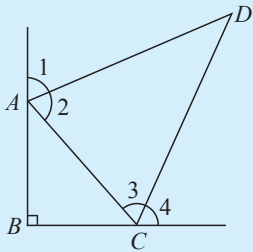
14. 如图, $\angle B = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, 求 $\angle D$ 的度数.



探索与创新

15. (1) 如果从五边形的每个顶点都引出所有对角线, 重合的对角线算作一条, 那么五边形共有几条对角线?

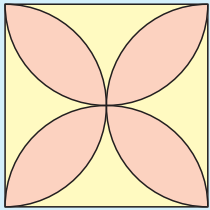
(2) 如果从每个顶点都引出所有对角线, 重合的对角线算作一条, 那么 n 边形共有几条对角线?



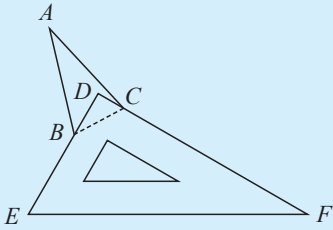
(第14题)

16. 如图, 正方形的边长是4厘米, 以各边为直径分别画4个半圆. 求所得到的四叶形图案的面积.

17. 如图, 把一个三角尺的直角顶点 D 放置在 $\triangle ABC$ 内, 使它的两条直角边 DE , DF 分别经过点 B , C . 如果 $\angle A = 30^\circ$, 那么 $\angle ABD + \angle ACD$ 是多少度?



(第16题)



(第17题)



综合与实践

多边形的密铺

图1是用瓷砖拼铺的房屋外墙面或地面的图样.你见过类似的图案吗?

观察图1中的两个图案,思考下面的问题:

- (1) 这些图案分别是用什么形状的瓷砖拼成的?
- (2) 在每一个图案中,找出其中的一块瓷砖,把它看成一个多边形,它的每条边与相邻的多边形有怎样的关系?
- (3) 在每一个图案中,分别找出一个多边形的顶点,它还是周围哪几个多边形的顶点?

像这样,由若干个多边形既无空隙、又不重叠地拼接,将平面完全覆盖,称为多边形的密铺.

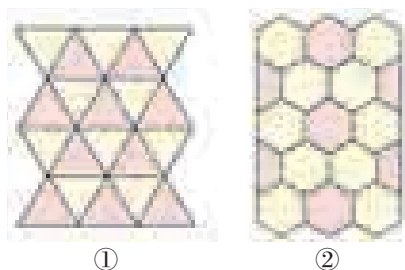


图1



实验与探究

两人一组,完成下面的活动:

- (1) 用硬纸板分别剪出边长都是3厘米的正三角形、正方形、正五边形、正六边形纸板各若干个.
- (2) 仿照图1给出的图样,用你剪出的正三角形和正六边形纸板分别进行密铺.
- (3) 能只用正方形纸板进行密铺吗?
- (4) 分别观察你拼成的密铺图案,你发现以一个多边形的顶点为公共顶点的各个角的和是多少度?

密铺时,多边形的每条边都是该多边形与相邻多边形的公共边,每个顶点处各内角之和是 360° .



(5) 只用正五边形纸板能进行密铺吗? 试一试.

(6) 用同样大小的正多边形拼接时, 为什么单独用正三角形、正方形或正六边形都可以进行密铺, 而单独用正五边形却不能密铺?

用多边形拼接图案, 只有当以任何一个公共顶点为顶点的各个角恰好能拼成一个周角时, 才有可能做到既无空隙又不重叠. 用同一种正多边形拼接图案时, 由于正三角形、正方形、正六边形的每个角依次是 60° , 90° 和 120° , 所以在这些多边形的任何一个顶点处, 分别用 6 个正三角形、4 个正方形或 3 个正六边形的角都可以拼成一个周角. 正五边形的每个角是 108° , 而 108 不能整除 360. 如果用 3 个正五边形拼接, 必有两个正五边形之间留有空隙 (图 2); 如果用 4 个正五边形拼接, 必有两个角的一部分相互重叠. 因此单独用正五边形不能密铺.

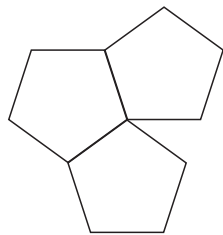


图 2

(7) 除了上述三种正多边形外, 还有没有其他的正多边形, 只用同样大小的这种正多边形就可以进行密铺?

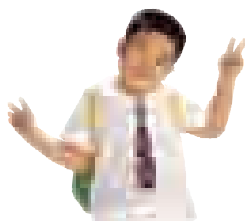


当 $n > 6$ 时, 正 n 边形的每个角大于 120° , 小于 180° , 其度数不能整除 360, 所以只用一种这样的正多边形不能密铺.



交流与发现

只用一种形状和大小都相同的任意四边形能进行密铺吗?



(1) 我们知道, 用大小相同的正方形可以密铺, 用形状和大小都相同的长方形可以密铺吗? 用形状和大小都相同的平行四边形呢? 画一画, 试一试.

(2) 图 3 是只用一种形状和大小都相同的四边形密铺而成的图案. 只用一种形状和大小都相同的任意四边形都能密铺吗? 用硬纸片任意裁出形状和大小都相同的四边形若

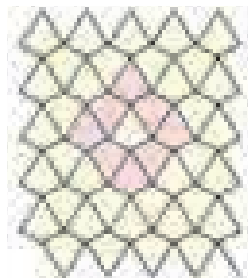


图 3

干个,试一试.这时,除考虑在公共顶点处要拼成一个周角外,还应当注意些什么?由此你能得出什么结论?



因为四边形的内角和等于 360° ,并且在拼接时,可以将两个四边形相等的两条边作为公共边,所以任意四边形都可以密铺.

(3) 图4是一个画在方格纸上的四边形,你会只用这种四边形进行密铺吗?试试看.

用硬纸片剪一个图4所示的四边形作为模板,在图5的方格纸上画出你的设计,并与同学交流.

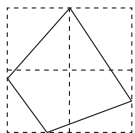


图4

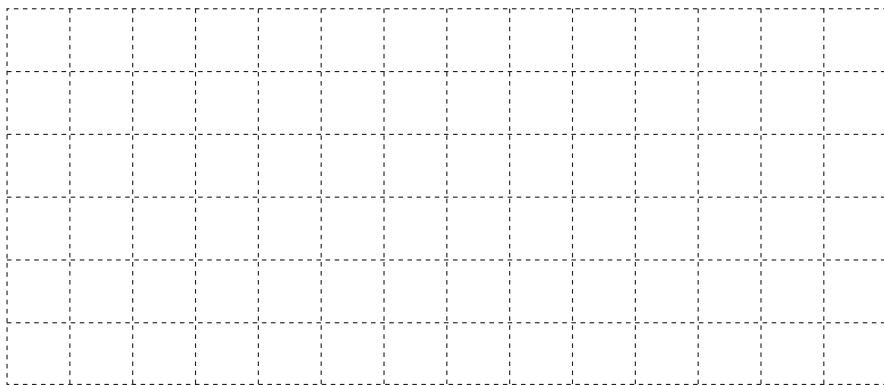


图5

(4) 用硬纸片剪出若干个形状和大小都相同的任意三角形,用这样的纸片能进行密铺吗?为什么?

先用两个三角形中任意两条相等的边作为公共边,拼成一个四边形.因为用形状和大小都相同的四边形能密铺,所以用形状和大小都相同的三角形也能密铺.





观察与思考

(1) 观察图 6 和图 1，这两种密铺方式有什么不同和相同？每个图案是由哪几种正多边形密铺而成的？在图 6 的每个图案中，各个正多边形的边长有什么关系？

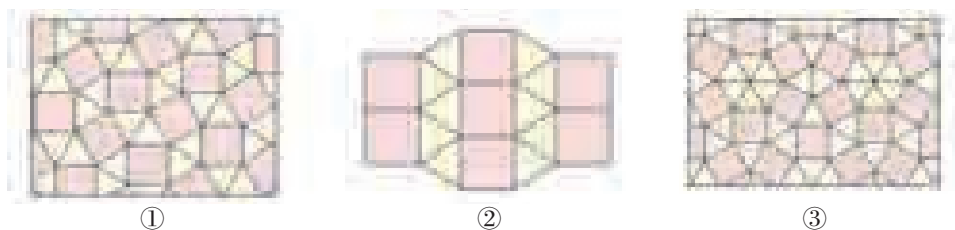


图 6

图 6 ①②③ 都是用正三角形和正方形这两种多边形密铺的，你能说出这三种密铺方式有什么不同吗？你能用这两种正多边形设计出其他的密铺图案吗？试一试。

(2) 我们知道，只用正八边形不能密铺。如果用边长相等的正八边形和正方形，能密铺吗？

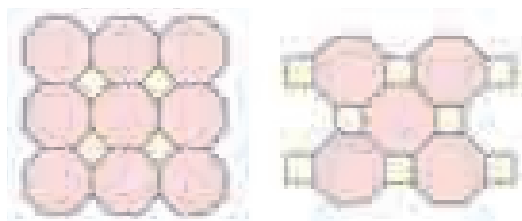


图 7

图 8

(3) 观察图 7 和图 8，它们是同一种密铺图案吗？为什么？

(4) 观察图 9 中的几个图案，它们分别是由哪几种正多边形密铺而成的？请你用同样的正三角形和与正三角形边长相等的正六边形设计密铺图案，与同学交流。

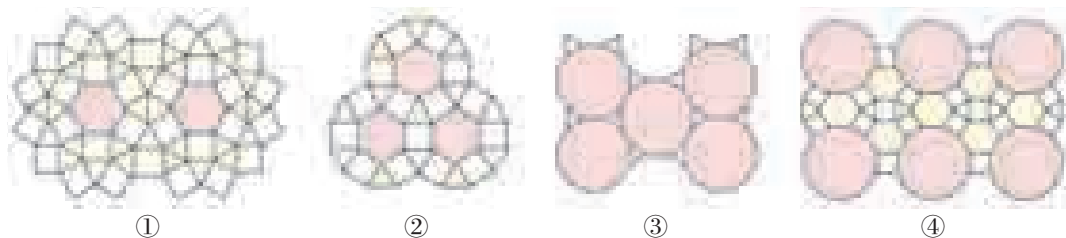


图 9

(5) 再设计几个用不同的正多边形密铺的图案，并在全班展示。

(6) 你能围绕正多边形的密铺问题，作进一步的探索吗？就你的研究过程和结果写成一篇小论文，并在班内交流。



智趣园

课外活动时间，学校足球场热火朝天. 七年级的同学们聚在一起，热烈地谈论着刚才的足球比赛. 小莹忽然想起：“这黑白相间的足球真吸引人，它的黑块和白块各有多少呢？”

大家围着一个足球仔细地观察，发现黑块是球面正五边形，白块是球面正六边形. 大家好不容易查清了黑块共 12 块（图 10），白块的个数就不容易数清了.

一会儿，小亮先想出了一个办法：在白块上分别贴上带有 1, 2, 3, … 的标签，就容易查清了！

很快地，小莹也想出了另一个解决的方法：设有 n 个白块正六边形，因为每个白块正六边形都有 3 条边是它与黑块正五边形的公共边，足球上所有这样的公共边共有 $3n$ 条. 而 12 个黑块正五边形共有 60 条边，于是 $3n = 60$ ，解得 $n = 20$ ，所以白块正六边形共有 20 个.

小莹的结论对吗？

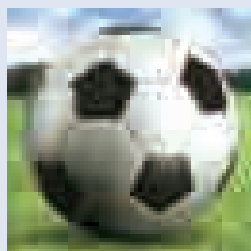


图 10 足球

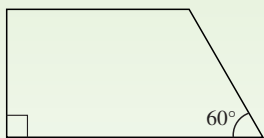


习题

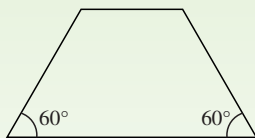


复习与巩固

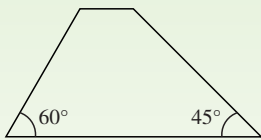
1. 只用一种正多边形密铺时，如果每个顶点处有 3 个这种正多边形相拼接，那么这种正多边形是正几边形？
2. 请分别用如图所示的三种梯形纸片进行密铺，与同学交流.



①



②



③

(第 2 题)



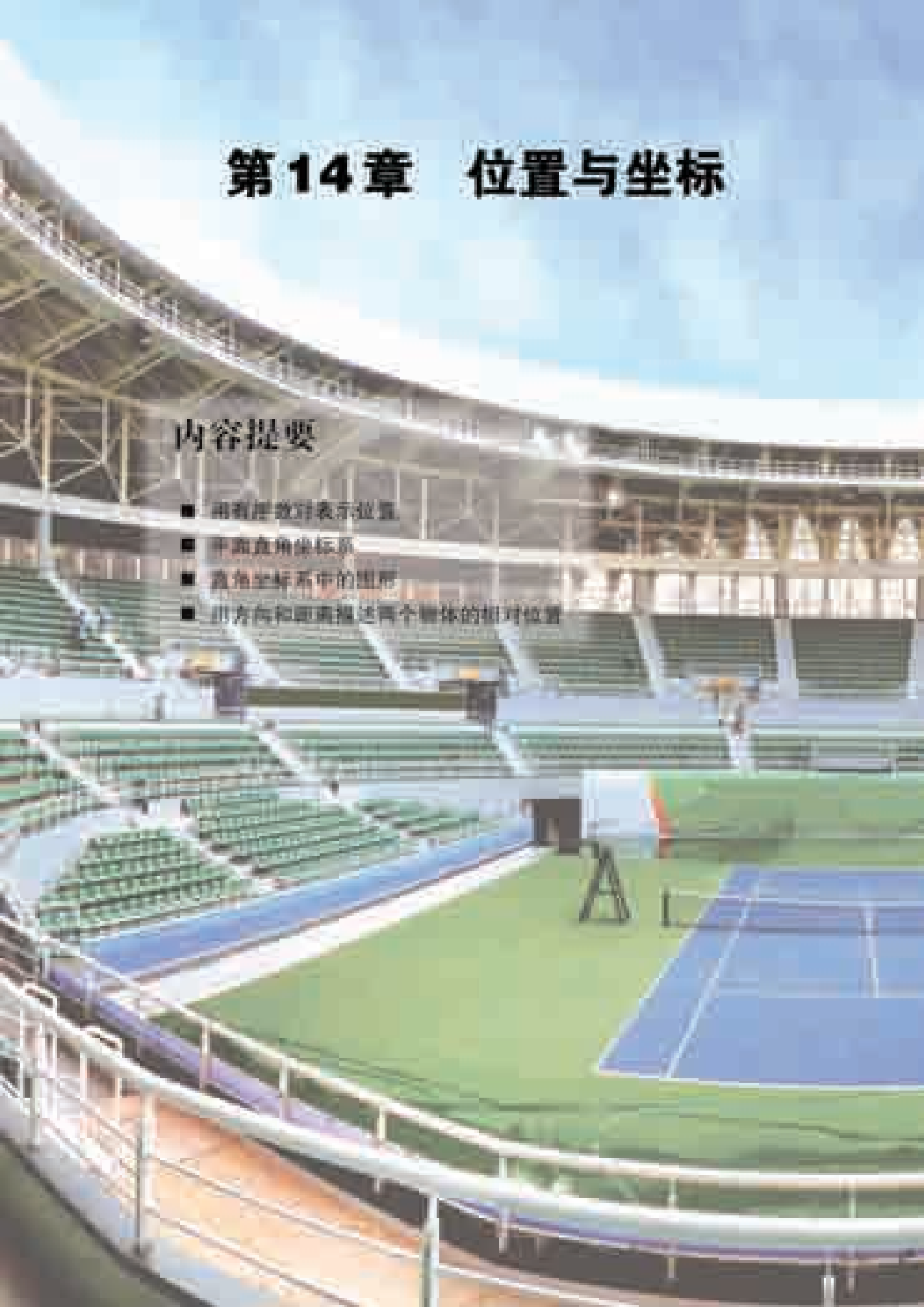
拓展与延伸

3. 我们知道，只用同样大小的正五边形不能密铺. 那么，正五边形与其他正多边形组合有密铺的可能吗？用同样大小的正五边形与同样大小的顶角为 36° 的等腰三角形组合能进行密铺吗？如果你认为可能密铺，请画出图形；如果你认为不可能密铺，请说明原因.

第14章 位置与坐标

内容提要

- 用有序数对表示位置
- 平面直角坐标系
- 直角坐标系中的图形
- 用方向和距离描述两个物体的相对位置



情境导航

当你走进宏伟的体育场，观看比赛时，怎样按照入场券找到座位呢？



14.1 用有序数对表示位置



观察与思考

思考下面的问题：

- (1) 在体育课上，全班48人站成一行，怎样表示某个同学所处的位置？
- (2) 如果48人站成了6行8列（图14-1），你能分别说出队列中小亮和小莹所在的位置吗？

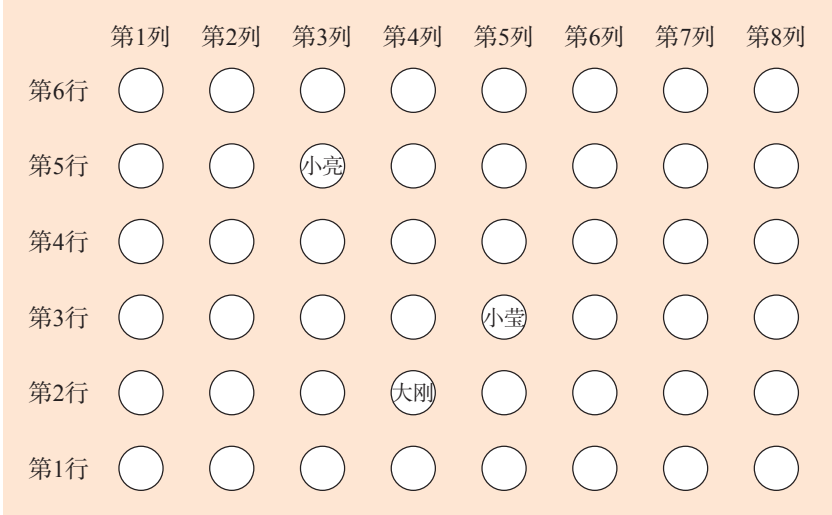


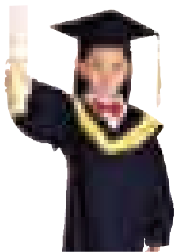
图 14-1

在图14-1中，小亮的位置是第5行第3列，小莹的位置是第3行第5列. 为了说明小亮的位置，用了5，3一对数. 为了说明小莹的位置，用了3，5一对数，这里数对5，3和3，5所表示的实际意义不相同，在这两对数中，每个数的出现都是有先后顺序的. 为了分别表示二人的位置，把小亮的位置记作（5，3），把小莹的位置记作（3，5）. 像这样，一对有顺序的数叫做一个有序数对（ordered pair）.

- (3) 你能用一个有序数对表示出图中大刚的位置吗？
- (4) 如果下列位置上的同学是学校田径队的队员：
（6，1），（2，2），（1，8），（5，4），（3，6）.

你能在图 14-1 中分别标出这些同学所处的位置吗？

这里，一个有序数对表示队列中一个同学的位置；反之，一个同学的位置可以用一个有序数对表示。



(5) 在地图上和现实中，每个城市、山峰、岛屿、船只等的地理位置都可以用它所处地点的（经度，纬度）这样的有序数对表示，例如，北京的位置是东经 116.46 度，北纬 39.92 度，可以记为（东经 116.46°，北纬 39.92°）。你能用这种方法表示你所在市的位置吗？

(6) 日常生活中还有哪些用有序数对表示位置的例子？你能举出一个来吗？



交流与发现

图 14-2 是在一张方格纸上绘出的时代中学的校园平面图。图中每个小正方形的边长为 1 个单位长度。

(1) 如果用有序数对 $(0, 0)$ 表示办公楼的位置， $(0, -2)$ 表示校门的位置， $(3, 0)$ 表示体育馆的位置，你能根据有序数对 $(0, -2)$ 和 $(3, 0)$ ，说明校门和体育馆相对于办公楼的位置吗？

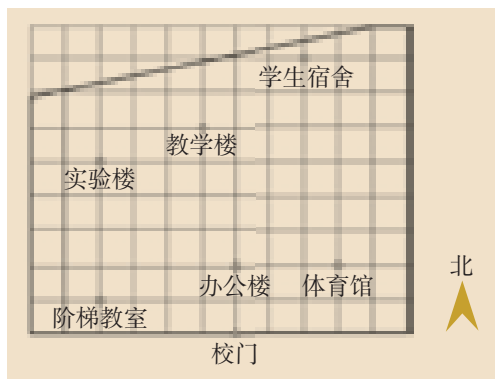


图 14-2

(2) 有序数对 $(-4, -1)$ 表示图中哪座建筑物的位置？其他几座建筑物的位置又怎样表示呢？

(3) 如果图中的横线和纵线表示校园中的道路，你能根据有序数对 $(0, 0)$ 和 $(-4, -1)$ 说出如何由办公楼前往阶梯教室吗？你还能说出如何由办公楼前往学生宿舍吗？

(4) 在图 14-2 中，如果把图的左下角标上数字 0，然后从左到右每条竖直线依次标上数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10，自下而上每条水平线标上字母 A, B, C, D, E, F, G, H, I，便可得到图 14-3。这样，校园内每座建筑物也可以用数字和字母表示出来。例如，办公楼可表示为 $(6, B)$ 。你能用这种方法表示出校园内其他建筑物的位置吗？

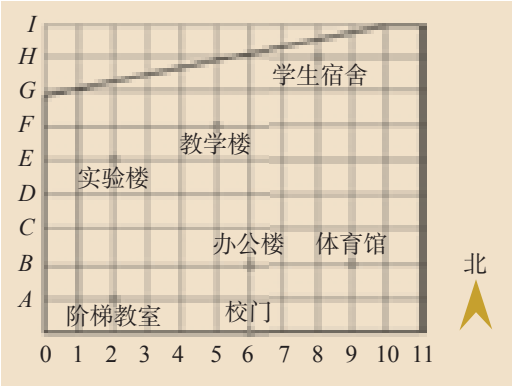


图 14-3



练习

1. 在生活中可用有序数对表示的例子很多. 例如, 7 年级 2 班可以记作 $(7, 2)$, 开始上课的时间 8 时 10 分, 记作 8: 10; 数学中的分数 $\frac{m}{n}$, 也可记作 (m, n) . 你还能举出生活中和数学中, 可用有序数对表示的例子吗?

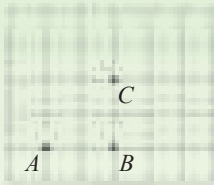


习题14.1

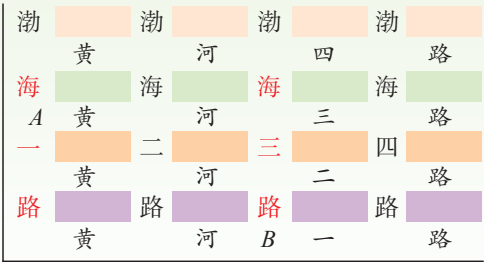


复习与巩固

1. 在如图所示的方格纸中, 如果用 $(1, 1)$ 表示点 A 的位置, 用 $(3, 1)$ 表示点 B 的位置, 那么
- (1) 图中点 C 的位置可以表示为 ();
- (2) 如果点 A, B, C 是一个正方形的三个顶点, 那么正方形的第四个顶点的位置可以表示为 ();
- (3) 如果点 B 的位置用 $(0, 0)$ 表示, 那么点 A 的位置可以表示为 (), 点 C 的位置可以表示为 ().
2. 如图, A 表示渤海一路与黄河三路的交叉路口, 记作 $(1, 3)$; B 表示渤海三路与黄河一路的交叉路口, 记作 $(3, 1)$. 如果用 $(1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 1)$ 表示由 A 到 B 的一条路径.
- (1) 请你在图中画出这条路径;
- (2) 用上面的方式写出由 A 到 B 的另外一条路径:



(第 1 题)



(第 2 题)

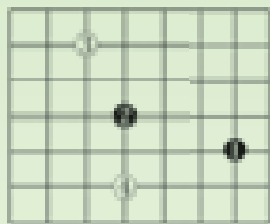
$(1, 3) \rightarrow (\quad) \rightarrow (\quad) \rightarrow (\quad) \rightarrow (3, 1)$;

(3) 设计一条由 A 经过 $(4, 4)$ 到 B 的路径.



拓展与延伸

3. 如图, 在围棋盘上有四枚棋子, 如果黑棋 ① 的位置用有序数对 $(0, -1)$ 表示, 黑棋 ② 的位置用有序数对 $(-3, 0)$ 表示, 那么白棋 ③ ④ 的位置分别应当如何表示?



(第3题)

4. (1) 某次考试按下述方式安排考场: 从第1列的第1行开始依次编号 (如图). 考生单人单桌, 按考号入座. 小莹的考号是13, 小亮的考号是24, 在图中分别标出他们的座位;

(2) 如果用 (a, b) 表示考场内座位的位置, 其中 a, b 分别表示座位所在的行和列, 那么小莹的位置是 $(\quad)$, 小亮的位置是 $(\quad)$;

(3) 如果由你来安排考场, 你喜欢用考号还是用 (2) 中的方法布置考场? 说说你的看法.

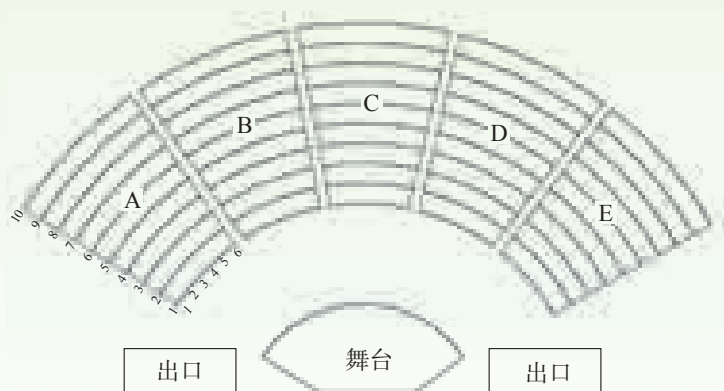
	第1列				
第1行	1				
第2行	2	11			
	3	10			
	4	9			
	5	8			
	6	7			

(第4题)



探索与创新

5. 如图是某剧场平面示意图. 坐席分 A, B, C, D, E 五个区, 每区各10排, 第1排均为6个座位; 从第2排开始, 每排比前一排多出1个座位. 剧场的入场券上用1个字母和有序数的2个数分别表示座位位于哪一区、第几排、第几号.



(第5题)

(1) 小亮坐在 B 区、倒数第3排右数第2个座位上, 那么他位于 B 区的几排几号?

(2) 小莹的入场券上标明的一个字母和两个数依次为 C, 6, 8. 她走出剧场时应当选择哪个出口? 走哪条过道最近? 在上图中把它画出来.

14.2 平面直角坐标系



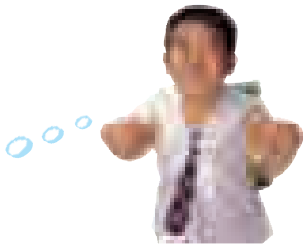
观察与思考

(1) 如何确定一个点在一条已知直线上的位置?

我们可以把这条直线看做一条数轴,即在这条直线上选定一个点作为原点,规定直线的一个方向为正方向,选取适当的长度为单位长度,利用这个点在数轴上表示的数,刻画该点的位置.

(2) 如何确定一个点在平面内的位置呢?

我们已经知道平面内的点的位置可用有序数对来刻画,能利用两条数轴解决这一问题吗?



如图 14-4,在平面内画出两条互相垂直而且有公共原点的数轴,水平的一条叫做 x 轴 (x -axis) 或横轴,习惯上取向右的方向为正方向,铅直的一条叫做 y 轴 (y -axis) 或纵轴,取向上的方向为正方向,这样就组成了平面直角坐标系 (rectangular coordinates in two dimensions),简称直角坐标系. x 轴与 y 轴统称坐标轴,它们的公共原点叫做坐标原点,简称原点,一般用 O 表示.

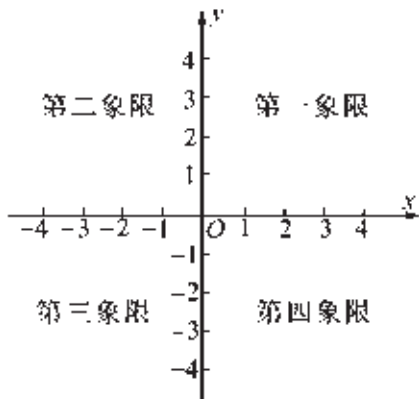


图 14-4

在直角坐标系中, x 轴和 y 轴把平面分为四个部分 (图 14-4): 位于原点右上方的部分叫做第一象限,其他三个部分按逆时针方向依次叫做第二象限、第三象限和第四象限. 坐标轴上的点不在任何一个象限.

建立了直角坐标系后,我们可以用下面的方法确定点在平面内的位置.例如, A 是直角坐标系中第二象限内的一个点 (图 14-5),过点

A 分别作 x 轴与 y 轴的垂线, 垂足 M 在 x 轴上所表示的数为 -2 , 垂足 N 在 y 轴上所表示的数是 3 . 我们就说点 A 的**横坐标**是 -2 、**纵坐标**是 3 . 有序数对 $(-2, 3)$ 叫做点 A 的**坐标** (coordinate), 记作 $A(-2, 3)$. 原点的坐标记作 $(0, 0)$, M 点的坐标记作 $(-2, 0)$, N 点的坐标记作 $(0, 3)$.

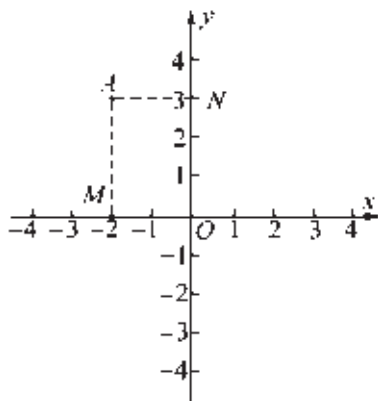
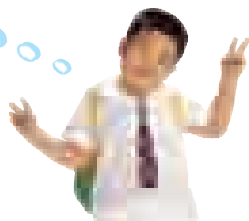


图 14-5

在表示一个点的坐标的括号内, 横坐标要写在纵坐标的前面, 中间用逗号隔开.



(3) 你能用上面的方法, 写出图 14-6 中 A, B, C, D, E, F 各点的坐标吗?

$A(3, 1), B(0, 3),$
 $C(-3, 2), D(-2, 0),$
 $E(-2, -3), F(2.5, -3).$

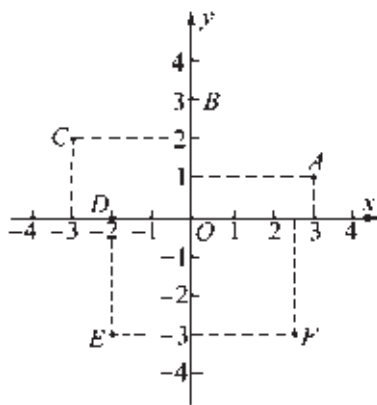


图 14-6

利用坐标就可以确定一个点在直角坐标系中的位置了.

(4) 在直角坐标系中, 已知一个点的坐标是 (a, b) , 怎样描出这个点? 与同学交流.

根据这个点的横、纵坐标, 分别在 x 轴、 y 轴上找出坐标是 $(a, 0), (0, b)$ 的点, 过这两个点分别作所在坐标轴的垂线, 它们的交点就是所求的点.



例1 在直角坐标系中描出下列各点，并分别指出它们在直角坐标系中的位置：

$A(-3, 2)$, $B(4, -1)$, $C(-2, -3.5)$,
 $D(1, 3)$, $E(3, 0)$, $F(0, -2)$.

解 所描各点如图 14-7 所示. 点 A 在第二象限内, 点 B 在第四象限内, 点 C 在第三象限内, 点 D 在第一象限内. 点 E 在 x 轴上原点的右侧, 点 F 在 y 轴上原点的下方.

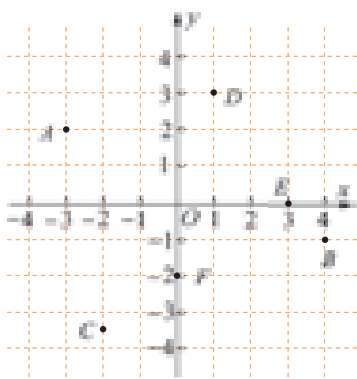


图 14-7



交流与发现

观察图 14-6、图 14-7 中各点的位置和它们的横、纵坐标的符号, 你发现直角坐标系中, x 轴及 y 轴上点的横、纵坐标有什么规律? 各个象限内点的横、纵坐标的符号有什么规律? 与同学交流.

直角坐标系中, x 轴上各点的纵坐标都为 0, y 轴上各点的横坐标都为 0. 各个象限内点的横、纵坐标的符号, 可用图 14-8 表示.

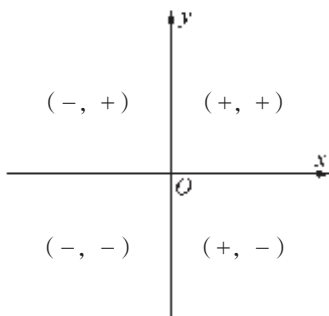


图 14-8



史海漫游

坐标法的奠基人——笛卡儿

笛卡儿 (Descartes, 1596–1650), 法国哲学家、数学家、物理学家, 解析几何学的奠基人之一. 他认为数学是其他一切科学的理论和模型, 提出了以数学为基础的、以演绎为核心的方法论, 对哲学、数学和自然科学的发展起到了巨大的推动作用.

笛卡儿从小就养成了喜欢安静和善于思考的习惯. 1612 年他以优异成绩从中学毕业, 后来到普瓦捷大学攻读法学, 四年后获博士学位. 为了“读世界这一本大书”, 他投笔从戎, 游历欧

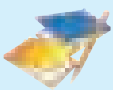


笛卡儿

洲, 后来移居荷兰. 在荷兰长达 20 多年的时间里, 笛卡儿对哲学、数学、天文学、物理学、化学和生理学等领域进行了深入的研究. 在数学方面, 笛卡儿对代数方程理论的发展作出了重要贡献.

据说笛卡儿在一次患病时, 躺在床上思考问题, 偶然发现有一只蜘蛛在墙角上下前后运动, 吐丝结网, 由此启发他研究如何用坐标刻画平面内点的位置. 1637 年, 笛卡儿编著出版了《几何学》, 书中把平面内的一个点与一对有序数联系起来, 改变了自古希腊以来代数与几何分离的倾向, 把“数”与“形”统一起来, 使几何曲线与代数方程相结合, 从而创立了数学的一个重要分支——解析几何学. 笛卡儿的这一天才创见, 为微积分的创立奠定了基础, 使数学由常量数学进入到变量数学的广阔领域.

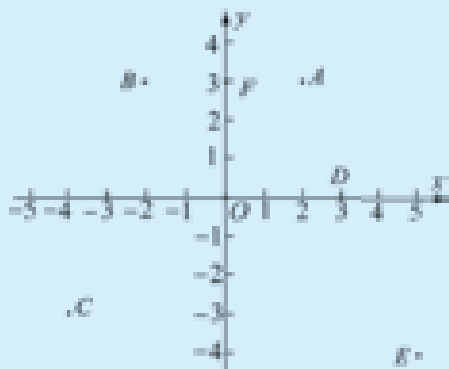
笛卡儿是 17 世纪欧洲哲学界和科学界最有影响的巨匠之一, 被誉为“近代科学的始祖”.



练习

1. 如图, 在直角坐标系中:

- (1) 写出 A, B, C, D, E, F, O 各点的坐标.
- (2) 在以上各点中, 找出横坐标为 0 的点, 这些点的位置有什么特点?
- (3) 在以上各点中, 找出纵坐标为 0 的点, 这些点的位置有什么特点?
- (4) 在以上各点中, 纵坐标为 3 的点有哪几个? 连接这几个点的直线与 x 轴有什么位置关系?



(第 1 题)

2. 分别说出点 $A(6, 2), B(-3, -1), C(-2, 4), D(2, -4)$ 在直角坐标系中所在的象限, 并在坐标系中分别描出这些点.



习题 14.2



复习与巩固

1. 点 $P(-2, 3)$ 在第几象限内? 它到 x 轴和 y 轴的距离分别是多少? 点 $Q(3, -2)$ 呢? 在直角坐标系中, 分别描出它们.

2. 在直角坐标系中, 如果一个点的纵坐标与横坐标同号, 它可能在第几象限? 如果一个点的纵坐标与横坐标异号, 它可能在第几象限? 如果至少有一个坐标是0呢?

3. (1) 如果点 $P(a, b)$ 在第二象限, 那么 a 与 b 分别是正数还是负数?

(2) 如果 $a > 0, b < 0$, 那么点 $A(a, b)$ 在第几象限? 点 $B(b, a)$ 在第几象限? 点 $C(-a, b)$ 在第几象限?

4. 填空:

(1) 在 y 轴上, 到原点的距离为2的点的坐标是_____;

(2) 在直角坐标系中, 点 $A(a, 0)$ 的位置在_____;

(3) 如果点 $P(a, b)$ 在第三象限, 那么点 $Q(-a, -b)$ 在第_____象限;

(4) 如果点 $P(m-3, 2+m)$ 在 x 轴上, 那么点 P 的坐标是_____.



拓展与延伸

5. (1) 在直角坐标系中, 经过点 $A(-2, 0)$ 画平行于 y 轴的直线, 这条直线上的点的坐标有什么特点?

(2) 在直角坐标系中, 经过点 $B(-2, -1)$ 画平行于 x 轴的直线, 这条直线上的点的坐标有什么特点?

6. 对于二元一次方程 $3x + 2y = 1$, 写出它的5个解. 分别以每一个解中的 x 值为点的横坐标、 y 值为点的纵坐标, 在直角坐标系中描出这些点. 你发现这些点的位置的分布有什么规律?

14.3 直角坐标系中的图形



交流与发现

(1) 在直角坐标系中分别描出下列各点:

$A(3, 4), B(5, 2), C(4, 2), D(4, 0), E(2, 0), F(2, 2), G(1, 2)$.

(2) 顺次连接点 A, B, C, D, E, F, G, A . 你得到一个怎样的图形(图14-9)?

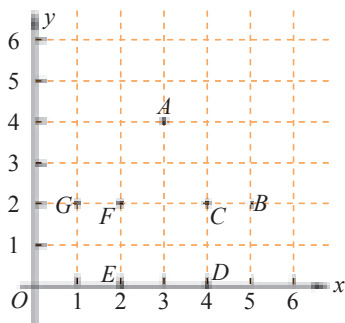


图 14-9

简单图形的各顶点坐标确定后，它在直角坐标系中的位置也就确定了，可以用它的各个顶点的坐标刻画这个图形。



例1 在如图 14-10 所示的直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 的各边都分别平行于坐标轴. 已知点 A 的坐标是 $(3, 1)$ ，正方形的边长是 5，写出点 B 的坐标.

解 由点 A 的横坐标为 3，可知点 A 到 y 轴的距离为 3，因为 AB 平行于 y 轴，所以点 B 到 y 轴的距离也为 3，且点 B 在 y 轴右侧，因此点 B 的横坐标是 3.

由点 A 的纵坐标为 1，可知点 A 到 x 轴的距离为 1. 因为 AB 的长为 5，点 B 到 x 轴的距离为 $5 - 1 = 4$ ，且点 B 在 x 轴下方，所以点 B 的纵坐标是 -4 ，因此点 B 的坐标为 $(3, -4)$.

你能写出点 C 和点 D 的坐标吗？试一试.

例2 如图 14-11，在直角坐标系中：

- (1) 写出 $\triangle ABC$ 各顶点的坐标；
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 (1) 由图 14-11 可以看出， $\triangle ABC$ 各顶点的坐标是：

$A(-2, -2)$ ， $B(3, -2)$ ， $C(0, 2)$.

(2) 由 (1) 可知， A ， B 两点的纵坐标相等，都是 -2 ，所以线段 AB 平行于 x 轴，从而 $AB \perp y$ 轴.

在 $\triangle ABC$ 中，点 A ， B 分别在 y 轴的两侧，且到 y 轴的距离分别为 2 和 3，所以 $AB = 5$. 由于点 C 在 y 轴上，纵坐标为 2， y 轴垂直于线段

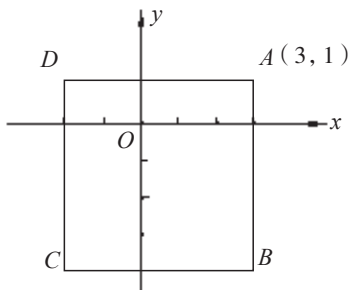


图 14-10

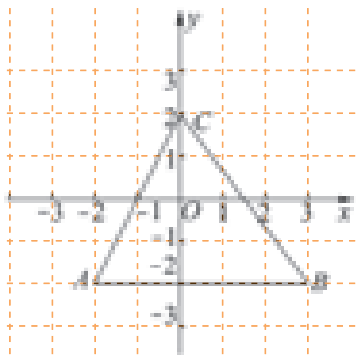


图 14-11



小资料

利用直角坐标系可以把数与图形有机地结合起来，有利于用代数方法研究几何问题，也有利于借助图形直观地探索数量关系的规律性.

AB ，从而可知点 C 到边 AB 的垂线段的长为 4，即底边 AB 上的高为 4.

所以， $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$.



智趣园

直角坐标系中三角形面积的计算

如图 14-12，在直角坐标系中，有一个红色的三角形，三个顶点坐标分别为 $(4, 7)$ ， $(1, 1)$ ， $(8, 3)$ 。怎样利用它们的坐标计算这个三角形的面积呢？

可以用下面两种方法：

方法 1 如图 14-13，画出如图所示的长方形，将长方形面积减去三个黄色三角形的面积。

方法 2 如图 14-14，将原三角形分割为两个三角形，一个是紫色的，一个是棕色的。它们有公共的底边，它们的高可以从图上看出。

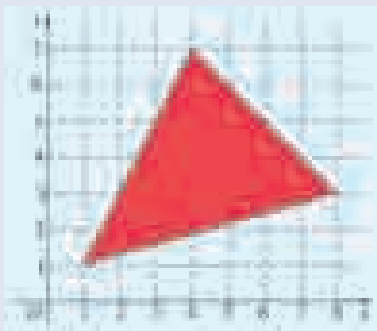


图 14-12

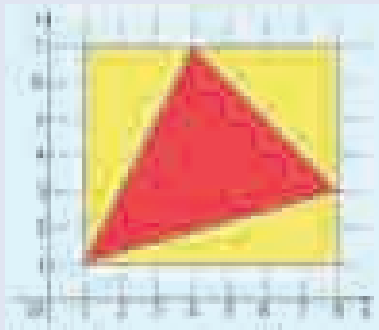


图 14-13

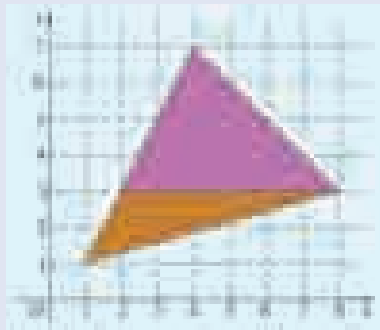


图 14-14

请你用上面两种方法分别计算这个三角形的面积. 你还有其他的方法吗？



练习

1. 在同一直角坐标系中分别描出下列各点：

$A(0, 2)$ ， $B(1, 1)$ ， $C(2, 2)$ ， $D(3, 0)$ ， $E(-3, 0)$ ， $F(-2, 2)$ ， $G(-1, 1)$ ， $A(0, 2)$ 。

将各点顺次连接起来，观察这个图形，你觉得它像什么？

2. 在同一直角坐标系中分别描出下列各点, 然后将各组中的点顺次连接起来:

(1) $(1, 1), (6, 1), (6, 8), (1, 8), (1, 1)$;

(2) $(-2, -2), (3, -2), (3, 5), (-2, 5), (-2, -2)$.

你得到两个什么样的图形? 从中你发现了什么?



观察与思考

如图 14-15, 有一个长方形的儿童游泳池, 南北长 50 米, 东西宽 20 米. 小亮在游泳池的西北角上, 小莹恰好游到游泳池的中心. 你能适当地建立直角坐标系, 利用长方形游泳池的各个顶点坐标, 刻画这个长方形的形状和大小, 并描述小亮和小莹的位置吗?

(1) 以游泳池的西南角为原点, 经过原点的东西方向的直线为 x 轴, 向东的方向为 x 轴的正方向; 经过原点的南北方向的直线为 y 轴, 向北的方向为 y 轴的正方向, 用 1 米为单位长度, 建立直角坐标系 (图 14-16). 你能说出长方形游泳池另外三个顶点的坐标吗? 小亮、小莹所在位置的坐标分别是什么?



图 14-15

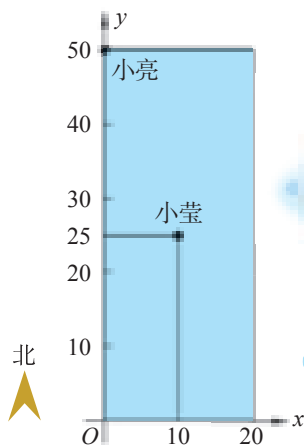
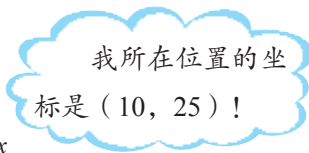


图 14-16



我所在位置的坐标是 $(0, 50)$!



我所在位置的坐标是 $(10, 25)$!

(2) 以小莹所在的位置为原点, 经过原点的东西方向的直线为 x 轴, 向东的方向为 x 轴的正方向; 经过原点的南北方向的直线为 y 轴, 向北的方向为 y 轴的正方向, 用 1 米为单位长度, 建立直角坐标系 (图 14-17). 你能说出长方形游泳池的四个顶点的坐标吗? 小莹、小亮所在位置的坐标分别是什么?

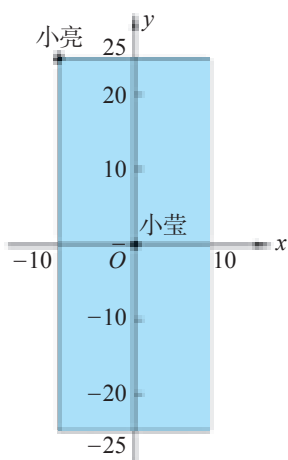


图 14-17

我所在位置的坐标是 $(0, 0)$!

我所在位置的坐标是 $(-10, 25)$!

(3) 由(1)(2), 你是否发现同一个简单图形的顶点坐标在不同的直角坐标系中会发生变化? 如果告诉你在某个坐标系中一个长方形游泳池的四个顶点坐标分别是 $(0, 0)$, $(0, -50)$, $(20, -50)$, $(20, 0)$, 通过这些顶点在坐标系中的位置, 你能说出这个游泳池的形状和大小, 并描述它在坐标系中的位置吗?

(4) 对于上述长方形游泳池中建立直角坐标系的问题, 你还有哪些不同的方法? 画出你所建立的坐标系和长方形游泳池在坐标系中的位置, 写出顶点坐标.

在实际应用中, 可以通过建立适当的坐标系, 以描述相关物体的位置.



挑战自我

如图 14-18, 在直角坐标系中, 已知点 O' 的坐标是 (a, b) . 以点 O' 为原点, 以经过点 O' 平行于 x 轴的直线为 x' 轴, 向右的方向为 x' 轴的正方向; 以经过点 O' 平行于 y 轴的直线为 y' 轴, 竖直向上的方向为 y' 轴的正方向, 单位长度相同, 建立新的直角坐标系. 如果点 P 在原坐标系中的坐标为 (x, y) , 在新坐标系中的坐标为 (x', y') , 那么 x' 与 x , y' 与 y 之间应分别满足什么关系?

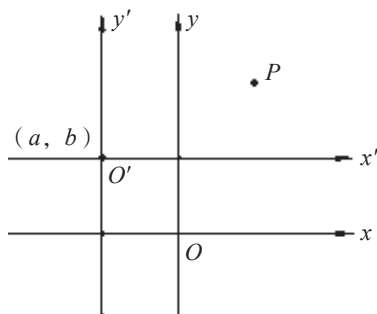


图 14-18



练习

1. 画出一个边长为 5 厘米的正方形，选择两种直角坐标系，分别写出正方形各顶点的坐标.
2. 在图 14-2 中，如果改为 $(0, 0)$ 表示校门的位置，这时校园内其他建筑物的位置各用怎样的坐标表示？



习题 14.3



复习与巩固

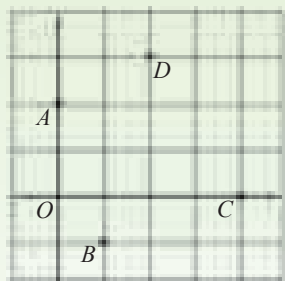
1. 在同一个直角坐标系中描出下列各点，并分别将各组中两个点连接起来：

- ① $(0, 0)$, $(2, 0)$; ② $(0, 1)$, $(2, 1)$;
③ $(0, 2)$, $(2, 2)$; ④ $(0, 0)$, $(0, 2)$.

你得到的图案像哪个字母？去掉上面的哪一组点后可以得到另一个字母？

2. 在如图所示的直角坐标系中，每个方格是边长为 1 的正方形，点 A 的坐标是 $(0, 2)$.

- (1) 分别写出 B , C , D 三个点的坐标；
(2) 将 A , B , C , D 四个点顺次连接起来，如果点 E 的坐标为 $(3, 2)$ ，描出这个点，并说出点 E 是在四边形 $ABCD$ 的内部，还是外部.



(第 2 题)

3. 建立一个直角坐标系，使一个长 3 厘米、宽 2 厘米的长方形的顶点中有一个坐标为 $(1, 1)$. 你有几种方法？
4. 已知长方形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(2, 1)$, $B(6, 1)$, $C(6, -5)$.
(1) 求顶点 D 的坐标；
(2) 选择一个新的直角坐标系，使 A , B , C 三点的坐标分别是 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, -6)$. 这时 D 点的坐标是什么？



拓展与延伸

5. 在直角坐标系中，
(1) 已知 $A(0, 0)$, $B(4, 2)$, $C(2, 5)$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 已知 $A(0, 0)$, $B(9, 0)$, $C(7, 5)$, $D(2, 7)$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

6. 如图, 红十字标志是由五个边长都相等的正方形组成的. 试建立一个直角坐标系, 并选取红十字标志上的若干点, 以便刻画这个图形的形状和大小. 写出这些点的坐标.



红十字标志
(第6题)



探索与创新

7. 在直角坐标系中描出以下各点:

$A_1(0, 0)$, $A_2(1, 0)$, $A_3(1, -1)$, $A_4(-1, -1)$, $A_5(-1, 1)$, $A_6(2, 1)$,
 $A_7(2, -2)$, $A_8(-2, -2)$, $A_9(-2, 2)$, $A_{10}(3, 2)$, $A_{11}(3, -3)$, $A_{12}(-3, -3)$.
 顺次连接这些点, 你发现了什么? 按照上面各点中位于第三象限的点的规律, 你能写出 A_{100} , A_{101} , A_{102} , A_{103} 的坐标吗?

14.4 用方向和距离描述两个物体的相对位置



观察与思考

除了可以用建立直角坐标系的方法描述物体的位置外, 在实际应用中还有没有描述物体位置的其他方法呢?

图 14-19 是时代中学周边环境示意图.

(1) 从图中可以看出奥体中心位于学校的正东方向, 到学校的距离约 2.4 千米. 这就是说, 我们可以学校为参照点, 用相对于学校的方向和距离来描述奥体中心的位置. 类似地, 你能以学校为参照点, 分别描述新华书店和水族馆的位置吗? 反之, 你能分别以新华书店和水族馆为参照点, 描述学校的位置吗?



图 14-19

(2) 以学校为参照点, 百花小区的位置应当怎样描述? 与百花小区同一方向的还有什么场所? 如何才能区分它们相对于学校的位置?



加油站

在测量学中, 被观测物体的方向除了用正南、正北、正东、正西描述之外, 还可用地球南北方向与观测者观测物体视线方向的夹角 α 的角度来表示 ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). 如图中 A, B, C 各点相对于观测者 O 的方向分别是北偏东 25° 、北偏西 57° 、南偏西 36° 等 (图 14-20).

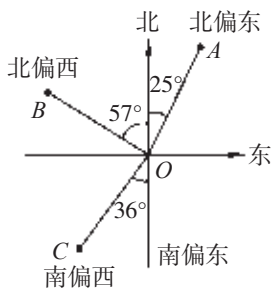


图 14-20

(3) 借助量角器和刻度尺, 你能用方向和距离描述少年宫相对于学校的位置吗? 反之, 你能描述学校相对于少年宫的位置吗? 由此你发现了什么?



少年宫在学校的北偏西 32° 的方向, 到学校的距离约 1.7 千米; 反之, 学校在少年宫南偏东 32° 的方向, 距离约 1.7 千米.

为什么表示方位的两个角都是 32° ?



如图 14-21, 射线 AN 的方向是正北方向, 射线 BS 的方向是正南方向, 如果以 A 为参照点, 点 B 的方向可用 $\angle NAB$ 表示; 以点 B 为参照点, 点 A 的方向可用 $\angle SBA$ 表示.

因为 $AN \parallel BS$, $\angle NAB$ 和 $\angle SBA$ 是内错角, 所以 $\angle NAB = \angle SBA$.

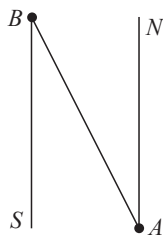


图 14-21

描述平面上 A, B 两点的相对方位时, 如果由 A 观测 B 的方向是北 (南) 偏西 (东) n° , 那么由 B 观测 A 的方向是南 (北) 偏东 (西) n° .

(4) 借助于刻度尺和量角器, 你能确定图 14-19 中购物广场相对于百花小区的位置吗? 少年宫与奥体中心相对于新华书店的位置呢?

例1 如图 14-22, 某海岸救援中心接到海上一艘船的求救信号. 经测定, 该船方向是北偏东 75° , 距救援中心 80 千米. 请在图中标出遇险船只的位置. 该船船员怎样描述救援中心的位置?

解 如图 14-22, 过救援中心所在位置 O 画出射线 ON , 方向是正北方向. 以 O 为顶点, ON 为始边, 按顺时针方向用量角器画出 $\angle NOP = 75^\circ$.

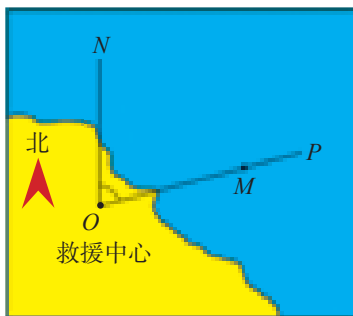
该船距救援中心的距离是 80 千米, 依据图中给出的比例尺, 换算为图上距离:

$$80\,000 \times \frac{1}{4\,000\,000} = 0.02 \text{ (米)}.$$

在 OP 上截取线段 OM , 使 $OM = 2$ 厘米.

点 M 就是图中遇险船只的位置.

该船船员观察救援中心的方向是南偏西 75° , 距离是 80 千米.



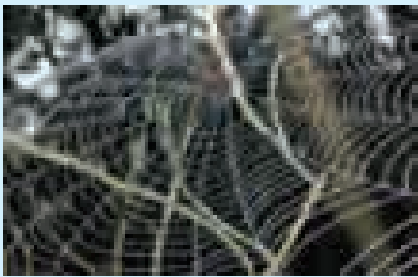
比例尺 1 : 4 000 000

图 14-22

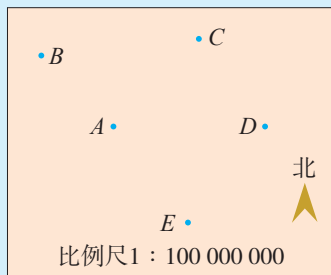


练习

- 如图, 一只蜘蛛静候在蜘蛛网的中心. 当发现一只昆虫被蛛丝粘住时, 它会本能地用怎样的方式确定猎物的位置?
- 如图是 A 市与周围城市的示意图. 分别表示以 A 市为参照点时各城市的位置和 A 市相对于各城市的位置.



(第 1 题)



(第 2 题)



习题14.4



复习与巩固

- 取一张中国地图，借助量角器和刻度尺，用方向和距离近似地描述下列城市相对于北京的位置和北京相对于这些城市的位置：
(1) 上海； (2) 重庆； (3) 沈阳； (4) 乌鲁木齐.
- 灯塔A在灯塔B的南偏东 74° 方向，与灯塔B的距离是4海里. 轮船C在灯塔B的正东方向，在灯塔A的北偏东 40° 方向. 试画图确定轮船C的位置（用1厘米代表1海里）.
- 测量员沿着一块地的周围测绘时，先从点A向北偏东 75° 方向走240米到点B，再从B向北偏西 20° 方向走360米到点C，再从点C向南偏西 65° 方向走450米到点D，最后从D回到A. 用1厘米表示60米，画出示意图，量出点A到点D的图上距离，并算出A与D两点间的实际距离，以及从点D观测点A的方向.



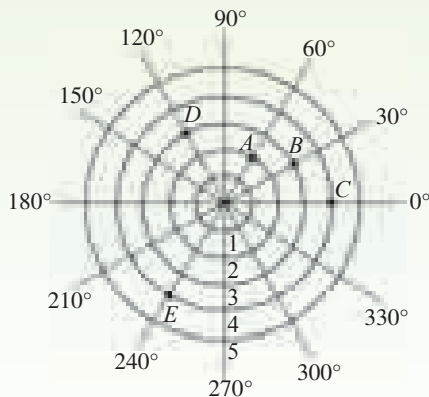
拓展与延伸

- 某渔船8:00从小岛出发向西航行，10:00折向北航行，平均航速均为20千米/时. 当11:30时该渔船航行到什么位置？请先画出航线示意图（比例尺1:1 000 000），然后量出渔船相对于小岛的方向和距离.



探索与创新

- 如图，在一台雷达的屏幕上的A, B, C, D, E各点处同时发现可疑目标. 如果你是一名雷达兵，你如何向上级报告各目标所在的位置（图中的1个单位长度表示10千米）？



（第5题）



回顾与总结

- 本章学习的主要内容是什么？总结一下，并与同学交流.
- 如何用有序数对表示平面内点的位置？

- 什么是平面直角坐标系？在直角坐标系中，如何根据坐标描出点的位置？如何由点的位置写出它的坐标？
- 直角坐标系将平面分为几部分？各部分的名称分别是什么？各部分点的坐标有什么特征？坐标轴上点的坐标有什么特征？
- 如何利用坐标描述一个简单的图形？
- 你体会到直角坐标系对于建立数与图形之间的联系有怎样的作用？
- 怎样用方向和距离描述平面内两个物体的相对位置？试举例说明.
- 学过本章后，你有哪些收获和体会？与同学交流.

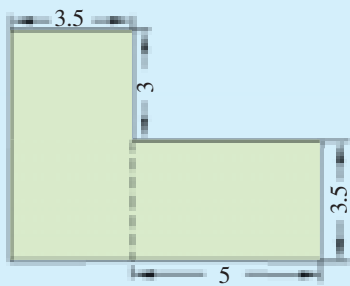


综合练习



复习与巩固

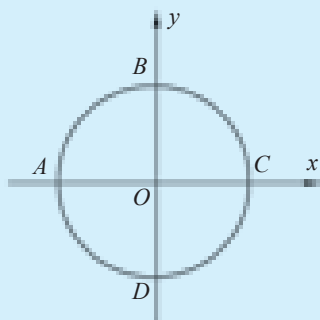
- 指出下列各点的横坐标和纵坐标，并按所在象限将它们进行分类：
 $A(4, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(3, 1)$, $D(-1, -3)$, $E(-2, 1)$, $F(-2, -2)$,
 $G(2, 3)$, $H(4, -1)$.
- 在直角坐标系中描出下列各点，分别将各组中的点顺次连接起来，得到怎样的图形？
 (1) $(-1, -2)$, $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, -2)$;
 (2) $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$, $(2, -2)$, $(1, 0)$.
- 如图，请用两种不同的方式建立直角坐标系，并用坐标表示图形中各顶点的位置.
- 在直角坐标系中，任意选定 A, B 两点，找出分别以 A, B 的横坐标的平均数为横坐标、以 A, B 的纵坐标的平均数为纵坐标的点 C . 你发现 A, B, C 三点的位置有什么关系？
- 填空：



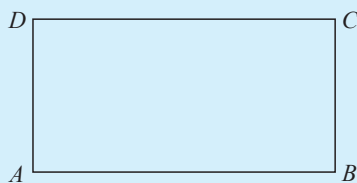
(第3题)

- 如果点 $(a, -b)$ 在第一象限，那么 a ____ 0 , b ____ 0 (填“ $>$ ”或“ $<$ ”);
- 如果点 (a, b) 在第一象限，那么点 $(-b, a)$ 在第 ____ 象限;
- 如果点 (a, b) 在第二象限，那么点 $(b, -a)$ 在第 ____ 象限;
- 如果点 (a, b) 在第四象限，那么点 $(-b, -a)$ 在第 ____ 象限.
- 如图， $\odot O$ 的半径 $r = 4$ ，圆心 O 在直角坐标系的原点， $\odot O$ 与坐标轴分别交于点 A, B, C, D . 写出 A, B, C, D 各点的坐标.

7. 如图, 要在一个尺寸为 80 厘米 $\times$ 40 厘米的长方形木板 $ABCD$ 上钻一个圆孔, 圆孔的圆心为 P , 点 P 到 AD 的距离为 30 厘米, 到 AB 的距离为 15 厘米. 建立适当的坐标系, 以 10 厘米为单位长度, 分别写出圆心 P 及 A, B, C, D 各点的坐标.



(第6题)



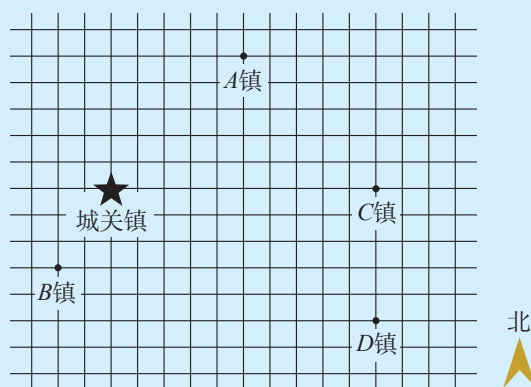
(第7题)

8. 学校位于小亮家北偏东 30° 方向, 距离为 300 米; 学校位于大刚家南偏东 45° 方向, 距离为 400 米. 用刻度尺和量角器, 选择适当的比例尺画出学校和他们两人的家的位置, 并分别求出大刚家相对于小亮家的位置和小亮家相对于大刚家的位置.



拓展与延伸

9. 如图是某县的地图 (局部), 每个小方格的边长表示 3 公里.
- (1) 借助刻度尺和量角器, 描述各镇相对于城关镇的位置. 如果以 C 镇为参照点呢?
 - (2) 分别以城关镇和 C 镇为坐标原点建立直角坐标系, 写出各城镇的坐标.



(第9题)

10. 在直角坐标系中, 有 $A(-2, 3)$, $B(2, -3)$, $C(2, 3)$, $D(-2, -3)$ 四个点.
- (1) 哪个点与点 $F(-3, 4)$ 连接的线段与 x 轴、 y 轴都不相交?
 - (2) 哪个点与点 F 连接的线段只与 x 轴相交, 而不与 y 轴相交?

(3) 哪个点与点 F 连接的线段与 x 轴和 y 轴都相交?



探索与创新

11. 俄国著名作家列夫·托尔斯泰在他的作品中写过一个故事：一个叫巴赫姆的人到草原上购置土地. 卖地的人提出一个奇怪的条件：只要有人肯出 1 000 卢布（俄国货币），从日出到日落买地人走过的路线所围成的土地都归他. 但是，如果日落之前回不到原来的出发点，不但得不到土地，也不退回 1 000 卢布. 贪心的巴赫姆付钱后从一大早就开始他的圈地旅行. 他先向正东方向走了 10 俄里（1 俄里 ≈ 1.067 千米），再朝正北方向走了 12.7 俄里，又朝正西方向走了 2 俄里. 这时，他发现天色不早，就向着出发点直奔而去，终于在日落时跑回出发点，但一头栽在地上，再也没有醒过来.

(1) 请你选择适当的比例尺，画出巴赫姆走过的路线；

(2) 当他发现天色不早时，出发点在他的什么方向？距离出发地有多远（精确到 0.1 俄里）？

12. 如果需要在电话中向一个同学说明如图所示的图形，你将怎样描述才能让他听明白？

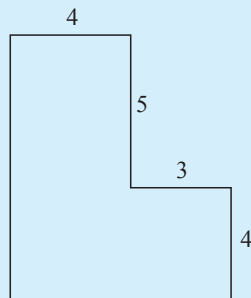
13. 在直角坐标系中，下面各点按顺序依次排列：

$(0, 1), (1, 0), (0, -1), (0, 2), (2, 0),$

$(0, -2), (0, 3), (3, 0), (0, -3), \dots$

(1) 这列点中的第 1 000 个点的坐标是什么？

(2) $(0, 2\,012)$ 是这列点中的第几个点？



(第 12 题)

后 记

这套义务教育七~九年级数学教科书是在原《义务教育课程标准实验教科书 数学（七~九年级）》（青岛出版社 2005年1月第一版）的基础上，依据教育部2011年颁布的《义务教育课程标准》修订完成的。经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过，准许使用。

本套教科书由展涛担任主编，殷建中担任执行主编，参加本册教材编写的有（按姓氏笔画为序）：于沛海、云鹏、李元庆、李师正、李树臣、苗学良、高玉岱、谢廷桢等同志，由李师正担任本册主编。在本套教科书的编写工作中，我们得到了关心我们教材建设的许多专家、学者以及广大数学教育工作者的大力支持和热情帮助。在此，我们一并致谢。

欢迎教师 and 同学们在使用本书过程中，向我们提出改进的意见和建议。

编 者

数 学

SHUXUE



绿色印刷产品

价格批准文号：鲁发改价格核 [2022] 022012

举报电话：12345

ISBN 978-7-5436-3323-0



9 787543 633230 >

定价：10.89 元