

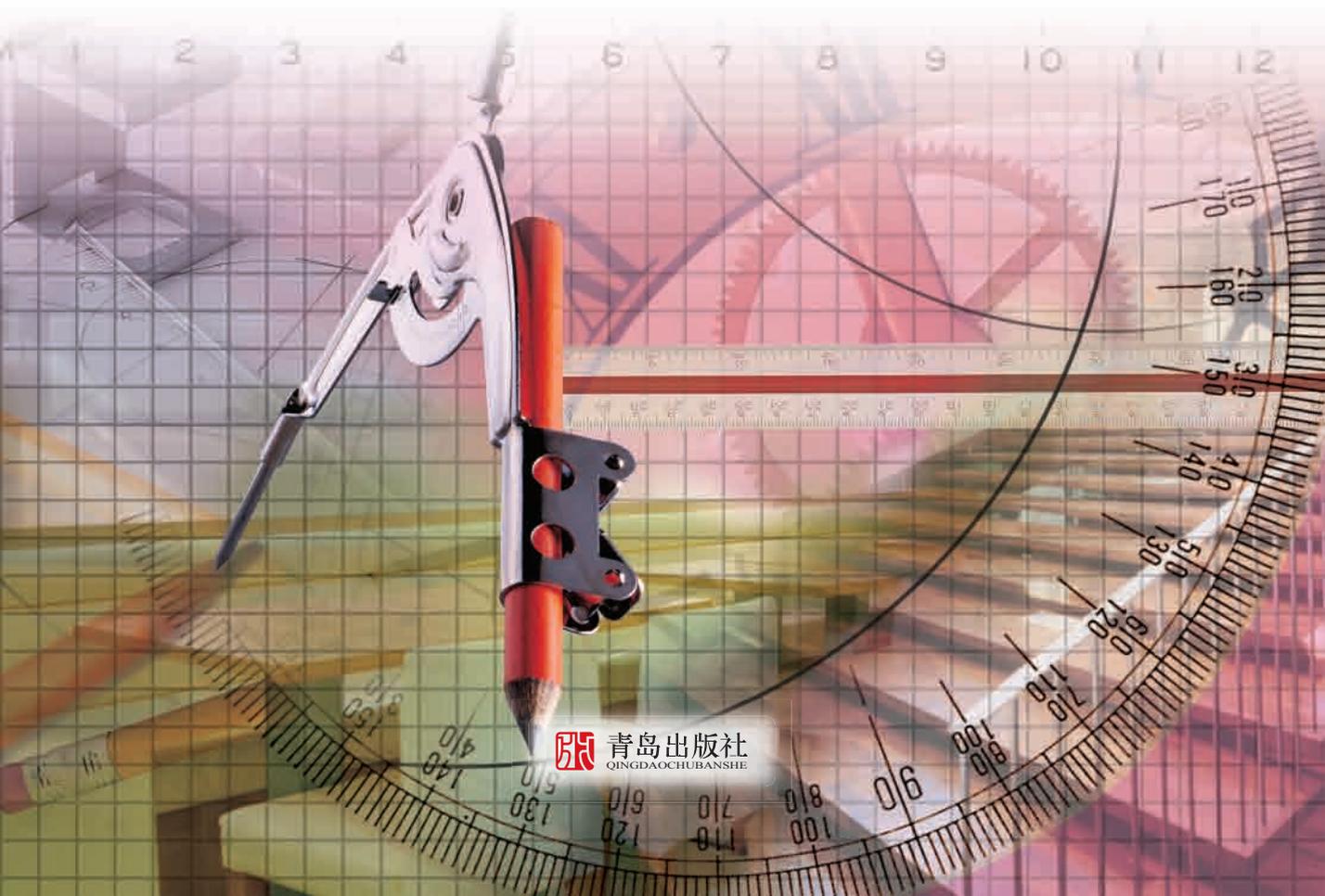


义务教育教科书

数学

七年级 上册

SHUXUE

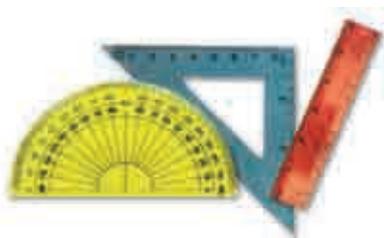


 青岛出版社
QINGDAOCHUBANSHE

义务教育教科书

数 学

七年级 上册



书 名 义务教育教科书 数学（七年级上册）
主 编 展 涛
出版发行 青岛出版社
社 址 青岛市海尔路 182 号（266061）
本社网址 <http://www.qdpub.com>
责任编辑 刘海波 戴振宇
美术编辑 路渊源
制 版 济南汇海科技有限公司
印 刷 日照昆城印业有限公司
出版日期 2012 年 6 月第 2 版 2021 年 6 月第 17 次印刷
开 本 16 开（787mm × 1092mm）
印 张 11.5
字 数 190 千字
书 号 ISBN 978-7-5436-3322-3
定 价 10.66 元
编校质量、盗版监督服务电话 4006532017 （0532）68068670
青岛版图书售出后如发现质量问题，请寄回青岛出版社印刷物资处调换。
电话：（0532）68068629

新学期寄语

同学们，祝贺你进入新的学习阶段，开始了新的学习生活！

数学是伴你成长的朋友。随着年级的增高，你将走进数学花园中一个更美丽的景区，进一步体验、感受、品味数学的美妙，享受数学学习的乐趣。

今天，在地球上任何国度里，数学都是中小学开设的一门主要课程。你想过吗？十几亿儿童都同时在用不同的母语学习同一种科学语言，这就是数学语言！

在本册的第1章，你将来到丰富的图形世界。在观察、操作、探索和交流中，去感受图形世界的绚丽多彩，进一步认识最基本的几何图形——点、线、面、体，了解一些有关直线和线段的基本性质。

学习数学就要经常同数打交道，我们所认识的数的范围一直在逐渐扩大，先认识了整数，又认识了分数，还知道有负数。这学期你将把数的研究范围扩大到有理数。

由数到式是一个飞跃。这学期你将开始学习代数式，用代数式表达数量之间的关系和规律，学会最简单的代数式——整式的加减运算，并将与数学王国的“巨人”——函数初次相遇。

这学期你还将学习“数据的收集、整理与描述”，你将学会收集、整理和分析数据，绘制扇形统计图，使你更好地适应当今社会的需要。

在上一学段你已经认识了方程，这学期你将继续学习一元一次方程。方程是解决生活中某些实际问题的重要工具。学会它，过去一些很难的应用题就可以迎刃而解了！

数学花园中，万紫千红，百花争妍。相信每位同学都会在这里采摘到自己心爱的花朵！

目 录

第1章 基本的几何图形	2
1.1 我们身边的图形世界	4
1.2 几何图形	7
1.3 线段、射线和直线	13
1.4 线段的比较与作法	18
回顾与总结	23
第2章 有理数	26
2.1 有理数	28
2.2 数 轴	31
2.3 相反数与绝对值	36
回顾与总结	39
第3章 有理数的运算	42
3.1 有理数的加法与减法	44
3.2 有理数的乘法与除法	57
3.3 有理数的乘方	66
3.4 有理数的混合运算	73
3.5 利用计算器进行有理数的运算	76
回顾与总结	79
第4章 数据的收集、整理与描述	82
4.1 普查和抽样调查	84
4.2 简单随机抽样	87
4.3 数据的整理	91
4.4 扇形统计图	95
回顾与总结	102

第5章 代数式与函数的初步认识	106
5.1 用字母表示数	108
5.2 代数式	111
5.3 代数式的值	116
5.4 生活中的常量与变量	119
5.5 函数的初步认识	124
回顾与总结	127
综合与实践 你知道的数学公式	130
第6章 整式的加减	134
6.1 单项式与多项式	136
6.2 同类项	139
6.3 去括号	142
6.4 整式的加减	145
回顾与总结	148
第7章 一元一次方程	150
7.1 等式的基本性质	152
7.2 一元一次方程	155
7.3 一元一次方程的解法	158
7.4 一元一次方程的应用	163
回顾与总结	175
后记	179

第1章 基本的几何图形

内容提要

- 我们身边的图形世界
- 几何图形
- 线段、射线和直线
- 线段的比较与作法



情境导航

青岛，美丽的海滨城市。从这幅青岛海滨的照片中，你看到哪些熟悉的图形？让我们一起走进图形世界吧！



1.1 我们身边的图形世界



夜空



建筑群



立交桥



鹦鹉螺



枫叶



蝴蝶

满天星斗的夜空，形形色色的建筑群，各式各样的交通工具和道路，商品琳琅满目的超市，五彩缤纷的自然界……只要你注意观察，就会发现我们生活在一个丰富多彩的图形世界里。



观察与思考

(1) 图1-1是一组物品的图片，这些图片中的物品各具有怎样的形状？



茶叶筒



足球



魔方



漏斗

图 1-1

(2) 在图1-2的四对泥人图片中，各对泥人的形状相同吗？大小相等吗？



图 1-2

如果对于我们看到的物体，只研究它们的形状、大小和位置关系，而不考虑颜色、质量、原料等其他性质时，就得到各种几何体，几何体简称体（solid）。

你熟悉图 1-3 中的各种几何体吗？用线把几何体和它们相应的名称^❶连接起来。

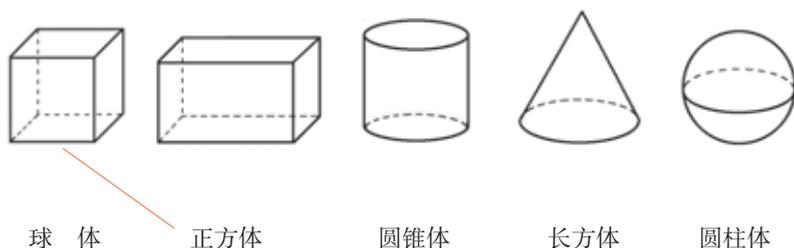


图 1-3

生活中，你随处可以见到平的面的例子。



学校操场



长白山天池

图 1-4

镜面、黑板面、操场、平静的水面等（图 1-4）都给我们以平面的形象。数学上所说的平面（plane）是从所有具备这种形象的实物中抽象出来的，平面没有厚薄，没有边界，是向四面八方无限延展的。

生活中，除了平面的形象外，你还会经常见到曲的面的形象。

❶ 圆柱体简称圆柱（circular cylinder），圆锥体简称圆锥（circular cone），球体简称球（sphere）。



气象站



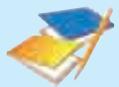
上海大剧院

图 1-5

观察图 1-5 中的两幅图片，你发现哪些面是曲的？

你还能举出表面是曲的实物的例子吗？

体是由面围成的。例如，长方体是由六个平的面围成；圆柱是由两个平的底面和一个曲的侧面围成；球是由一个曲的面围成（图 1-3）。



练习

1. 观察下列实物图片，它们的形状分别类似于哪种几何体？



①



②



③



④

（第 1 题）

① 像长方体；② 像_____；③ 像_____；④ 像_____。

2. 请分别举出生活中见到的物体表面是平面、曲面的例子。



习题 1.1



复习与巩固

1. 指出下列图中哪些面是平的，哪些面是曲的：



瓷坛



鼠标



空竹



窗户

（第 1 题）

2. 观察下列实物图片，你能利用学过的几何体描述图中物体的形状吗？



粮 囤



砝 码



冷藏车厢



储油罐

(第2题)

拓展与延伸

3. 请你举出生活中形状分别为长方体、圆柱、圆锥和球的物体的例子，看谁举出的多。

1.2 几何图形



观察与思考

图 1-6 是一个长方体模型，其中加有阴影的一面的形状是正方形。

(1) 在围成长方体的各个面中，与加有阴影的一面相对的面有几个面？它的形状是什么图形？与它相邻的面呢？

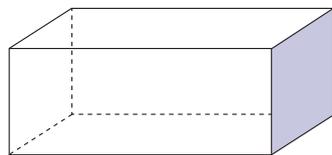


图 1-6

(2) 找出图 1-6 中相邻两个面的交接处，它的形状是什么图形？

在长方体和正方体中，相邻两个面的交接处是一段直的线，我们把它叫做棱（edge）。

在圆柱和圆锥中，侧面与底面的交接处都是圆，圆是一条封闭的曲线。

一般地，两个面的交接处是一条线。线可以是直的，也可以是曲的。数学上所说的线是没有粗细的。

（3）找出图1-6中棱与棱的交接处，它是什么图形？

线与线的交接处是一个点（point）。在长方体（或正方体）中，棱与棱的公共点叫做长方体（或正方体）的顶点（vertex）。

点是组成几何图形的基本元素。数学上所说的点是没有大小的。

（4）数一数，一个长方体有多少条棱，多少个顶点？

点、线、面、体以及它们的组合都是几何图形（geometric figure）。

（5）观察图1-7，你有什么发现？



流星雨



打开的折扇



旋转门

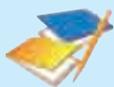
图 1-7

天上一颗颗闪烁的星星给我们以“点”的形象；划过夜空的流星给我们以“点动成线”的形象；打开折扇时，随着扇骨的转动形成一个扇面，给我们以“线动成面”的形象；当宾馆的旋转门旋转时，给我们以“面动成体”的形象。

“点动成线，线动成面，面动成体”的例子很多，你能再举出几个实例吗？

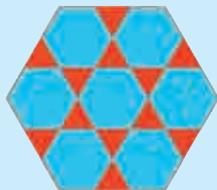
（6）观察图1-6，长方体的各个顶点都在同一个平面内吗？

如果一个几何图形上的点不都在同一个平面内，那么这样的几何图形叫做**立体图形**（solid figure）。1.1节中图1-3列举过的几何体都是立体图形。如果一个几何图形上的所有点都在同一个平面内，那么这样的几何图形叫做**平面图形**（plane figure）。我们学过的线段、角、三角形、正方形、长方形、平行四边形、梯形、圆等都是平面图形。



练习

1. 把铅笔尖看做一个点，让铅笔尖在白纸上移动，你有什么发现？
2. 下列两种现象说明了什么道理？
 - (1) 钟表上的分针转动一周形成一个圆面；
 - (2) 一枚硬币在光滑的桌面上快速旋转形成球。
3. 说一说，右边的图案，是由哪些平面图形组合成的？



(第3题)



实验与探究

(1) 图 1-8 是一个正方体形状的包装盒，它是由几个面围成的？各个面的形状是怎样的平面图形？这些图形的大小和形状都相同吗？

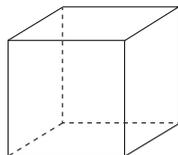


图 1-8

(2) 数一数，正方体有几个顶点？几条棱？这些棱的长短都一样吗？

(3) 正方体的每个顶点处各有几条棱？它们都在同一个平面上吗？

(4) 从包装盒的一个顶点出发，沿它的一些棱剪开（图 1-9）. 想一想，你至少要剪开几条棱就可以把包装盒的各个面铺在同一个平面上？

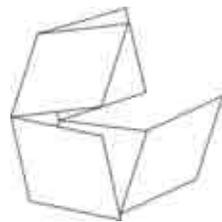


图 1-9

(5) 将正方体包装盒的各面按不同的方向分别标上汉字“上、下、前、后、左、右”. 沿条数最少的棱剪开后，铺在桌面上. 观察你得到的图形的形状，与周围同学得到的平面图形的形状一样吗？它们有哪些相同和不同？与同学交流.

它们都是由大小相同的 6 个正方形所连成的平面图形. 但如果剪开的棱不同，得到的图形中，各正方形排列的情况可能不同.



(6) 图 1-10 是用三种不同的方式画在硬纸板上的六个相连的正方形，用它们都能围成正方体包装盒吗？

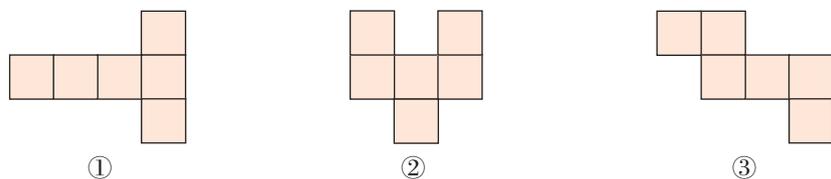


图 1-10

(7) 你能用硬纸板制作一个正方体纸盒吗？试一试。



交流与发现

(1) 图 1-11 是一个利用硬纸板制作正方体的折叠过程。你能说出在图 1-11⑥中，与 1 号面、2 号面、3 号面相对的面各是几号面吗？与同学交流。

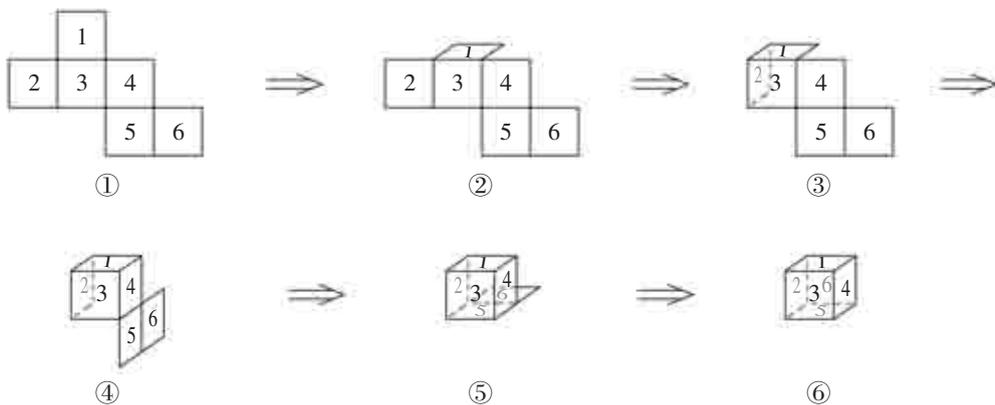
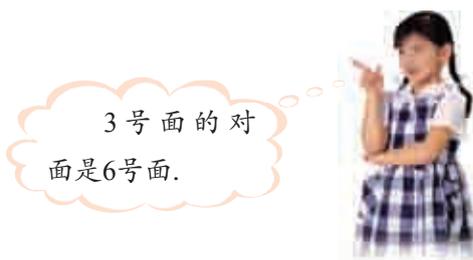


图 1-11

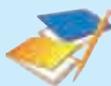


1号面的对面是
5号面，2号面的对
面是4号面。



3号面的对
面是6号面。

(2) 6 个大小相同、连在一起的正方形，如果能折叠成正方体，你发现在这个正方体的各个相对的面之间与原平面图形的各个正方形之间的位置排列存在什么规律？找找看，与同学交流。

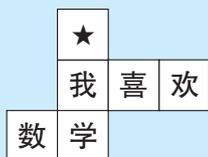


练习

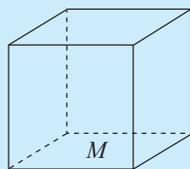
1. 填空:

一个正方体沿它的某些棱展开后, 如图所示.

- (1) 在原来的正方体中, 标有“★”的面所对的面上标的汉字是 _____;
- (2) 如果正方体中“学”所在的面在前面, 从左面看到的字是“我”, 那么从上面看到的字是 _____.



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 有一个无盖的正方体纸盒, 下底面标有字母“M”, 将其沿某些棱剪开展成平面图形, 画出展成的平面图形.



习题1.2



复习与巩固

- 举出生活中“点动成线, 线动成面, 面动成体”的实例.
- 把下列几何图形:

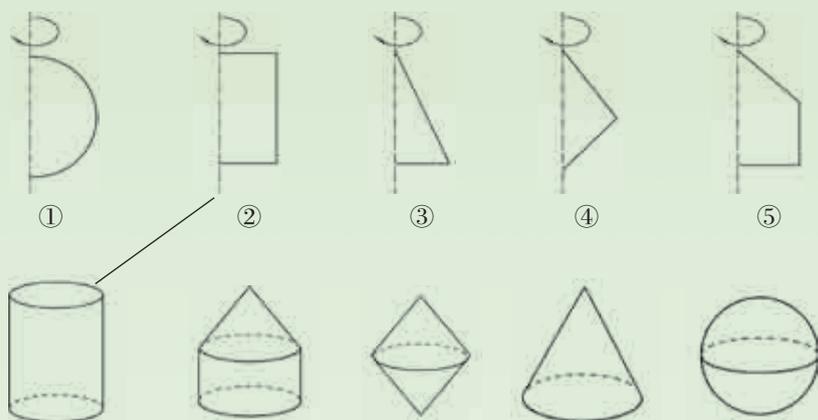
圆 圆柱 球 扇形 等腰三角形 长方体 正方体 直角

分别填到下面的括号里:

立体图形: { _____ ... };

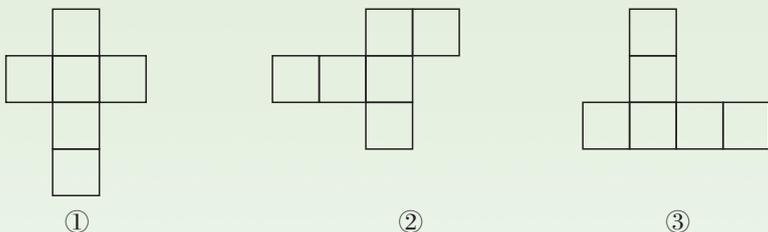
平面图形: { _____ ... }.

- 将下列第一行中的各个平面图形分别绕图中的虚线(轴线)旋转一周, 就得到第二行的立体图形. 你能分别把每个平面图形与由它旋转得到的立体图形用线连接起来吗?



(第3题)

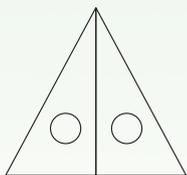
4. 下面的图形中, 哪些是正方体表面的展开图?



(第4题)

拓展与延伸

- 如图, 将两个相同三角尺的相等的边拼在一起可构成一个等腰三角形. 请你另外再拼出几个不同的平面图形, 并说出图形的名称.
- 从如图所示的 13 个无字的正方形中, 留下 2 个, 将其余 11 个无字的正方形剪去, 使这两个正方形与 4 个写有“勤”、“思”、“善”、“学”的正方形一起, 折叠后能围成一个正方体.



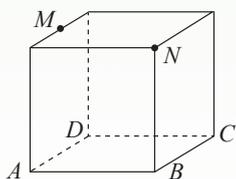
(第5题)



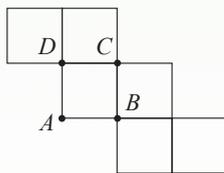
(第6题)

探索与创新

7. 正方体(图①)的表面展开图如图②所示. 根据图①, 在图②中确定点M, N的位置.



①



②

(第7题)

1.3 线段、射线和直线

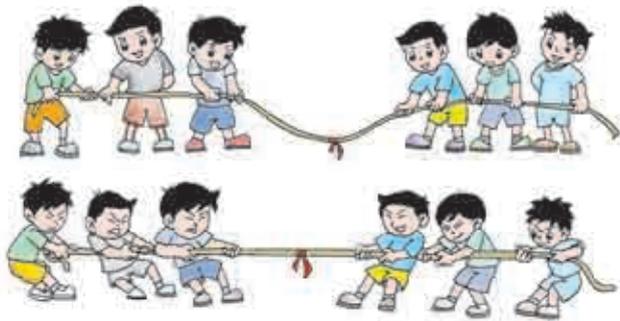


图 1-12

观察上面的图片（图 1-12），并回答问题：

- (1) 同学们没有用力拔河时，绳子是直的还是曲的？
 - (2) 当同学们用力拔河时，绳子拉紧的部分是直的还是曲的？
- 拔河时，拉直的绳子给远处的观众一条线段的形象。

线段 (line segment) 有两个端点. 将线段向一个方向无限延伸就得到**射线** (ray). 射线有一个端点. 把线段向两个方向无限延伸, 就得到**直线** (straight line). 直线没有端点.



射线、线段都是直线的一部分。



图 1-13

在数学上，点用一个大写字母表示. 例如，图 1-13 中的两个点可以分别记作点 A 、点 B .

线段、射线、直线都可以用两个大写字母表示. 例如，图 1-14 中的线段可以记作线段 AB 或线段 BA ，其中 A ， B 表示线段的端点；图 1-15 中的射线可以记作射线 AB ，其中第一个字母表示射线的端点，第二个字母表示射线上的任意一点；图 1-16 中的直线可以记作直线 AB 或直线 BA ，其中 A ， B 表示直线上的任意两点.

线段、射线、直线还可以分别用一个小写字母表示,如线段 a (图1-14)、射线 l (图1-15)、直线 m (图1-16)等.

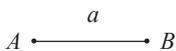


图 1-14

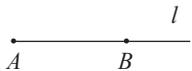


图 1-15



图 1-16

例1 如图1-17, A, B, C 是直线 l 上的3个点.

- (1) 图中共有几条线段? 这些线段怎样表示?
- (2) 图中以点 B 为端点的射线有几条? 怎样表示?
- (3) 直线 l 还可以怎样表示?

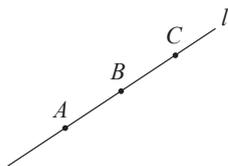


图 1-17

解 (1) 图中共有3条线段, 分别表示为线段 AB (或线段 BA)、线段 AC (或线段 CA)、线段 BC (或线段 CB).

(2) 图中以点 B 为端点的射线有两条, 分别表示为射线 BA 与射线 BC .

(3) 直线 l 还可以表示为直线 AB (或直线 BA)、直线 AC (或直线 CA)、直线 BC (或直线 CB).



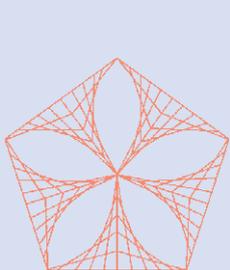
智趣园

以直“绣”曲

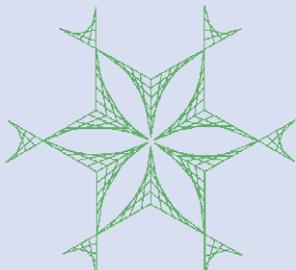
工厂烟囱的横截面多数是圆形的. 然而它竟是工人师傅用一块块长方体形的砖砌成的. 你仔细看过绣有图案的针织品吗? 图案中每一条美丽的曲线竟然都是由一条条彩色线段绣成的.

图1-18中的三个图案似乎都是由一些曲线组成的, 但仔细观察可以发现, 它们的局部都是由一些很短的线段组成的, 有趣吧?

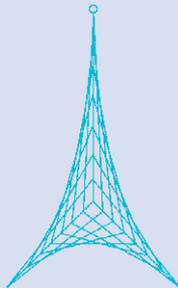
在一定的条件下, 曲、直不再分明, 曲、直可以相互转化. 在数学中, 常常借助直线研究曲线. 离开了“直”就难以研究“曲”. 我国魏晋时期的刘徽(公元263年前后), 就是沿着这个思路创造出了著名的“割圆术”.



梅花盛开



群鱼争食



铁塔高耸

图 1-18

在图 1-19 中, 请你将正方形的两条邻边上用相同的数所表示的点用线段分别连接起来, 看看会得到一个什么样的图案.

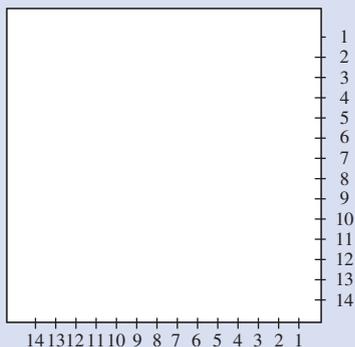
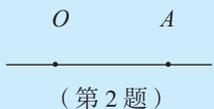


图 1-19

练习

1. 说出直线、射线、线段的区别和联系.
2. 如图, 射线 OA 与射线 AO 相同吗? 如果不同, 它们的区别在哪里?
3. 用直尺画图: 如图, 已知线段 AB , 延长线段 AB , 得到射线 AB .



观察与思考

图 1-20 是高压电线和几只麻雀. 如果将电线看做直线, 把麻雀看做点, 那么一个点与一条直线有几种位置关系?



图 1-20

一个点 P 与一条直线 l 的位置关系有两种:

- (1) 如图 1-21①, 点 P 在直线 l 上, 或者说直线 l 经过点 P ;

(2) 如图1-21②, 点 P 在直线 l 外, 或者说直线 l 不经过点 P .



图 1-21



实验与探究

用直尺过点作直线, 试一试. 过一点 A 能作几条直线? 过两点 A 、 B 能作几条直线?

经过一点可以作无数条直线. 经过两点能且只能作一条直线(图1-22), 也就是说

两点确定一条直线.

如果两条直线经过同一个点, 就称这两条直线相交; 这时两条直线有唯一的公共点, 这个公共点叫做它们的交点. 在图1-23中, 直线 AB 与 CD 相交, 点 O 是它们的交点.

想一想, 平面上的两条直线, 除相交之外, 还有其他的位置关系吗?

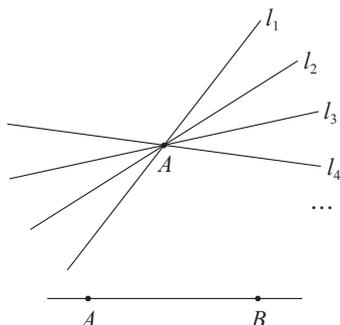


图 1-22

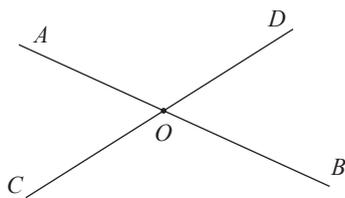


图 1-23

平面上的两条直线, 有相交与不相交两种位置关系.

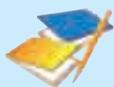


挑战自我

(1) 两条直线相交, 能不能有两个交点? 为什么?

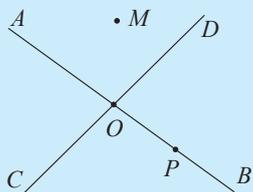
(2) 平面上的2条直线, 最多有1个交点; 3条直线, 最多有3个交点; 平面上有4条直线, 最多有几个交点? 画一画.

(3) 如果平面上有5条直线, 最多有几个交点? 你发现了什么规律? 与同学交流.



练习

- 要在墙上钉一根横木条，至少要钉几个钉子才能将横木条固定？为什么？
- 用语言描述图中的两条直线、直线与点 P 、点 M 的位置关系：直线_____与_____相交于点_____；点 P 在直线_____上，或者说直线 AB 经过点_____；点 M 在直线 CD _____，或者说直线 CD _____点 M 。
- 作出符合下列要求的图形：
 - 直线 AB 经过点 C ；
 - 点 D 不在直线 FE 上；
 - 直线 a, b 都过点 G ；
 - 直线 m, n, l 相交于点 P 。



(第2题)

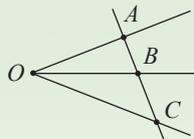


习题1.3



复习与巩固

- 按照图形填空：
 - 图中以点 O 为端点的射线有_____条，分别是_____；
 - 图中以点 B 为端点的线段有_____条，分别是_____；
 - 图中共有_____条线段，分别是_____。
- 如图，回答下列问题，并说明为什么：
 - 射线 OA 与射线 OB 是同一条射线吗？
 - 射线 OA 与射线 AB 是同一条射线吗？
 - 射线 OA 与射线 AO 是同一条射线吗？

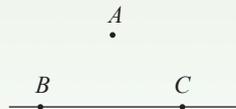


(第1题)



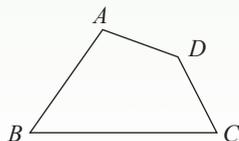
(第2题)

- 按照图形填空：
 - 点 A 在直线 BC _____；
 - 点 C 在射线 BC _____；
 - 点 B 是线段 BC 的一个_____。



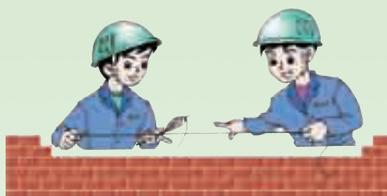
(第3题)

- 如图，平面内的线段 AB, BC, CD, DA 首尾相接，按照下列要求画图：
 - 连接 AC, BD 相交于点 O ；
 - 分别延长线段 AD, BC 相交于点 P ；
 - 分别延长线段 BA, CD 相交于点 Q 。



(第4题)

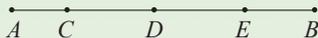
5. 如图, 工人师傅在砌墙时, 先在两端各固定一点, 中间拉紧一条细线, 然后沿着细线砌墙就能砌直. 为什么?



(第5题)

拓展与延伸

6. 数一数, 图中共有多少条不同的线段? 把它们分别写出来.

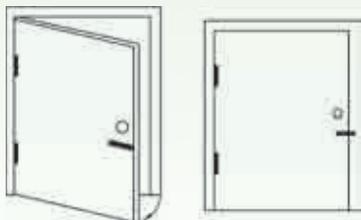


(第6题)

7. 经过平面内 A, B, C, D 四个点中的每两点作一条直线, 小莹说能作出 6 条直线, 小亮说不一定. 说说你的看法.

探索与创新

8. 用两个合页将房门的一侧安装在门框上, 房门可以绕门框转动. 将房门另一侧的插销插在门框上, 房门就被固定住 (如图). 如果把房门看做一个“平面”, 两个合页和插销都看做“点”, 那么:



(第8题)

- (1) 这三个点是否在同一条直线上?
- (2) 从上面的事实可以得到一个结论:
不在_____确定一个_____.
- (3) 你还能举出生活中运用上述结论的例子吗?

1.4 线段的比较与作法



实验与探究

如图 1-24, 你是怎样比较两支铅笔的长短的? 类似地, 怎样比较两条线段的长短呢?



图 1-24

要比较两条线段 AB 与 CD 的长短, 可以把其中的一条线段 AB 移到另一条线段 CD 上, 使点 A 和点 C 重合. 如果点 B 落在 C, D 之间 (图 1-25 ①), 那么就说线段 AB 小于线段 CD , 记作 $AB < CD$; 如果点 B 和点 D 重合 (图 1-25 ②), 那么就说线段 AB 等于线段 CD , 记作 $AB = CD$; 如果点 B 落在线段 CD 的延长线上 (图 1-25 ③), 那么就说线段 AB 大于线段 CD , 记作 $AB > CD$.

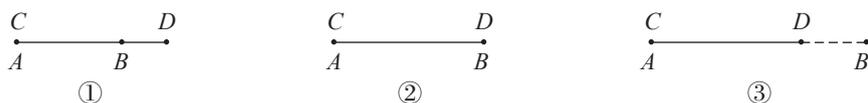


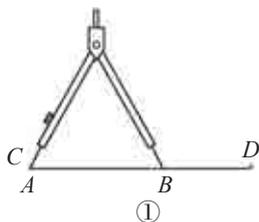
图 1-25

同样, 把线段 CD 移到线段 AB 上, 也可以比较这两条线段的长短.

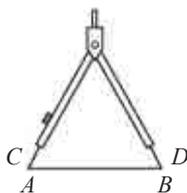
实际比较两条线段 AB 与 CD 的长短, 还可以借助圆规来进行, 如图 1-26、图 1-27 所示. 你能说明这种方法和它的道理吗?



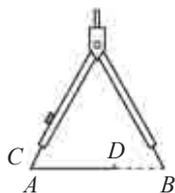
图 1-26



①



②



③

图 1-27



交流与发现

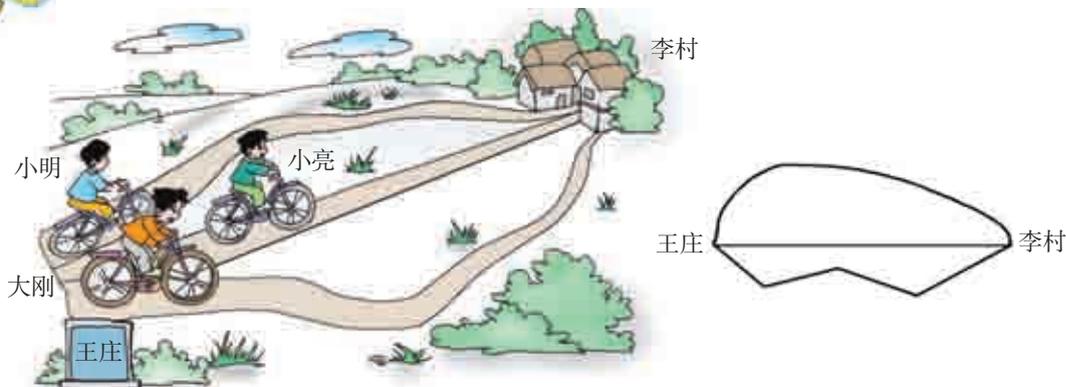


图 1-28

如图 1-28, 从王庄到李村有三条路. 小明、小亮和大刚分别骑自行车从王庄出发, 沿不同的路去李村, 谁走的路近?

由生活经验可以知道, 小亮走的路近. 如果把图 1-28 中的各条道路拉直, 并把它们都看成是线段, 然后比较这些线段的大小, 可以知道小亮走的直路确实最短. 这就是说, 两点间所有连线中线段最短, 可以简单说成

两点之间线段最短.

两点之间线段的长度,叫做这两点间的距离(distance).

现实生活中,测量两点间距离的方法很多,可以借助工具(如刻度尺、卷尺、游标卡尺等)进行度量,或利用某些仪器(如红外线测距仪、激光测距仪、水平仪、经纬仪、天文望远镜、雷达等)进行测量.

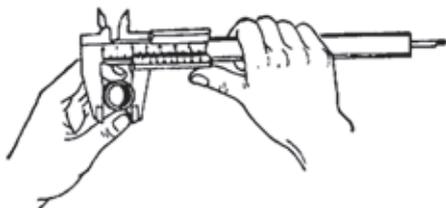


图 1-29 游标卡尺

例1 如图 1-30, 比较点 A , B 和 C 两两之间距离的大小.

解 连接 AB , BC , CA . 用刻度尺量得线段 AB

$= 2.6$ 厘米, 线段 $BC = 2.4$ 厘米, 线段 $CA = 2.2$ 厘米,

因为 2.2 厘米 < 2.4 厘米 < 2.6 厘米,

所以 $CA < BC < AB$.

你还有其他的比较方法吗? 与同学交流.

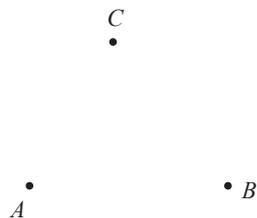
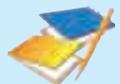


图 1-30

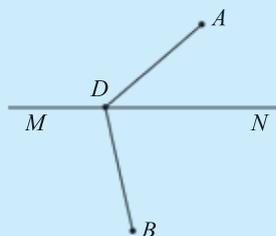


练习

1. 比较两条线段 AB 与 CD 的长短, 结果可能有几种情形? 画图说明.
2. 下列叙述正确吗? 为什么?

- (1) 线段 AB 叫做 A , B 两点间的距离;
- (2) 经过点 A 和点 B 的直线的长度叫做 A , B 两点间的距离.

3. 如图, MN 表示一条河流, A , B 两点表示两个村庄, 它们分别在河流两旁. 现准备在河上建一座桥, 使两村人们来往最便捷. 小亮想, 如果能在 MN 上找到一点 D , 使 D 点与 A , B 两点的距离相等, 那么, 在 D 点建桥最合理. 你认为他的想法正确吗? 为什么?



(第 3 题)

例2 用直尺和圆规作一条线段, 使它等于已知线段.

已知: 线段 a (图 1-31).

求作: 线段 AB , 使 $AB = a$.

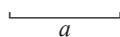


图 1-31

作法 (1) 用直尺作射线 AC .

(2) 用圆规在射线 AC 上截取 $AB = a$ (图 1-32).

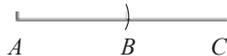


图 1-32

线段 AB 就是与线段 a 相等的线段.

如图 1-33, 已知线段 a, b ($a > b$). 用圆规在射线 AE 上截取线段 $AB = a$, 再在 AB 的延长线上截取线段 $BC = b$, 线段 AC 就是线段 a 与 b 的和, 记作 $AC = a + b$. 如果在线段 AB 上截取线段 $BD = b$ (图 1-34), 那么线段 AD 就是线段 a 与 b 的差, 记作 $AD = a - b$.

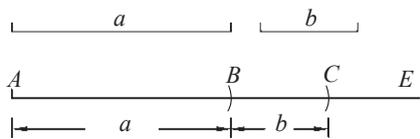


图 1-33

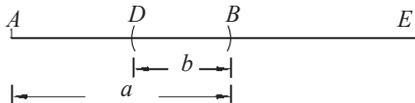


图 1-34

利用例 2 中的方法, 可以作出两条线段的和与差.



实验与探究

如图 1-35, 要把一根条形木料锯成长度相等的两段, 应该从何处锯断?



图 1-35

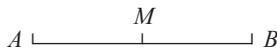


图 1-36

如图 1-36, 如果点 M 把线段 AB 分成相等的两条线段 AM 与 BM , 那么点 M 叫做线段 AB 的中点 (midpoint). 这时 $AM = BM = \frac{1}{2} AB$, 或 $AB = 2AM = 2BM$.

类似地, 将线段 AB 分成相等的三条线段 AM, MN, NB , 得到三等分点 M, N . 还可以得到四等分点等 (图 1-37).

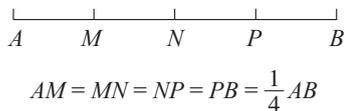
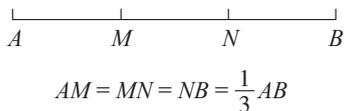
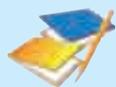


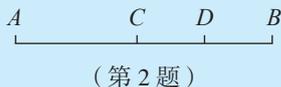
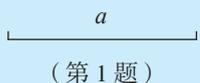
图 1-37

任意画一条线段 AB , 你会用刻度尺画出它的中点吗? 它的三等分点、四等分点呢? 试一试, 并与同学交流.



练习

1. 已知线段 a , 用直尺和圆规作一条线段 AB , 使它的长度等于 $2a$.
2. 如图, D 为线段 CB 的中点, $AD = 8$ 厘米, $AB = 10$ 厘米, 求 CB 的长度.

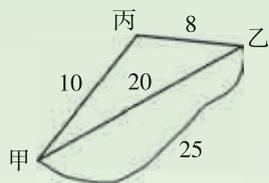


习题1.4



复习与巩固

1. 从甲村到乙村有三条路, 其中一条要经过丙村. 小莹在纸上画出了示意图(如图), 并注明了村与村之间道路的长度(单位: 千米). 小亮认为她画的示意图有错误, 说说你的看法.



(第1题)

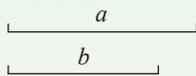
2. 如图, C, D 是线段 AB 延长线上的两点, 填空:

- (1) $AB = AD - (\quad)$; (2) $AC = AD - (\quad)$;
 (3) $BC + CD = (\quad) - AB$.



(第2题)

3. 已知线段 $AB = 4$ 厘米, C 为直线 AB 上的一点, 且 $BC = 3$ 厘米. 那么 AC 的长度是多少? 画图说明.
4. 如图, 已知线段 a, b , 且 $a > b$, 用直尺和圆规作一条线段, 使它等于 $3a - b$.
5. 已知 C 是线段 AB 上的一点, $AC = 5$ 厘米, $CB = 3$ 厘米, M 是 AB 的中点. 画出符合要求的图形, 并求出 MC 的长.
6. 按下列要求画图, 并回答问题: 画线段 $AB = 1.5$ 厘米, 延长线段 AB 到 C , 使 $BC = 1$ 厘米, 再反向延长线段 AB 到 D , 使 $DA = 1.5$ 厘米. 这时线段 DC 的长是多少?



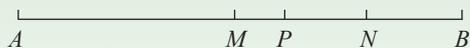
(第4题)



拓展与延伸

7. 如图, 已知线段 $AB = 20$ 厘米, M 是 AB 的中点, P 在 MB 上, N 为 PB 的中点, $NB = 4$ 厘米, 求 PM 的长.
8. 如图, 点 B, C 在线段 AD 上.
 - (1) 如果 $AB = CD$, 那么 $AC = BD$ 吗? 为什么?

(2) 如果 $AC = BD$, 那么 $AB = CD$ 吗? 为什么?



(第7题)



(第8题)



探索与创新

9. 已知线段 AB 和 BC 在同一条直线上, 线段 $AB = 6$ 厘米, $BC = 3$ 厘米, 点 M, N 分别是线段 AB 的三等分点, 点 D 是线段 BC 的中点, 求线段 MD 的长.



回顾与总结

- 本章学习了哪些主要内容? 总结一下, 与同学交流.
- 面包括平面和曲面. 如果一个几何图形上的点都在同一个平面内, 那么这个图形是平面图形. 例如, 三角形、_____等都是平面图形; 如果一个几何图形上的点不都在同一个平面内, 那么这个图形是立体图形. 例如, _____和_____等都是立体图形.
- 直线、射线和线段的区别如下(请补充填空):

名称	图形和表示法	端点数	长度
直线	$\underline{\quad\quad\quad}$	无	可向两方无限延伸, 不能度量
射线	$\underline{\quad\quad\quad}$		
线段	$\underline{\quad\quad\quad}$		有限长, 能度量

- 经过两点有且只有一条直线, 即两点确定一条直线.
- 两点之间线段最短. 两点之间线段的长度, 叫做这两点间的距离.
- 用圆规或刻度尺可以比较线段的长短, 作出或画出已知线段的和、差、倍、分.
- 如果点 B 把线段 AC 分成两条相等的线段, 那么点 B 叫做_____, 记作_____.



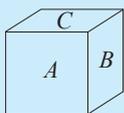
综合练习



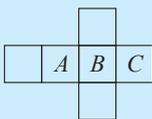
复习与巩固

1. 选择题:

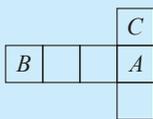
(1) 下列四个正方体的表面展开图中, 能折叠成正方体①的是 ().



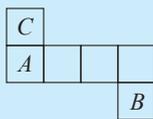
①



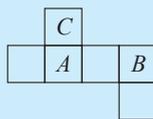
(A)



(B)



(C)



(D)

(2) 下列说法中, 正确的是 ().

(A) 延长直线 AB

(B) 延长射线 OA

(C) 延长线段 AB 至 C , 使 $AC = BC$

(D) 反向延长线段 AB 至 C , 使 $AC = AB$

(3) 下列说法中, 正确的是 ().

(A) 在所有连接两点的线中, 直线最短

(B) 线段 AB 与线段 BA 是不同的两条线段

(C) 如果点 P 是线段 AB 的中点, 那么 $AP = BP$

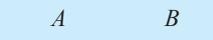
(D) 如果 $AP = BP$, 那么点 P 是线段 AB 的中点

2. 在下面几种直线的表示法中, 正确的表示法有哪些?



直线 A

①



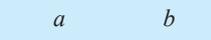
直线 AB

②



直线 a

③

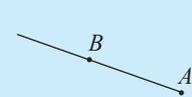


直线 ab

④

(第2题)

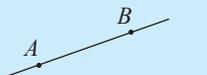
3. 下列各图中, 有交点的图形有哪些?



①



②



③



④

(第3题)

4. 如图, A, B, C 是同一直线上的三个点. 图中共有几条射线? 在不增加字母的情况下, 能表示出的射线共几条? 是哪几条?



(第4题)

5. 如图, 写出图中所有的线段.

6. 比较图中下列线段的大小 (填 “<”, “>” 或 “=”):

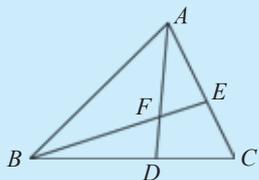
(1) AD _____ BC ;

(2) AB _____ CD ;

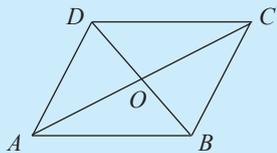
(3) AC _____ BD ;

(4) AO _____ CO .

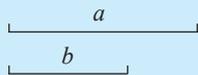
7. 如图, 已知线段 a, b ($a > b$), 作一条线段使它等于 $2(a - b)$.



(第 5 题)



(第 6 题)



(第 7 题)

8. 为了检验你与其他同学的目测能力, 每人可以先目测教室的长和宽, 记录下来, 再用卷尺量一量实际距离, 看看谁目测得准确一些.

拓展与延伸

9. 有两根木条, 一根长 60 厘米, 一根长 100 厘米. 如果将它们放在同一条直线上, 并且使一个端点重合, 这两根木条的中点之间的距离是多少? 为什么?

10. 已知线段 AB , 在 AB 的延长线上取一点 C , 使 $BC = AB$; 再在 BA 的延长线上取一点 D , 使 $DA = 2AB$.

(1) 线段 AC 等于线段 AB 的几倍?

(2) 线段 AB 等于线段 BD 的几分之几?

(3) 线段 DB 等于线段 DC 的几分之几?

探索与创新

11. 已知线段 AB 的长度为 10 厘米, C 是线段 AB 的中点, E, F 分别是 AC, CB 的中点, 求 E, F 两点间的距离. 如果 AB 的长度为 16 厘米、30 厘米呢? 由此可以发现什么结论?

12. 如图, 在一条公路上有四个车站, 依次为 A, B, C, D . 现在准备在 AD 路段上建一个加油站 M , 要求使 A, B, C, D 各站到加油站 M 的总路程最短. 加油站 M 应建在何处?

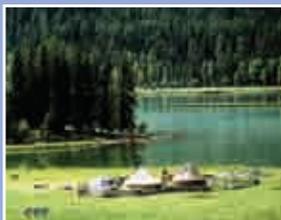


(第 12 题)

第2章 有理数

内容提要

- 有理数
- 数轴
- 相反数与绝对值



乌鲁木齐 $-13\sim-7^{\circ}\text{C}$



兰州 $-5\sim6^{\circ}\text{C}$



拉萨 $-6\sim6^{\circ}\text{C}$



重庆 $7\sim9^{\circ}\text{C}$



广州 $10\sim18^{\circ}\text{C}$





哈尔滨 $-19\sim-7^{\circ}\text{C}$



北京 $-8\sim7^{\circ}\text{C}$



济南 $-2\sim9^{\circ}\text{C}$



上海 $0\sim8^{\circ}\text{C}$



台北 $15\sim18^{\circ}\text{C}$

情境导航

这是一月份某天我国部分城市地面气温的预报图。请读出北京、哈尔滨、济南、兰州、上海、拉萨、乌鲁木齐、重庆、广州、台北的最低气温，并将这些最低气温按照从低到高的顺序排列起来。

2.1 有理数

在上一学段，我们已经认识了负数，会用正数和负数表示日常生活中的一些量. 例如：

某种家用电冰箱的说明书上写着：在使用时，冰箱冷藏室的温度为 $+2^{\circ}\text{C}$ ，冷冻室的温度为 -18°C .

上海市 2010 年户籍人口出生率为 $+7.13\%$ ，自然增长率为 -0.60% .

北京与东京的时差（单位：时）为 $+1$ ，与巴黎的时差为 -7 .

你能说出上面这些带有“+”号或“-”号的数的意义吗？与同学交流.

生活中有不少具有相反意义的量，如，“零上温度”与“零下温度”，“增长”与“减少”，“上升”与“下降”等. 为了区别具有相反意义的量，我们把其中一种意义的量规定为正的，把与它相反意义的量规定为负的. 例如，如果把高出海平面记为正，低于海平面记为负，那么海上钻井平台的井架顶端高出海平面 50 米记作 $+50$ 米，井架底端低于海平面 10 米记作 -10 米.



图 2-1

一个数前面带有的“+”号或“-”号是这个数的符号. 正数前面的正号“+”可以省略不写.



你会用正数、负数表示下列问题中的数据吗？

(1) 据国家统计局 2011 年 2 月 28 日公布的数据：2010 年全国固定电话用户比 2009 年减少 1 935 万户，移动电话用户新增 11 179 万户.

(2) 在学校乒乓球选拔赛中，小亮赢了 4 局，输了 3 局.

我国《2010 年国民经济和社会发展统计公报》中关于全国主要农产品的产

量的统计数据如下：

主要农产品	产量/万吨	年增长率/%
粮 食	54 641	2.9
棉 花	597	-6.3
肉 类	7 925	3.6
茶 叶	145	6.4
油 料	3 239	2.7
糖 料	12 045	-1.9
烤 烟	271	-3.9

从表中的年增长率可以看出，粮食总产量比上年增长 2.9%，棉花产量比上年减少 6.3%，肉类产量比上年增加 3.6%，糖料产量比上年减少 1.9%。

你知道表中年增长率一栏所列出的其他数据的含义吗？与同学交流。

例1 下列各数哪些是正整数？哪些是负整数？哪些是正分数？哪些是负分数？

$+5, -7, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, +5.2, 0, 89, -\frac{3}{4}, \frac{8}{5}, -1.5, -100.$

解

正整数： $+5, 89$ ；

负整数： $-7, -100$ ；

正分数： $\frac{1}{2}, +5.2, \frac{8}{5}$ ；

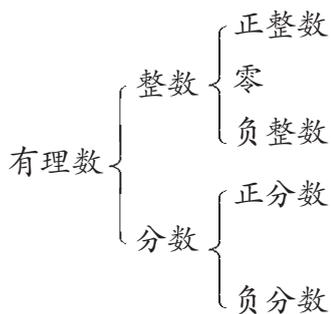
负分数： $-\frac{1}{6}, -\frac{3}{4}, -1.5.$

0既不是正数，
也不是负数。



正整数、零和负整数统称**整数** (integer)，正分数和负分数统称**分数** (fraction)。整数和分数统称**有理数** (rational number)。

这就是说，

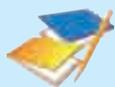


学习了负数，
数的范围扩大到了
有理数。



挑战自我

你还会按照其他标准对有理数进行分类吗？与同学交流。



练习

1. 用正、负数表示下列问题中的数据:

- (1) 水文站在记录水位变化时, 将水位上升记为正. 水位上升 2.5 米记作_____, 水位下降 1.8 米记作_____, 水位不升也不降记作_____;
- (2) 如果收入记为正, 那么某人收入 1 200 元记作_____, 支出 800 元记作_____;
- (3) 如果弹簧伸长记为正, 那么弹簧伸长 3 厘米记作_____, 缩短 2 厘米记作_____;
- (4) 如果物价上升记为正, 那么 7 月原油价格较上月下降 0.4% 记作_____, 较上年同期上升 9.6% 记作_____.

2. 把下列各数分别填在合适的括号内:

$$-8, 10.5, -\frac{3}{2}, 0, 13, -0.5, 6.$$

整数: { ... }

分数: { ... }

负数: { ... }



习题2.1



复习与巩固

1. 举出生活中具有相反意义的量, 并分别用正、负数表示出来.

2. 用正、负数表示下列问题中的数据:

- (1) 节约水 10 立方米, 浪费水 0.5 立方米;
- (2) 向油罐车里注入汽油 4 吨, 放出汽油 1.8 吨;
- (3) 南极大陆中部某地的年平均气温为零下 56°C , 最低气温曾达到零下 88.3°C ;
- (4) 北京市高出海平面 52.3 米, 吐鲁番盆地低于海平面 155 米.

3. 下列各数, 哪些是整数? 哪些是负分数?

$$10.1, -\frac{1}{6}, 86, 0, -0.67, -7, \frac{3}{5}, -0.5, 12\%.$$

4. 一袋洗衣粉的质量比标准质量多 3 克记作 +3 克, 那么 -4 克表示什么意义?

5. 一个点在水平直线上移动, 如果规定向右移动为正, 那么:

- (1) 该点向右移动 3 厘米应记作什么?
- (2) 该点向左移动 5 厘米应记作什么?
- (3) 该点移动 -3.5 厘米的含义是什么?

(4) 该点移动0厘米的含义是什么?

拓展与延伸

6. 下表记录了某天同一时刻世界部分城市与北京的温差.

城市	莫斯科	曼谷	纽约	悉尼	新加坡	上海	伦敦	巴黎
温差/ $^{\circ}\text{C}$	-14	12	-2	-4	11	6	-6	-5

表中 -14°C 表示莫斯科的气温比北京低 14°C . 根据上表回答下列问题:

- (1) 在这些城市中, 哪些城市的气温高于北京的气温? 哪些城市的气温低于北京的气温?
 - (2) 在这些城市中, 哪个城市的气温最高? 哪个城市的气温最低?
7. “数‘0’仅仅表示‘没有’”这句话对吗? 为什么?

探索与创新

8. 把下列各数按照两种不同的标准进行分类:

$$-3.4, -0.3, 0.5, 4.8, 0, 6, -\frac{3}{6}, -6, 20\%, \frac{1}{2}.$$

9. “一只闹钟走动一昼夜误差不超过20秒”的含义是什么? 你能用正负数把它表示出来吗?

2.2 数轴



观察与思考

- (1) 图2-2是一只水平放置的温度计, 你能读出温度计上显示的温度吗?

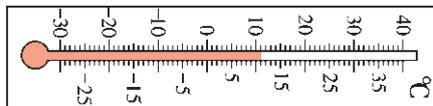


图 2-2

- (2) 你能在图2-3、图2-4上分别标出表示 0°C 和 -13°C 的位置吗?

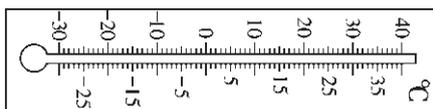


图 2-3

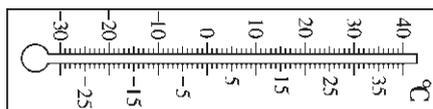


图 2-4



温度计可以把测得的温度直观、形象、简明地显示出来.

能否像温度计那样,把有理数用一条直线上的点表示出来呢?



(3) 按以下步骤画图:画一条直线(一般把它画成水平的);在这条直线上任意取一点作为**原点**(origin),用这个点表示数0;选取适当的长度作为单位长度;规定直线的-一个方向(习惯上取从左向右的方向)为正方向;按照取定的单位长度,利用圆规在这条直线原点的右边依次标记+1, +2, +3, ..., 在原点的左边依次标记-1, -2, -3, ... (图2-5).

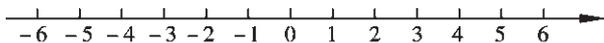


图 2-5

(4) 你能用上面这条直线上的点表示一个给定的有理数吗?比方说, +4 和 -3.5. 与同学交流.

如图2-6, +4用这条直线上位于原点右边4个单位长度的点A表示, -3.5用位于原点左边3.5个单位长度的点B表示.

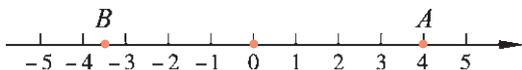


图 2-6

像这样规定了原点、单位长度和正方向的直线叫做**数轴**(number axis).

建立了数轴,有理数就可以用数轴上的点来表示了.



例1 画出数轴,并用数轴上的点表示下列各数:

2, -1.5, 0, 3.5, -4.

解

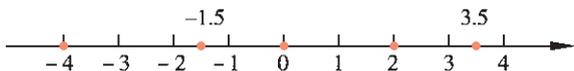
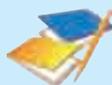


图 2-7

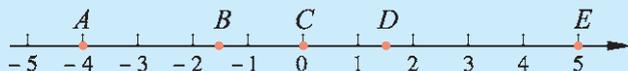


练习

1. 下面画出的四条直线中，哪条是数轴？为什么？



2. 指出下图中数轴上的点 A , B , C , D , E 分别表示的有理数：



(第2题)

3. 画出数轴，并用数轴上的点表示下列各数：

-3 , 2.5 , 0 , $-\frac{3}{4}$, $+4$, -2 .



交流与发现

(1) 你能解答本章“情境导航”中的问题吗？

由章头图可以看出，北京、济南、兰州、上海、拉萨、重庆、广州当天的最低气温分别是_____。

(2) 将这些最低气温按从低到高的顺序排列起来，依次是：

_____。

(3) 在图2-8所示的数轴上，把上面这些气温表示出来：

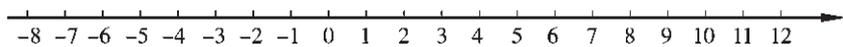


图2-8

(4) 在数轴上，表示北京和济南当天最低气温的点，它们在原点的左边，还是在右边？表示重庆和广州最低气温的点呢？由此，你有什么发现？



在数轴上，表示正数的点都在原点的右边，表示负数的点都在原点的左边。

(5) 你发现表示上述7个城市的当天最低气温的点在数轴上的排列顺序有什么规律?

(6) 一般地, 你能利用数轴比较有理数的大小吗? 与同学交流.

在数轴上, 表示这些气温的点按照气温由低到高的顺序由左向右依次排列.



在数轴上, 右边的点所表示的数比左边的点所表示的数大.

由此得到:

正数大于0, 负数小于0, 正数大于一切负数.

例2 在下列各题中的空格处, 分别填上大于号或小于号 (“>” 或 “<”), 并说明理由.

- (1) 2.5 _____ 0 ; (2) -1 _____ 0 ;
 (3) 1 _____ -100 ; (4) -3 _____ -2 .

解 (1) $2.5 > 0$ (正数大于0);
 (2) $-1 < 0$ (负数小于0);
 (3) $1 > -100$ (正数大于一切负数);
 (4) $-3 < -2$ (在数轴上, 右边的点所表示的数比左边的点所表示的数大).

例3 分别比较下列两组中各数的大小, 并按照由小到大的顺序用 “<” 把它们连接起来:

- (1) $3, -5, 0$; (2) $-1.5, 0, -4, -\frac{1}{2}, 1, 2$.

解 (1) $-5 < 0 < 3$;

(2) 将 $-1.5, 0, -4, -\frac{1}{2}, 1, 2$ 在数轴上分别用点表示, 如图2-9所示.

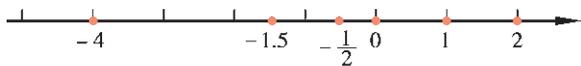
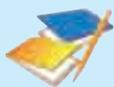


图 2-9

由数轴上点的位置可以看出:

$$-4 < -1.5 < -\frac{1}{2} < 0 < 1 < 2.$$



练习

1. 判断下列各式是否正确, 如果不正确, 把它改正过来:

(1) $-0.0019 > 0$; (2) $3 > -2$; (3) $-3\ 005 > -20$;

(4) $0 > 0.2$; (5) $-\frac{3}{4} < -1$; (6) $\frac{1}{4} < -\frac{1}{2}$.

2. 分别比较下列每组中各数的大小, 并按照由小到大的顺序用“<”把它们连接起来:

(1) 1, -2; (2) -3.2, -2.3; (3) 0, -3, $\frac{1}{3}$; (4) $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{4}$, -1.



习题2.2



复习与巩固

1. 画出数轴, 并在数轴上用点表示下列各数:

(1) -6, 5, 0, -3, 3; (2) -5, -2.5, -1, 2.5, 1.5.

2. 下列说法是否正确? 为什么?

(1) 在数轴上, 表示-2的点与原点的距离是2个长度单位;

(2) 在数轴上, 与原点的距离是2的点所表示的数是-2;

(3) 在数轴上, 原点及原点右边的点表示的数都是正数.

3. 画出数轴, 用数轴上的点表示下列各数, 并按照由小到大的顺序把它们用“<”连接起来:

$\frac{3}{4}$, 3, $-\frac{7}{3}$, 0, -1.5.

4. 在数轴上标出所有大于-3并且小于4的整数所表示的点.



拓展与延伸

5. (1) 在有理数中, 有没有最大的数? 有没有最小的数? 0是最小的有理数吗?

(2) 有没有最大的负有理数? 有没有最大的负整数?

6. 用“<”表示下列各数分别在哪两个相邻的整数之间:

(1) -3.14; (2) $-\frac{1}{3}$; (3) $-\frac{5}{4}$.



探索与创新

7. $-\frac{1}{2}$ 与0之间还有负数吗? 如果有, 有多少个? 请举出其中的三个, 并在数轴上将它们表示出来.

8. 小亮的家、小莹的家和学校在同一条东西方向的街道上. 小亮的家离学校1千米, 小莹的家离小亮的家0.5千米, 小莹的家离学校多少千米?

2.3 相反数与绝对值



交流与发现

(1) 数 -4 与 4 有什么相同点和不同点? 2.5 与 -2.5 呢? 你还能说出几对具有这种特征的两个数吗? 与同学交流.

像 -4 与 4 , 2.5 与 -2.5 等这样, 只有符号不同的两个数叫做互为相反数 (opposite number), 其中一个数叫做另一个数的相反数.

例如, 4 与 -4 互为相反数, -4 的相反数是 4 , 4 的相反数是 -4 .

特别地, 0 的相反数是 0 .

你能说出 -3.5 , 7 , -8 , $\frac{2}{3}$ 的相反数吗?

(2) 把 -4 和它的相反数 4 分别在数轴上表示出来, 它们与原点有怎样的位置关系? 与原点的距离各是多少? 2.5 和它的相反数呢 (图 2-10)?

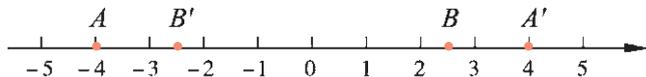


图 2-10

(3) 一般地, 把一个不等于 0 的数与它的相反数用数轴上的点表示出来, 这两个点与原点之间有怎样的关系?

在数轴上, 表示互为相反数的两个点, 分别位于原点的两旁, 并且它们与原点的距离相等.

(4) 数轴上表示 0 的点与原点的距离是多少?

在数轴上, 表示一个数 a 的点与原点的距离叫做这个数的绝对值 (absolute value), 记作 $|a|$.

例如, 4 的绝对值记作 $|4|$, $|4|=4$; -2.5 的绝对值记作 $|-2.5|$, $|-2.5|=2.5$ 等.

(5) 你能说出 -3.5 , 7 , -8 , $\frac{2}{3}$, 0 的绝对值各是多少吗? 你发现一个数

与它的绝对值之间有什么关系？与同学交流.

正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；0的绝对值是0.

由上面我们对问题（3）的探究，可以得到

互为相反数的两个数的绝对值相等.

当 $a > 0$ 时， $|a| = a$ ；

当 $a < 0$ 时， $|a| = -a$ ；

当 $a = 0$ 时， $|a| = 0$.



（6）-4与-2.5哪个大？它们的绝对值哪个大？-8与-3.5呢？你发现两个负数的大小与它们的绝对值有什么关系？与同学交流.

两个负数，绝对值大的负数反而小.

例1 比较 $-\frac{3}{4}$ 与 $-\frac{4}{5}$ 的大小.

解 $|\frac{-3}{4}| = \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, $|\frac{-4}{5}| = \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$.

因为 $\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$ ，也就是 $|\frac{-3}{4}| < |\frac{-4}{5}|$ ，

所以 $-\frac{3}{4} > -\frac{4}{5}$.

比较两个负数的大小，可以先比较它们绝对值的大小.



挑战自我

- （1）有没有绝对值最大的有理数？有没有绝对值最小的有理数？
- （2）一个数的相反数是最大的负整数，这个数是多少？一个数的绝对值是最小的正整数，这个数是多少？



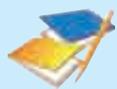
史海漫游

历史上对负数的认识

在人类历史上，有关正负数的意义和正负数的加、减法则的记载，最早出现在我国古代的一部重要数学著作《九章算术》中. 这部书大约成书于公元前1世纪. 在该书第

八章“方程”中，为保证“方程”求解的进行，已引入“正算”、“负算”，结合所列举的实际问题指出了正、负数的意义. 如：把卖出东西的数量用正数表示，买进东西的数量用负数表示；把盈余的钱数用正数表示，不足的钱数用负数表示；把增加粮食的数量用正数表示，减少粮食的数量用负数表示等等.《九章算术》还给出了正、负数的加减运算法则，称为“正负术”.

国外最先提到负数的是公元7世纪印度的数学家婆罗摩笈多 (Brahmagupta, 598 - 665). 大约在公元628年，他提出了负数的运算法则，并用小数点或小圈记在数字上方表示负数，但他没做实际意义的解释. 在欧洲，人们对负数认识很晚. 16世纪时，虽然在数学的理论研究中已遇到了负数，但在实际中又不承认它，把它说成是荒谬的数. 直到17世纪，法国数学家笛卡儿 (Descartes, 1596 - 1650) 创立坐标法研究解析几何时，负数才有了实际的解释——表示数轴上与正方向的数相反方向的数.



练习

1. 填空：

(1) -3.2 的相反数是 _____； _____ 的相反数是 -3.2 ；

(2) $-\frac{1}{3}$ 与 _____ 互为相反数； 0 的相反数是 _____；

(3) $|-24| =$ _____； (4) $|+157| =$ _____；

(5) $|\frac{3}{5}| =$ _____； (6) $|-6.5| =$ _____.

2. 分别写出下面各数的相反数和绝对值：

-11 , $\frac{7}{3}$, 0 , -31.5 , $-\frac{5}{8}$.

3. 比较下列各组中两个数的大小：

(1) -1.1 , -1.09 ； (2) $-\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{5}$ ； (3) -0.3 , $-\frac{1}{3}$ ； (4) $-\frac{6}{7}$, $-\frac{7}{8}$.

4. 小亮在学完绝对值后，总结出四条结论：

(1) 如果一个数是正数，那么它的绝对值是它本身；

(2) 如果两个数的绝对值相等，那么这两个数相等；

(3) 有理数的绝对值都是正数；

(4) 绝对值等于它本身的有理数是正数.

你认为小亮总结的都正确吗？如果有的不正确，请举例说明.



习题2.3



复习与巩固

1. 填表:

a	-1			$-\frac{2}{3}$	
$-a$		-0.43	0		-1

2. 分别写出下列各数的相反数和绝对值:

$$5.8, \quad -\frac{11}{2}, \quad -120, \quad -0.0036.$$

3. 绝对值等于12的数有几个? 绝对值等于0的数有几个? 有没有绝对值等于-3的数?

4. 计算:

$$(1) |-21| + |-6|;$$

$$(2) \left| -\frac{1}{3} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right|.$$

5. 比较下列各组中两个数的大小:

$$(1) -\frac{1}{2}, \frac{1}{3};$$

$$(2) -\frac{6}{5}, -\frac{5}{4};$$

$$(3) -\frac{3}{7}, -\frac{2}{5};$$

$$(4) -\frac{1}{6}, -\frac{2}{11}.$$

6. (1) 写出大于-3的所有负整数;

(2) 写出绝对值小于3的所有整数.



拓展与延伸

7. 当 $a = -6$ 时, $-a =$ _____, $-a$ 的相反数是 _____.

8. 如果 a 是有理数, 那么 a 一定大于 $-a$ 吗? 举例说明.



探索与创新

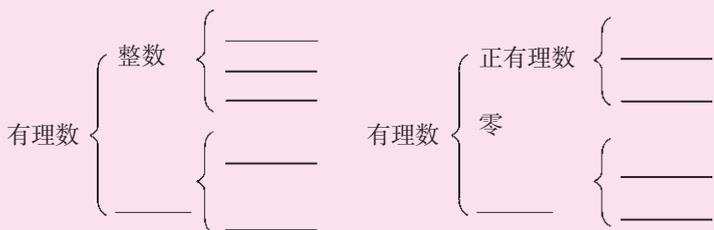
9. 如果 a, b 都是有理数, 且 $a > b$, 那么 $|a|$ 一定大于 $|b|$ 吗? 如果 $|a| > |b|$, 那么 a 一定大于 b 吗? 举例说明.



回顾与总结

1. 本章主要学习了哪些内容? 总结一下, 并与同学交流.

2. 引入负数后, 数的范围扩大到了有理数. 你能将有理数按下面两种方法进行分类吗?



3. 数轴是_____的直线. 将有理数用数轴上的点表示, 就把数学研究的两个不同对象“数”与“点”之间建立起一种联系. 在本章中, 你能体会到数轴所起的作用吗?
- (1) 任何一个有理数都可以用数轴上的一个点表示;
 - (2) 在数轴上, 通过表示两个数的点的相互位置, 可以比较这两个数的大小;
 - (3) 利用数轴, 给出了相反数的几何解释: 在数轴上, 位于原点的两旁, 且与原点距离相等的点表示的数互为相反数;
 - (4) 利用数轴, 给出了绝对值的意义: 在数轴上, 一个数所对应的点与原点的距离, 叫做这个数的绝对值.
4. 数 a 的相反数是_____; 在一个数的前面添“+”号, 仍与原数相同; 在一个数的前面添“-”号, 就成为原数的相反数. 你能举出几个具体的例子吗?
5. 一个数的绝对值是一个非负数, 也就是说, 任何数的绝对值都不小于 0. 给你一个数, 怎样求它的绝对值?
6. 有理数的大小是怎样规定的? 如果不利用数轴, 怎样直接比较两个有理数的大小?
7. 比较两个负数的大小与比较两个正数的大小有什么联系和不同?



综合练习



复习与巩固

1. 在下表中适当的空格内画“√”:

	整数	分数	正数	负数	有理数
5	√		√		√
$-\frac{1}{2}$					
2.76					
0					
-9					

2. 在数轴上画出表示下列各数的相反数的点, 并把它们的相反数按从小到大的顺序用“ $<$ ”连接起来:

$$-3, \quad 3.5, \quad 0, \quad -\frac{7}{2}, \quad -4, \quad 1.5.$$

3. 写出下列各数的相反数与绝对值:

$$\frac{5}{4}, \quad -3, \quad 0, \quad \frac{2}{3}, \quad -6.$$

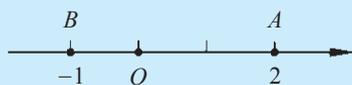
4. 什么数的相反数等于它本身? 什么数的相反数小于它本身? 什么数的相反数大于它本身?
5. 什么数的绝对值等于它本身? 什么数的绝对值大于它本身? 有没有绝对值小于它本身的数?
6. (1) 写出绝对值大于5并且小于8的所有整数;
(2) 分别写出绝对值大于2并且小于6的三个正分数与三个负分数.



拓展与延伸

7. 如图, 数轴的原点为 O , 点 A 表示 2, 点 B 表示 -1 . 回答下列问题:

- (1) 线段 OA 的长度是多少?
(2) 线段 OB 的长度是多少?
(3) 线段 AB 的长度是多少?
(4) 线段 AB 的中点表示的数是多少? 在数轴上把这个点表示出来.



(第7题)

8. 已知 A, B 是数轴上的两点, 它们与原点的距离分别是 4 和 5, A, B 两点间的距离是多少?
9. 在数轴上, 如果点 A, B 分别表示 $-2, 1$, 点 P 是与点 A 距离为 5 的点.
(1) 写出所有满足条件的点 P 所表示的数;
(2) 点 P 与点 B 的距离是多少?

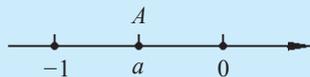


探索与创新

10. 如图, 如果有理数 a 的绝对值是 b 的绝对值的 3 倍, 那么数轴的原点是 A, B, C, D 中的哪个点?
11. 如图, 点 A 表示的有理数是 a , 把 $a, -a, 1$ 按从小到大的顺序用“ $<$ ”连接起来.



(第10题)



(第11题)

第3章 有理数的运算

内容提要

- 有理数的加法与减法
- 有理数的乘法与除法
- 有理数的乘方
- 有理数的混合运算
- 利用计算器进行有理数的运算



情境导航

“君不见，黄河之水天上来，奔流到海不复还。”这是诗人李白留下的脍炙人口、千古流传的咏诵黄河的诗句。黄河水哺育了中华民族，每一位海内外炎黄子孙都把黄河亲切地称为“母亲河”。

黄河又是世界上挟带泥沙量最多的一条河流，加之中游地区夏季多暴雨，使下游地区经常面临洪水威胁，因此治理养护、监视汛情、防御洪水成为沿黄水利部门一项常备不懈的任务。右上图是黄河中游一处水文站的照片。

在汛期的某一天中，水文站每隔1小时观测水位一次，把子夜零时的水位作为初始水位。

(1) 如果1小时后水位上升了2厘米，2小时后水位下降了3厘米，那么两次观测到的水位共上升了多少厘米？

(2) 如果水位每小时以2厘米的速度下降，经过6小时，水位共下降了多少厘米？

3.1 有理数的加法与减法



交流与发现



图 3-1 水位标尺

在第一、二学段，你已经学习了正有理数及零的加法运算. 引入了负有理数后，怎样进行加法运算呢？思考下面的问题.

(1) 如果水文站第一次观测的黄河水位比初始水位上升 2 厘米，第二次观测，水位比前一次又上升了 3 厘米，共上升了几厘米？

把观测的初始水位记为 0 厘米，水位上升记为正，下降记为负.

这是一个已知每次水位上升了多少，求两次水位上升的和的问题. 可以利用加法进行计算. 由图 3-2 中水位标尺上的读数可以看出，共上升了 5 厘米，用算式表示就是

$$(+2) + (+3) = +5.$$

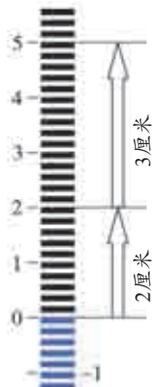


图 3-2

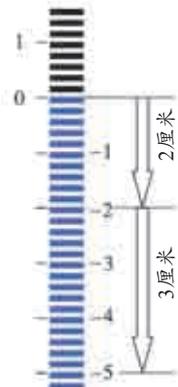


图 3-3

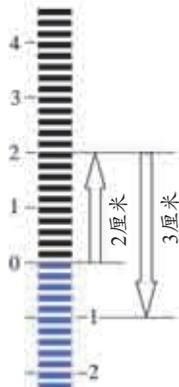


图 3-4

(2) 如果水位下降2厘米, 又下降了3厘米, 共下降了几厘米?

由图3-3可以看出, 共下降了5厘米, 用算式表示就是

$$(-2) + (-3) = -5.$$

(3) 如果水位上升2厘米, 又下降了3厘米, 共上升了几厘米?

由图3-4可以看出, 共下降了1厘米, 用算式表示就是

$$(+2) + (-3) = -1.$$

(4) 如果水位下降2厘米, 又上升了3厘米, 共上升了几厘米?

由图3-5可以看出, 共上升了1厘米, 用算式表示就是

$$(-2) + (+3) = +1.$$

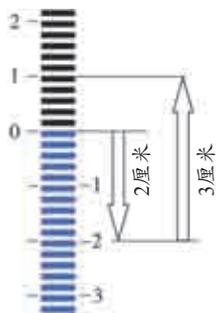


图 3-5

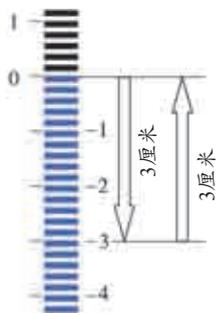


图 3-6

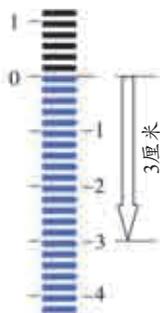


图 3-7

(5) 如果水位下降3厘米, 又上升了3厘米, 共上升了几厘米?

由图3-6可以看出, 共上升了0厘米, 用算式表示就是

$$(-3) + (+3) = 0.$$

(6) 如果水位下降3厘米, 又上升了0厘米, 共上升了几厘米? 如果水位上升了0厘米, 又下降3厘米呢?

由图3-7可以看出, 这两种情况分别共下降了3厘米, 用算式表示就是

$$(-3) + 0 = -3,$$

$$0 + (-3) = -3.$$

(7) 如果将上面(1)~(6)中的标尺, 画成水平放置的数轴, 你能利用数轴做下列有理数的加法吗? 与同学交流.

$$(+2) + (+3) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (-2) + (+3) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(-2) + (-3) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (-3) + (+3) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(+2) + (-3) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (-3) + 0 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$0 + (-3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(8) 观察上面的加法算式, 你发现两个有理数相加时, 两个加数的符号有

哪几种情况？如果两个加数同号（都为正数或都为负数），和的符号与加数的符号有什么关系？和的绝对值与加数的绝对值有什么关系？两个加数异号呢？如果有一个加数是0，那么和是多少？由此你能猜出有理数的加法法则吗？与同学交流。

有理数加法（addition）法则

1. 同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加；
2. 绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值；互为相反数的两个数相加得0；
3. 一个数与0相加，仍得这个数。

两个数相加，要先根据加数的符号确定和的符号，再根据加数的绝对值确定和的绝对值。



例1 计算：

$$(1) (-5) + (-9);$$

$$(2) (+11) + (-12.1);$$

$$(3) (-3.8) + 0;$$

$$(4) (-2.4) + (+2.4).$$

解

$$(1) (-5) + (-9) \quad (\text{同号两数相加})$$

$$= -(5+9) \quad (\text{取相同的符号，并把绝对值相加})$$

$$= -14;$$

$$(2) (+11) + (-12.1) \quad (\text{绝对值不相等的异号两数相加})$$

$$= -(12.1-11) \quad (\text{取绝对值较大的加数的符号，并用较大的加数的绝对值减去较小的加数的绝对值})$$

$$= -1.1;$$

$$(3) (-3.8) + 0 = -3.8; \quad (\text{一个数与0相加，仍得这个数})$$

$$(4) (-2.4) + (+2.4) = 0. \quad (\text{互为相反数的两个数相加得0})$$

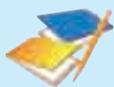
你会解答本章情境导航中的问题（1）吗？



挑战自我

(1) 两个正数相加，和一定大于每个加数吗？

(2) 两个有理数相加，和一定大于每个加数吗？举例说明。



练习

1. 说出下列各式的符号:

$$(1) (+7) + (+3);$$

$$(2) (-\frac{1}{2}) + (+\frac{1}{3});$$

$$(3) (-12) + (-4);$$

$$(4) (+12) + (-5).$$

2. 计算:

$$(1) (+43) + (-34); \quad (2) (-10.5) + (-1.3);$$

$$(3) (+\frac{31}{6}) + (-\frac{5}{3}); \quad (4) (+16) + (-16).$$

3. 一只蜗牛爬树, 白天向上爬了 1.5 米, 夜间向下爬了 0.3 米. 白天和夜间一共向上爬了多少米?



蜗牛



观察与思考

(1) 分别计算下面的算式, 比较每组中两个加数的位置和运算结果, 你能得出什么结论?

$$\textcircled{1} (-8) + (+5) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (+5) + (-8) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\textcircled{2} (-3.5) + (-4.3) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (-4.3) + (-3.5) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

再任取两个数相加, 并交换加数的位置, 还能得出同样的结论吗?

加法交换律 (commutative law of addition) 在有理数范围内仍然适用:

两个数相加, 交换加数的位置, 它们的和不变, 即 $a + b = b + a$.

(2) 任意取三个有理数 a, b, c , 如 $a = -2, b = 5, c = -8$, 分别计算 $(a + b) + c$ 与 $a + (b + c)$, 比较两个算式的运算顺序及运算结果, 你发现了什么? 再换三个数试一试, 你能得到什么结论? 与同学交流.

加法结合律 (associative law of addition) 在有理数范围内也仍然适用:

三个数相加, 先把前两个数相加, 或者先把后两个数相加, 它们的和不变, 即 $(a + b) + c = a + (b + c)$.

三个以上有理数相加, 可以根据需要交换加数的位置, 也可以先把其中的几个数相加.



例2 计算：

$$(1) (+23) + (-12) + (+7);$$

$$(2) \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right).$$

解

$$(1) (+23) + (-12) + (+7)$$

$$= (+23) + (+7) + (-12)$$

(加法交换律)

$$= [(+23) + (+7)] + (-12)$$

(加法结合律)

$$= (+30) + (-12)$$

(有理数加法法则)

$$= +18;$$

(有理数加法法则)

$$(2) \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\right] + \left[\left(-\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= (-1) + (-2)$$

$$= -3.$$

你能说出(2)中每一步运算的依据吗?



例3

上星期五某股民以每股 20 元的价格买进某种股票. 下表为本星期内该股票的涨跌情况:

星 期	一	二	三	四	五
每股涨跌/元	+0.40	+0.45	-0.10	-0.30	-0.75

如果在本周星期五收盘时, 该股民将这种股票卖出, 那么,

(1) 他每股的收益情况如何?

(2) 该股民每股的卖出价是多少?

解

$$(1) (+0.40) + (+0.45) + (-0.10) + (-0.30) + (-0.75)$$

$$= [(+0.40) + (+0.45)] + [(-0.10) + (-0.30) + (-0.75)]$$

$$= (+0.85) + (-1.15)$$

$$= -0.30.$$

所以, 他每股亏损 0.30 元.

$$(2) (+20) + (-0.30) = +19.70.$$

所以，每股的卖出价为19.70元.



挑战自我

把-50逐次加2，得到一连串的整数：-48，-46，-44，-42，-40，….

(1) 把-48作为这串数的第一个数，这串数中的第50个数是什么？

(2) 你能计算出这串数中前50个数的和吗？



练习

1. 计算：

$$(1) (+3) + (-13) + (+7);$$

$$(2) (+0.56) + (-0.9) + (+0.44) + (-8.1);$$

$$(3) (+\frac{4}{5}) + (-\frac{5}{6}) + (-\frac{3}{5}) + (+\frac{1}{6});$$

$$(4) (+\frac{3}{4}) + (-\frac{5}{7}) + (-\frac{5}{2}) + (+\frac{5}{7}).$$

2. 一批箱装苹果的标准质量是每箱20千克. 现从中随意抽取10箱进行检验，以每箱20千克为标准，超过的千克数记作正数，不足的千克数记作负数，记录如下：

$$+1, +0.3, -0.2, 0, +0.2, -1, 0, +0.2, -0.3, -0.1.$$

这10箱苹果的总质量是多少？



交流与发现

北京市某天的最高气温为 $+4^{\circ}\text{C}$ ，最低气温为 -3°C ，该天的最大温差是多少？

小亮认为本题可直接用加法求解： $+4^{\circ}\text{C}$ 比 0°C 高 4°C ， 0°C 比 -3°C 高 3°C ，因此

$$(+4) + (+3) = +7. \quad \textcircled{1}$$

所以，该天的最大温差为 7°C .

小莹先根据减法的意义，列出减法算式 $(+4) - (-3)$ ，又通过观察温度

计发现： $+4^{\circ}\text{C}$ 比 -3°C 高 7°C （图3-8）. 因此

$$(+4) - (-3) = +7. \quad \textcircled{2}$$

也可以求出该天的最大温差是 7°C .

(1) 观察算式①和②, 你有什么发现?

算式①与②的运算结果相等, 因此等号左边的两个算式也应该相等.

$$\text{即 } (+4) - (-3) = (+4) + (+3). \quad \textcircled{3}$$

(2) 比较③式两边的运算及参与运算的有理数, 你有什么发现? 与同学交流.

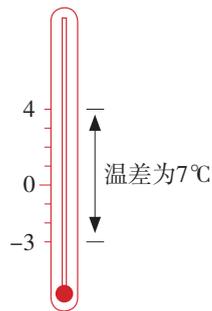


图 3-8



减法变成加法,
减数 -3 变成加数 3 .

-3 与 3 互
为相反数.



$$\text{由 } \textcircled{3} \text{ 式知 } (+4) - (-3) = (+4) + (+3). \quad \textcircled{4}$$

减变加
↓
↑
互为相反数

(3) 你会根据减法的意义, 计算 $(-5) - (+2)$ 吗?

算式 $(-5) - (+2)$ 的
意义就是求一个数, 使它与
 $+2$ 的和是 -5 .



$$\text{因为 } (-7) + (+2) = -5,$$

$$\text{所以 } (-5) - (+2) = -7.$$

另一方面, 我们有

$$(-5) + (-2) = -7,$$

$$\text{于是 } (-5) - (+2) = (-5) + (-2). \quad \textcircled{5}$$

减变加
↓
↑
互为相反数

(4) 观察④式与⑤式,你能从中发现什么规律?再列出几个有理数减法算式,然后用加法验证,看看你发现的规律对不对.

有理数减法 (subtraction) 法则

减去一个数,等于加上这个数的相反数,即 $a - b = a + (-b)$.

例4 计算:

$$(1) (+3) - (+5);$$

$$(2) (-3.4) - (-5.8);$$

$$(3) \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right);$$

$$(4) 0 - (-37.5).$$

解 (1) $(+3) - (+5)$

$$= (+3) + (-5)$$

$$= -2;$$

$$(2) (-3.4) - (-5.8)$$

$$= (-3.4) + (+5.8)$$

$$= +2.4;$$

$$(3) \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{7}{4};$$

$$(4) 0 - (-37.5)$$

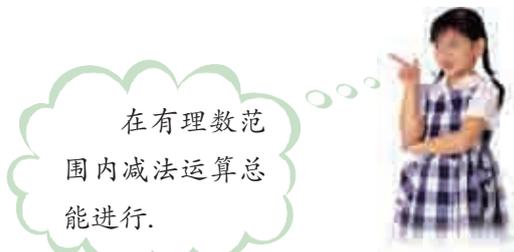
$$= 0 + (+37.5)$$

$$= +37.5.$$

通过例4,你得到哪些启示?当被减数小于减数时,减法运算能进行吗?



有理数的减法可转化为加法运算进行.



在有理数范围内减法运算总能进行.

例5 某足球队在两场比赛中共输球3个, 已知第一场输球4个, 第二场的输赢情况怎样?

解 如果将赢球记为正, 输球记为负, 那么两场比赛共输球3个记作-3个, 第一场输球4个记作-4个. 于是

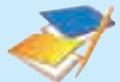
$$(-3) - (-4) = +1.$$

所以, 第二场赢球1个.



挑战自我

a, b 为有理数, 且 $|a|=8, |b|=2$, 当 a, b 异号时, 求 $a-b$ 的值.



练习

1. 计算:

$$(1) (+11) - (+17);$$

$$(2) (-1.2) - (+2.1);$$

$$(3) (-15) - (-8);$$

$$(4) (+\frac{2}{3}) - (-\frac{1}{3});$$

$$(5) (-\frac{1}{4}) - (-\frac{1}{4});$$

$$(6) 0 - (-\frac{1}{6}).$$

2. 酒精冻结的温度是 -117°C , 水银冻结的温度是 -39°C . 酒精冻结的温度比水银冻结的温度低多少?



观察与思考

你会计算 $(+12) - (-7) + (-5) - (+30)$ 吗?

$$(+12) - (-7) + (-5) - (+30)$$

$$= (+12) + (+7) + (-5) + (-30) \quad (\text{有理数的减法法则})$$

$$= (+19) + (-35) \quad (\text{加法结合律})$$

$$= -16.$$

在上面计算过程的第一步中, 按照有理数减法的法则, 把加减运算都统一成为加法运算, 这样一来, 原来的算式就转化成为求几个有理数的和了. 你能说

出这个求和的算式中的各个加数分别是哪些数吗?

由于 $+12$, $+7$, -5 , -30 都成了加数, 为了简便, 可以把上面第一步算式中的所有加号及括号都省略不写, 于是, 第一步算式就成为下面的形式:

$$12 + 7 - 5 - 30.$$

这个式子的意义仍然是求上面这4个加数的和, 读作“正12、正7、负5、负30的和”. 如果看作加减运算, 上式也可读作“12加7减5减30”.

这样一来, 上面的计算过程也可以写成

$$\begin{aligned} & (+12) - (-7) + (-5) - (+30) \\ & = (+12) + (+7) + (-5) + (-30) \\ & = 12 + 7 - 5 - 30 \\ & = 19 - 35 \\ & = -16. \end{aligned}$$



例6 把算式 $(-20) + (-3) - (-5) - (+6)$ 中的减法统一成加法, 省略加号后, 计算出结果.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & (-20) + (-3) - (-5) - (+6) \\ & = (-20) + (-3) + (+5) + (-6) && \text{(有理数的减法法则)} \\ & = -20 - 3 + 5 - 6 && \text{(省略加号)} \\ & = -20 - 3 - 6 + 5 && \text{(加法交换律)} \\ & = -29 + 5 && \text{(加法结合律)} \\ & = -24. && \text{(有理数的加法法则)} \end{aligned}$$

将有理数的加减混合运算统一成加法并省略加号后, 可以根据需要, 适当运用加法交换律和结合律. 但在交换加数的位置时, 要连同它前面的符号一起交换.

例7 读出下面的算式, 再进行计算:

$$(1) -4.2 + 5.7 - 8.4 + 10; \quad (2) \frac{2}{3} - \frac{3}{8} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}.$$

解 (1) 读作“负4.2、正5.7、负8.4、正10的和”.

$$\begin{aligned} & -4.2 + 5.7 - 8.4 + 10 \\ & = 5.7 + 10 - 4.2 - 8.4 \\ & = 15.7 - 12.6 \\ & = 3.1; \end{aligned}$$

(2) 读作“正 $\frac{2}{3}$ 、负 $\frac{3}{8}$ 、正 $\frac{1}{3}$ 、负 $\frac{3}{4}$ 的和”.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} - \frac{3}{8} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} \\ &= 1 - \frac{9}{8} \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$



挑战自我

北京市某天的最高气温为 6°C ，最低气温为 -4°C 。当天晚间发布大风降温预报，第二天的气温将下降 $8^{\circ}\text{C} \sim 12^{\circ}\text{C}$ 。请估计第二天该市最高气温不会高于多少度？最低气温不会低于多少度？最高气温与最低气温可能相差多少度？



智趣园

钟表面上的数字

如图 3-9，钟表面上有 4 个数：3, 6, 9, 12. 你能在其中某些数的前面添上负号，使添号后的 4 个数的和等于零吗？试一试.

如果钟表面上有 12 个数：1, 2, 3, ..., 12 (图 3-10)，你能在其中某些数的前面添上负号，使添号后的 12 个数的和等于零吗？试一试.

$$\begin{aligned} & \text{例如, } 12 + (-11) + (-10) + 9 + 8 + 7 + (-6) + (-5) \\ & + (-4) + 3 + (-2) + (-1) = 0 \end{aligned}$$

就是其中的一个答案.

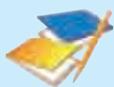
你是怎样做的？发现了什么规律？总结一下，与同学交流.



图3-9



图3-10



练习

1. 计算:

$$(1) (-9) - (-10) + (-2); \quad (2) (-7) - (-8) + (+9) - (+10).$$

2. 把下列各式中的减法统一成加法, 然后省略加号, 再计算:

$$(1) (-0.9) + (-1.3) - (-2.1) - (+4.7);$$

$$(2) (-0.9) - (+\frac{2}{5}) - (-8.1) - (+\frac{11}{10}).$$

3. 读出下列算式, 并计算:

$$(1) -3 - 4 + 19 - 11; \quad (2) -\frac{1}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}.$$



习题3.1



复习与巩固

1. 计算:

$$(1) (+67) + (-73); \quad (2) (-34) + (-59);$$

$$(3) (+\frac{2}{5}) + (-\frac{3}{5}); \quad (4) (-\frac{1}{2}) + (+\frac{4}{3}).$$

2. 计算:

$$(1) (+7) + (-4) + (-7) + (+9) + (-5);$$

$$(2) (+\frac{1}{2}) + (-\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{5}{3}).$$

3. 文具店、书店和玩具店依次坐落在一条东西走向的大街上. 文具店在书店西边 20 米处, 玩具店位于书店东边 100 米处. 小亮从书店沿街向东走了 40 米, 接着又向西走了 60 米. 此时小亮的位置在什么地方?

4. 计算:

$$(1) (+28) - (-54); \quad (2) (-\frac{1}{9}) - (+\frac{1}{2});$$

$$(3) (-5.9) - (-6.1); \quad (4) (+8) - (-8).$$

5. 解答下列问题:

(1) 地球上, 海洋的最深处在太平洋中的马里亚纳海沟, 海拔 $-11\,034$ 米. 陆地的最高处在珠穆朗玛峰, 海拔 $8\,844$ 米, 它比马里亚纳海沟高多少米?

(2) 吐鲁番盆地海拔 -155 米. 吐鲁番盆地比马里亚纳海沟高多少米? 比珠穆朗玛峰低多少米?

6. 计算:

$$(1) (-8) - (+4) + (-7) - (+9);$$

$$(2) (+\frac{1}{3}) - (+\frac{1}{2}) - (-\frac{3}{4}) + (-\frac{2}{3}).$$

7. 计算:

$$(1) -8 + 12 - 16 - 23;$$

$$(2) 81.23 - 293.8 - 8.74.$$

8. 用简便方法计算:

$$(1) -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1;$$

$$(2) 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 + 14 - 15 - 16.$$



拓展与延伸

9. 时代中学足球队在3场比赛中, 第一场5:3胜, 第二场2:6负, 第三场2:2平.

这3场比赛时代中学足球队净胜球几个?

10. 在数轴上, 点 P 表示有理数3.5. 将点 P 先向左移动3个单位长度, 又向右移动8.5个单位长度.

(1) 这时点 P 再向哪个方向移动多少个单位长度才能到达原点?

(2) 把上述点 P 从开始移动直至到达原点的这一过程用算式表示出来.

11. a, b 是有理数, $|a+b|$ 等于 $|a|+|b|$ 吗? 举例说明.



探索与创新

12. 下表为国外几个城市与北京的时差(正数表示同一时刻比北京时间早的时数, 负数表示同一时刻比北京时间晚的时数):

城市	东京	巴黎	伦敦	纽约	莫斯科	悉尼
时差/时	+1	-7	-8	-13	-5	+2

(1) 北京6月11日23时是巴黎的什么时间?

(2) 北京6月11日23时是悉尼的什么时间?

(3) 小莹的爸爸于6月11日23时从北京乘飞机, 经过16小时的飞行到达纽约, 到达纽约时北京时间是多少? 纽约时间是多少?

13. 已知 $a < 0, b > 0$, 在 $a+b, a-b, -a+b, -a-b$ 中最大的是哪一个? 最小的是哪一个?

3.2 有理数的乘法与除法



交流与发现

在第一、二学段,你已经学习了正有理数及零的乘法运算.引入了负有理数后,怎样进行乘法运算呢?思考下面的问题:

(1) 在汛期,如果黄河水位每天上升2厘米,那么3天后的水位比今天高还是低?高(或低)多少?

把今天的水位记为0厘米,水位上升记为正,下降记为负;为区分时间,今天记为0,今天之后记为正,今天之前记为负.这时已知每天水位都上升2厘米,求3天后的水位,可以利用乘法进行计算.由图3-11可以看出,3天后的水位比今天高6厘米,用算式表示就是

$$(+2) \times (+3) = +6.$$

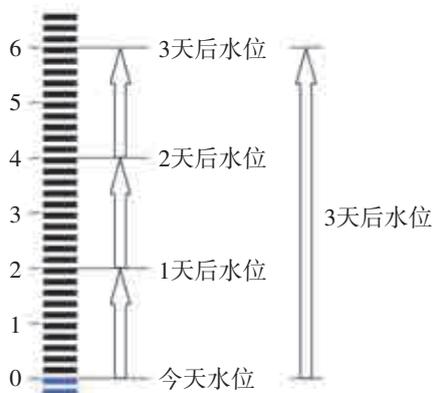


图 3-11

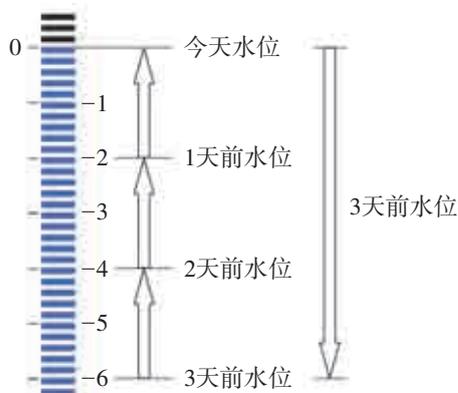


图 3-12

(2) 如果水位每天上升2厘米,那么3天前的水位比今天高还是低?高(或低)多少?

求3天前的水位,就是求+2与-3的积.由图3-12可以看出,3天前的水位

比今天低6厘米，用算式表示就是

$$(+2) \times (-3) = -6.$$

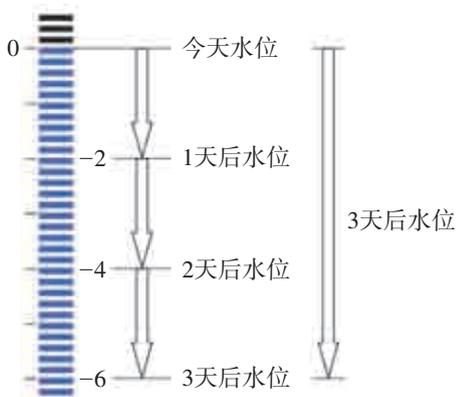


图3-13

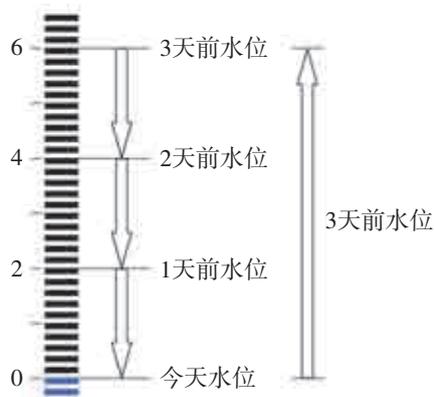


图3-14

(3) 如果水位每天下降2厘米，那么3天后的水位比今天高还是低？高（或低）多少？

求3天后的水位，就是求-2与+3的积. 由图3-13可以看出，3天后的水位比今天低6厘米，用算式表示就是

$$(-2) \times (+3) = -6.$$

(4) 如果水位每天下降2厘米，那么3天前的水位比今天高还是低？高（或低）多少？

求3天前的水位，就是求-2与-3的积. 由图3-14可以看出，3天前的水位比今天高6厘米，用算式表示就是

$$(-2) \times (-3) = +6.$$

(5) 如果水位每天上升0厘米，那么3天前的水位比今天高还是低？

求3天前的水位，就是求0与-3的积. 由实际意义可知，3天前的水位比今天高0厘米，用算式表示就是

$$0 \times (-3) = 0.$$

(6) 如果水位每天下降2厘米，那么0天后的水位比今天高还是低？

求0天后的水位，就是求-2与0的积. 由实际意义可知，0天后的水位，就是今天当时的水位，这个水位没有变化，用算式表示就是

$$(-2) \times 0 = 0.$$

将上面6个问题得到的算式综合如下：

$$(+2) \times (+3) = +6; \quad (+2) \times (-3) = -6; \quad (-2) \times (+3) = -6;$$

$$(-2) \times (-3) = +6; \quad 0 \times (-3) = 0; \quad (-2) \times 0 = 0.$$

(7) 观察上面的 6 个算式, 你发现两个有理数相乘时, 两个因数的符号有几种情况? 如果两个因数同号, 积的符号与因数的符号之间有什么关系? 积的绝对值与因数的绝对值之间有什么关系? 两个因数异号呢? 如果有一个因数是 0, 积是多少? 由此, 你能猜出有理数的乘法法则吗? 与同学交流.

有理数乘法 (multiplication) 法则

两数相乘, 同号得正, 异号得负, 并把绝对值相乘;

任何数与 0 相乘, 积仍得 0.

有理数相乘, 也要先根据因数的符号确定积的符号, 再根据因数的绝对值确定积的绝对值.



例 1 计算:

$$(1) (-4) \times (-6);$$

$$(2) \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3};$$

$$(3) 0.5 \times (-8);$$

$$(4) \left(-\frac{2}{3}\right) \times (-1).$$

解

$$(1) (-4) \times (-6)$$

(同号两数相乘)

$$=+(4 \times 6)$$

(积的符号为正, 并把绝对值相乘)

$$=24;$$

$$(2) \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}$$

(异号两数相乘)

$$=-\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

(积的符号为负, 并把绝对值相乘)

$$=-\frac{1}{6};$$

$$(3) 0.5 \times (-8)$$

$$=- (0.5 \times 8)$$

$$=-4;$$

$$(4) \left(-\frac{2}{3}\right) \times (-1)$$

$$=+\left(\frac{2}{3} \times 1\right)$$

$$=\frac{2}{3}.$$

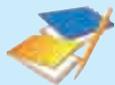
一个数与“-1”相乘, 所得积是这个数的相反数.





挑战自我

你能通过实例，并借助数轴，说明有理数乘法的法则吗？



练习

1. 判断下列各式中积的符号：

$$(1) (-17) \times 16;$$

$$(2) (-0.03) \times (-1.8);$$

$$(3) 45 \times (+1.1);$$

$$(4) (+183) \times (-21).$$

2. 计算： $(-0.6) \times (+1)$ ， $(+1) \times (-\frac{4}{3})$. 你发现一个数与+1相乘，积有什么规律？

3. 计算：

$$(1) (-25) \times 16;$$

$$(2) (-3.6) \times (-1);$$

$$(3) (+0.4) \times (-125);$$

$$(4) (-\frac{2}{3}) \times \frac{2}{3};$$

$$(5) 3 \times (+\frac{7}{15});$$

$$(6) (-2\,051.3) \times 0.$$



观察与思考

分别计算下面的两组乘法算式，比较各组中两个因数的位置和它们的积，你能得到什么结论？

$$(1) (-2) \times (-6) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (-6) \times (-2) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \frac{1}{3} \times (-\frac{2}{5}) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (-\frac{2}{5}) \times \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

再任取两个数相乘，并交换因数的位置，还能得到同样的结论吗？

乘法交换律 (commutative law of multiplication) 在有理数范围内也适用.

两个数相乘，交换因数的位置，积相等，即 $a \times b = b \times a$.

任取三个有理数 a, b, c ，如 $a = -3, b = 5, c = -2$ ，分别计算

$$(a \times b) \times c \text{ 与 } a \times (b \times c), (a + b) \times c \text{ 与 } a \times c + b \times c,$$

比较运算顺序及运算结果，你能得到什么结论？再取三个数试一试，你能得到同样的结论吗？与同学交流.

乘法结合律、乘法对加法的分配律在有理数范围内也适用, 请你将它们叙述出来.

乘法结合律 (associative law of multiplication): _____;

乘法对加法的分配律 (distributive law of multiplication to addition): _____

多个有理数相乘, 可以根据需要交换因数的位置, 也可以先把其中的几个数相乘.



例2 计算: $(-\frac{3}{4}) \times (+5) \times (+\frac{4}{3}) \times (+2)$.

解

$$\begin{aligned} & (-\frac{3}{4}) \times (+5) \times (+\frac{4}{3}) \times (+2) \\ &= (-\frac{3}{4}) \times (+\frac{4}{3}) \times (+5) \times (+2) && \text{(乘法交换律)} \\ &= [(-\frac{3}{4}) \times (+\frac{4}{3})] \times [(+5) \times (+2)] && \text{(乘法结合律)} \\ &= (-1) \times (+10) \\ &= -10. \end{aligned}$$

与例2相比较, 你能直接写出下列算式的结果吗?

$$(-\frac{3}{4}) \times (-5) \times (+\frac{4}{3}) \times (+2) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(-\frac{3}{4}) \times (-5) \times (-\frac{4}{3}) \times (+2) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(-\frac{3}{4}) \times (-5) \times (-\frac{4}{3}) \times (-2) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

从上面几个不等于0的有理数的乘法运算中, 你发现乘积的符号与每个因数的符号有什么规律? 如果其中有一个因数为0呢?

几个不等于0的数相乘, 积的符号由负因数的个数决定. 当负因数为奇数个时, 积为负; 当负因数为偶数个时, 积为正. 几个有理数相乘, 如果其中有一个因数为0, 积就为0.

例3 计算: $(-\frac{2}{15}) \times (-\frac{36}{5}) \times (-\frac{25}{24})$.

解

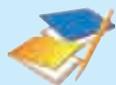
$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2}{15}\right) \times \left(-\frac{36}{5}\right) \times \left(-\frac{25}{24}\right) \\ &= -\left(\frac{2}{15} \times \frac{36}{5} \times \frac{25}{24}\right) \quad (\text{确定积的符号, 并将绝对值相乘}) \\ &= -1. \end{aligned}$$

例4

计算: $36 \times \left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{5}{12}\right]$.

解

$$\begin{aligned} & 36 \times \left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{5}{12}\right] \\ &= 36 \times \frac{1}{2} + 36 \times \left(-\frac{2}{9}\right) + 36 \times \frac{5}{12} \quad (\text{乘法对加法的分配律}) \\ &= 18 - 8 + 15 \\ &= 25. \end{aligned}$$



练习

1. 计算:

$$\begin{aligned} (1) & (-8) \times 5 \times (-0.25); & (2) & \left(-\frac{3}{7}\right) \times \frac{1}{6} \times \left(-\frac{8}{15}\right) \times (-21); \\ (3) & (-7) \times 8 \times (-9) \times 0. \end{aligned}$$

2. 说出下列计算中每一步所依据的运算律或法则:

$$\begin{aligned} & (-0.4) \times (-0.8) \times (-1.25) \times 2.5 \\ &= -(0.4 \times 0.8 \times 1.25 \times 2.5) \quad (\text{第一步}) \\ &= -(0.4 \times 2.5 \times 0.8 \times 1.25) \quad (\text{第二步}) \\ &= -[(0.4 \times 2.5) \times (0.8 \times 1.25)] \quad (\text{第三步}) \\ &= -(1 \times 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

3. 用简便方法计算:

$$(1) \left(-\frac{5}{8}\right) \times \frac{3}{14} \times \left(-\frac{16}{5}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right); \quad (2) \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) \times (-36).$$



交流与发现

黄河水位3天共下降15厘米, 平均每天下降多少? 你能列出算式吗?
列出算式就是 $(-15) \div 3 = ?$

与以前学过的除法意义相同, 要计算 $(-15) \div 3$, 就是要找到一个数“?”, 使

$$? \times 3 = -15$$

成立. 根据有理数的乘法运算

$$(-5) \times 3 = -15,$$

因此

$$(-15) \div 3 = -5. \quad \textcircled{1}$$

同样地, 从 $(+5) \times (-3) = -15$, 可以得到

$$(-15) \div (-3) = +5. \quad \textcircled{2}$$

从 $(-5) \times (-3) = +15$, 可以得到

$$(+15) \div (-3) = -5. \quad \textcircled{3}$$

从 $0 \times (-3) = 0$, 可以得到

$$0 \div (-3) = 0. \quad \textcircled{4}$$

从算式 ①~④ 可以猜出, 有理数的除法有如下的法则:

两数相除, 同号得正, 异号得负, 并把绝对值相除.

0 除以任何一个不等于 0 的数, 都得 0. 0 不能作除数.

另一方面,

$$(-15) \times \frac{1}{3} = -5. \quad \textcircled{5}$$

比较 ① 和 ⑤, 可以发现,

$$(-15) \div 3 = (-15) \times \frac{1}{3}.$$

再分别计算 $(-15) \div (-3)$ 与 $(-15) \times (-\frac{1}{3})$, 它们的结果相等吗? 你发现了什么规律?

与正有理数倒数的意义相同, 乘积是 1 的两个有理数互为**倒数** (reciprocal). 例如, 3 与 $\frac{1}{3}$ 互为倒数, -3 与 $-\frac{1}{3}$ 互为倒数.

这样一来, 有理数的除法运算就转化为乘法运算:

除以一个不为 0 的数, 等于乘这个数的倒数.



例5 计算:

(1) $32 \div (-8)$;

(2) $(-\frac{7}{8}) \div (-\frac{3}{4})$.

解 (1) $32 \div (-8)$

$$= -(32 \div 8) \quad (\text{两数相除, 异号为负, 并把绝对值相除})$$

$$= -4;$$

(2) $(-\frac{7}{8}) \div (-\frac{3}{4})$

$$= +(\frac{7}{8} \div \frac{3}{4}) \quad (\text{两数相除, 同号为正, 并把绝对值相除})$$

$$= \frac{7}{6}.$$

你还有别的解法吗?

例6 计算:

(1) $(-\frac{25}{7}) \div (-\frac{5}{3}) \div (-\frac{15}{14})$;

(2) $(-3.5) \div \frac{7}{8} \times (-0.75)$.

解 (1) $(-\frac{25}{7}) \div (-\frac{5}{3}) \div (-\frac{15}{14})$

$$= (-\frac{25}{7}) \times (-\frac{3}{5}) \times (-\frac{14}{15}) \quad (\text{除以一个不为0的数等于乘这$$

$$= -(\frac{25}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{14}{15}) \quad (\text{个数的倒数})$$

$$= -2;$$

(2) $(-3.5) \div \frac{7}{8} \times (-0.75)$

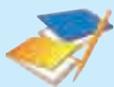
$$= (-3.5) \times \frac{8}{7} \times (-0.75)$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{8}{7} \times \frac{3}{4}$$

$$= 3.$$

有理数的乘除运算统一
成为乘法运算后, 可以利用
乘法的运算律简化运算.





练习

1. 写出下列各数的倒数:

$$(1) -15; \quad (2) \frac{5}{4}; \quad (3) -2.25; \quad (4) -\frac{3}{5}.$$

2. 计算:

$$(1) (+36) \div (-6); \quad (2) \left(-\frac{2}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$(3) \left(-\frac{3}{16}\right) \div \left(+\frac{1}{4}\right); \quad (4) (-0.25) \div (-4);$$

$$(5) 0 \div (-125); \quad (6) (-3) \div 0.001.$$

3. 计算:

$$(1) (-6) \div (-4) \div \left(-\frac{6}{5}\right); \quad (2) \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \div \frac{5}{6}.$$



习题3.2

复习与巩固

1. 计算:

$$(1) \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right); \quad (2) (-24) \times \frac{25}{8};$$

$$(3) \left(-\frac{56}{3}\right) \times (-27); \quad (4) \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{8}{7}\right).$$

2. 计算:

$$(1) (-78) \times (-4) \times 25; \quad (2) \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-2);$$

$$(3) \left(-\frac{3}{17}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{17}{5}\right); \quad (4) \frac{5}{6} \times (-24) \times \left(-\frac{3}{5}\right).$$

3. 计算:

$$(1) (-91) \div 13; \quad (2) (-56) \div (-14);$$

$$(3) \frac{22}{7} \div \left(-\frac{11}{12}\right); \quad (4) \left(-\frac{1}{4}\right) \div (-1.5);$$

$$(5) (-1) \div \left(-\frac{2}{5}\right); \quad (6) \left(-\frac{2}{5}\right) \div (-1).$$

4. 计算:

$$(1) 6 \div \left(-\frac{3}{4}\right) \div \frac{4}{3}; \quad (2) (-0.75) \times (-1.5) \div \left(-\frac{9}{4}\right).$$

5. 两个有理数相除, 在什么情况下商是1? 是-1? 是零? 没有意义?
6. 高度每上升1千米, 气温大约降低 6°C . 现在地面气温是 -5°C , 那么5千米高空的气温是多少度?



拓展与延伸

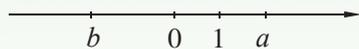
7. a, b, c 均为有理数, 用“ $>$ ”或“ $<$ ”填空:

- (1) 如果 $a > 0, b < 0, c < 0$, 那么 $a \div b \times c$ _____ 0;
- (2) 如果 $a < 0, b < 0, c < 0$, 那么 $a \div b \div c$ _____ 0;
- (3) 如果 $a < 0, a \times b < 0, a \times c > 0$, 那么 $a \times b \times c$ _____ 0;
- (4) 如果 $a \times b \times c > 0, c < 0$, 那么 $a \times b$ _____ 0; 当 b _____ 0, $a \times c > 0$; 当 b _____ 0时, $a \times c < 0$.
8. 任意写出两个负数, 比较它们的倒数的大小, 你发现它们的倒数的大小与原来写出的两个负数的大小有什么关系?



探索与创新

9. 有理数 a, b 在数轴上所表示的点如图所示, 请在空格处填上“ $<$ ”或“ $>$ ”:



(第9题)

- (1) $(1-b) \times a$ _____ 0;
- (2) $(1-a) \times b$ _____ 0.
10. A, B, C, D, E, F 是数轴上从左到右的六个点, 并且 $AB = BC = CD = DE = EF$. 点 A 所表示的数是-5, 点 F 所表示的数是11, 那么与点 C 所表示的数最接近的整数是多少?

3.3 有理数的乘方

如图3-15, 回答下列问题:

- (1) 怎样计算边长为7厘米的正方形的面积?
- (2) 怎样计算棱长为5厘米的正方体的体积?

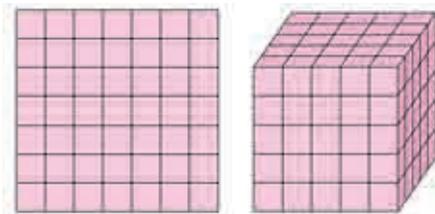


图 3-15

$$(1) 7 \times 7 = 49 \text{ (平方厘米)}$$

$$(2) 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ (立方厘米)}$$



这里， 7×7 ， $5 \times 5 \times 5$ 都是相同因数的乘法，为了简便，把 7×7 记作 7^2 ，读作7的2次方（或7的平方）， $5 \times 5 \times 5$ 记作 5^3 ，读作5的3次方（或5的立方）。

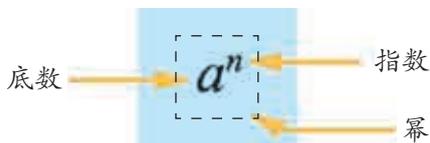
同样地， $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ 可以记作 $(-2)^5$ ，读作-2的5次方。

$(-\frac{1}{4}) \times (-\frac{1}{4}) \times (-\frac{1}{4}) \times (-\frac{1}{4})$ 可以记作 _____，读作 _____。

一般地， n 个相同的因数 a 相乘，即

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ 个}}$$

记作 a^n 。这种求几个相同因数的积的运算，叫做乘方（power），乘方的结果叫做幂（power）。在 a^n 中， a 叫做底数（base number）， n 叫做指数（exponent）， a^n 读作“ a 的 n 次方”；当 a^n 看做 a 的 n 次方的结果时，也可读作 a 的 n 次幂。



例如， $(-\frac{1}{4})^4$ 中，底数是 $-\frac{1}{4}$ ，指数是 4， $(-\frac{1}{4})^4$ 读作 $-\frac{1}{4}$ 的 4 次方，也可以读作 $-\frac{1}{4}$ 的 4 次幂。

一个数可以看做这个数本身的 1 次方。例如，5 可以看做 5^1 ， $-\frac{1}{5}$ 可以看做 $(-\frac{1}{5})^1$ ，指数 1 通常省略不写。

有理数的乘方运算通过有理数的乘法进行。

例1 计算：

$$(1) (-4)^3;$$

$$(2) (-\frac{1}{2})^4.$$

解 (1) $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$;

(2) $(-\frac{1}{2})^4 = (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$.



你发现负数的几次幂是正数？负数的几次幂是负数？你能得出一般结论吗？

正数的任何次幂都是正数；负数的偶次幂是正数，负数的奇次幂是负数；0的任何正整数次幂都等于0.

例2 计算：

(1) $(-3)^4$; (2) -3^4 .

解 (1) $(-3)^4 = 3^4 = 81$;

(2) $-3^4 = -81$.

$(-3)^4$ 与 $(-4)^3$ 的区别在哪里？



挑战自我

如果 a, b 都是有理数，并且 $a > b$ ，那么 a^2 一定大于 b^2 吗？ a^3 一定大于 b^3 吗？请举例说明.



智趣园

能将一张报纸对折30次吗

取一张报纸，将它对折，再对折，你估计最多能将它折几次？试试看.

(1) 你能将它对折8次吗？为什么？

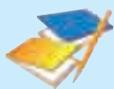
(2) 如果能将一张报纸连续对折30次，你估计它的厚度是多少？

试一试就可以发现，将纸每对折一次，其厚度就增加1倍. 例如，对折一次后，纸

的厚度为1张纸厚度的2倍($2=2^1$), 再对折一次(一共对折2次), 纸的厚度为1张纸厚度的4倍($4=2^2$), 再对折一次(一共对折3次), 纸的厚度为1张纸厚度的8倍($8=2^3$)……如果一共对折8次, 那么纸的厚度便是1张纸厚度的 2^8 倍. 一张普通报纸的厚度大约为0.01厘米, 把一张纸连续对折8次后, 它的厚度约为 $0.01 \times 2^8 = 0.01 \times 256 = 2.56$ 厘米, 这相当于把一本256页的书对折一次, 这几乎是不可能的. 如果能将一张报纸连续对折30次, 那么估计它的厚度是

$$\begin{aligned} 0.01 \times 2^{30} &= 0.01 \times (\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{30 \text{个} 2}) \\ &= 0.01 \times [(\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{10 \text{个} 2}) \times (\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{10 \text{个} 2}) \times (\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{10 \text{个} 2})] \\ &= 0.01 \times 1\,024 \times 1\,024 \times 1\,024 > 0.01 \times 1\,000 \times 1\,000 \times 1\,000 = 10^7 \text{ (厘米)}, \\ &10^7 \text{ 厘米} = 100 \text{ 千米}. \end{aligned}$$

这就是说, 如果有办法能把一张报纸连续对折30次, 那么它的厚度就要比珠穆朗玛峰海拔高度的11倍还要高!



练习

1. 填空:

(1) 在 $(-10)^4$ 中, 底数是_____, 指数是_____, 运算的结果是_____;

(2) $(-1)^1 =$ _____; $(-1)^3 =$ _____; $(-1)^5 =$ _____;

$(-1)^2 =$ _____; $(-1)^4 =$ _____; $(-1)^6 =$ _____.

由此可以发现规律: _____.

2. 把下列各式写成乘方的形式:

(1) $(-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3})$; (2) $2.5 \times 2.5 \times 2.5$.

3. 计算:

(1) $(-2)^6$; (2) $(-5)^3$; (3) $(-1)^{2013}$;

(4) $-(\frac{1}{2})^4$; (5) -1^8 ; (6) 0^{308} .



交流与发现

根据乘方的意义，填写下表：

10的乘方	表示的意义	运算结果	结果中0的个数
10^2	10×10	100	2
10^3			
10^4			
10^5			

你发现了什么规律？

$$10^n = \underbrace{100 \cdots 0}_{n \text{ 个 } 0}$$



在生产与生活实际中，经常会遇到一些较大的数。例如，光的传播速度约为 300 000 000 米/秒，地球与太阳的距离约为 149 000 000 000 米等。对于这样大的数，借助于10的乘方加以表示，会给我们带来很大的方便。例如：

$$300\,000\,000 = 3 \times 100\,000\,000 = 3 \times 10^8;$$

$$149\,000\,000\,000 = 1.49 \times 100\,000\,000\,000 = 1.49 \times 10^{11}.$$

把一个绝对值大于10的数记作 $a \times 10^n$ 的形式，其中 a 是整数位数只有一位的数， n 是正整数。这种记数方法叫做科学记数法（scientific notation）。

例3 用科学记数法表示下列各数：

(1) 24 000 000 000; (2) -10 800 000.

解 (1) $24\,000\,000\,000 = 2.4 \times 10^{10}$;

(2) $-10\,800\,000 = -1.08 \times 10^7$.

例4 下列用科学记数法表示的数，原来是什么数？

(1) 2.5×10^5 ; (2) -5.37×10^8 .

用科学记数法表示一个绝对值大于10的数时，10的指数比原数的整数位数少1.



解 (1) $2.5 \times 10^5 = 2.5 \times 100\,000 = 250\,000$;

(2) $-5.37 \times 10^8 = -5.37 \times 100\,000\,000 = -537\,000\,000$.

在日常生活中,我们经常接触各种数.例如,世界上有7大洲、4大洋;太平洋的面积约为1.8亿平方千米;据测算,2003年8月27日18时,火星与地球的距离约为5 575.8万千米.

这里7大洲、4大洋中的7和4,2003年8月27日18时中的2003,8,27,18是与实际完全相符的**准确数**(exact number);1.8亿与5 575.8万是由四舍五入得到的与实际相近的**近似数**(approximate number).

一个近似数,四舍五入到哪一位,就说这个近似数精确到哪一位,如1.8亿精确到千万位,5 575.8万精确到千位.

例5 2010年我国国内生产总值为397 983亿元.请用四舍五入法按下列要求分别取这个数的近似数,并用科学记数法表示出来.

- (1) 精确到十亿元; (2) 精确到百亿元;
(3) 精确到千亿元; (4) 精确到万亿元.

解 (1) 精确到十亿元是 $3.979\,8 \times 10^5$ 亿元;

(2) 精确到百亿元是 3.980×10^5 亿元;

(3) 精确到千亿元是 3.98×10^5 亿元;

(4) 精确到万亿元是 4.0×10^5 亿元.



练习

1. 用科学记数法表示下列各数:

- (1) 10 000; (2) 800 000; (3) $-56\,000\,000$; (4) $-2\,030\,000\,000$.

2. 下列用科学记数法表示的数,原来各是什么数?

- (1) 1×10^7 ; (2) -6×10^3 ; (3) 8.5×10^6 ; (4) -3.96×10^4 .

3. 用科学记数法表示下列数据:

- (1) 牡丹自古以来就是中国的国花,被誉为“百花之王”.据估计,我国观赏牡丹的栽培面积约6 700公顷,药用牡丹的栽培面积约5 000公顷,以每公顷15 000株计算约为175 500 000株(精确到千位);

- (2) 据河南省陕县站的数据记录,黄河平均每年向中下游输沙量约为1 600 000 000吨(精确到亿吨).



(第3(1)题)



习题3.3



复习与巩固

1. 计算:

$$(1) 2^5; \quad (2) \left(-\frac{2}{3}\right)^5; \quad (3) (-0.1)^3; \quad (4) \left(-\frac{1}{2}\right)^6.$$

2. 分别比较下列各组数的大小:

$$(1) -3^2 \text{ 与 } (-2)^3; \quad (2) (-0.2)^2 \text{ 与 } (-0.2)^4;$$

$$(3) (-3)^2 \text{ 与 } -3^2; \quad (4) |-3|^3 \text{ 与 } (-3)^3.$$

3. 计算: $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{10}$.

4. 用科学记数法表示下列各数:

$$(1) 92\ 000; \quad (2) 63\ 000\ 000; \quad (3) -304\ 000; \quad (4) -50\ 030\ 000.$$

5. 用科学记数法表示下列各题中的数据(精确到百万位):

(1) 被称为“地球之肺”的森林正以每年约 16 100 000 公顷的速度消失;

(2) 每平方千米的地球表面上, 一年从太阳得到的能量相当于燃烧 130 000 000 千克煤所产生的能量;

(3) 月球的平均半径约为 1 737 400 米, 离地球的平均距离约为 384 400 000 米.

6. “曙光 4 000A 超级服务器”的峰值计算速度达到每秒 8 061 000 000 000 次. 将这个数四舍五入, 分别得到下面的近似数, 它们各精确到哪一位?

$$(1) 8.061 \times 10^{12}; \quad (2) 8.06 \times 10^{12}; \quad (3) 8.1 \times 10^{12}.$$



拓展与延伸

7. 一个数的平方一定大于这个数吗? 请举例说明.

8. 查一查黄河的长度, 请你估测它大约相当于多少个中学生手拉手的长度.(用科学记数法表示)



探索与创新

9. 将 $\left(-\frac{1}{2}\right)^1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ 按从小到大的顺序用“ $<$ ”连接起来, 并将这些数用数轴上的点表示出来. 从中你有什么发现?

3.4 有理数的混合运算



观察与思考

(1) 有两张边长为3的正方形纸片, 求它们的面积之和, 应当怎样列出算式?



每一张纸片的面积都是9, 由此我列出的算式是 $9+9$.

我列出的算式是 2×3^2 .



(2) 算式 2×3^2 中含有哪几种运算? 应当按照哪种运算顺序计算这个算式? 根据乘方的意义, 上面算式中 3^2 就是 3×3 . 因此

$$\begin{aligned} 2 \times 3^2 &= 2 \times 3 \times 3 \\ &= 6 \times 3 \\ &= 18. \end{aligned}$$

如果先算乘法, 会得到

$$2 \times 3^2 = 6^2 = 36.$$

(3) 你能利用小亮列出的算式, 验证上面按哪种运算顺序计算的结果是合理的吗?

同一个算式, 按照对运算顺序的不同理解, 运算结果可能完全不同. 因此, 在进行有理数的混合运算时, 必须对运算顺序做出规定.

有理数的混合运算, 先算乘方, 再算乘除, 最后算加减; 同级运算, 按从左到右的顺序进行; 如果有括号, 先算括号里面的, 并按小括号、中括号、大括号的顺序进行.

(4) 算式 -2×3^2 与 $(-2 \times 3)^2$ 这两个算式有什么不同? 它们应当分别按照怎样的运算顺序计算? 运算结果相同吗?

$$-2 \times 3^2 = -2 \times 9 = -18;$$

$$(-2 \times 3)^2 = (-6)^2 = 36.$$

例1 计算: $\frac{6}{5} \times (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) \div \frac{5}{4}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \frac{6}{5} \times \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{5}{4} \\
 &= \frac{6}{5} \times \left(-\frac{5}{6}\right) \times \frac{4}{5} \\
 &= -\frac{4}{5}.
 \end{aligned}$$

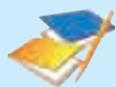
$$\text{例2} \quad \text{计算: } (-4)^2 \times \left[(-1)^5 + \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & (-4)^2 \times \left[(-1)^5 + \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] \\
 &= 16 \times \left[-1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right] \\
 &= 16 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \\
 &= -6.
 \end{aligned}$$

利用运算律可以改变运算的顺序, 简化运算.



对例1、例2, 你还有别的解法吗? 与同学交流.



练习

1. 计算:

$$(1) 3^2 - (-3)^3;$$

$$(2) -2^4 \div (-3)^2;$$

$$(3) -\frac{5}{3} \times (0.5 - \frac{2}{3}) \div \frac{10}{9};$$

$$(4) 4 \times (-3)^2 - 5 \times (-3) + (-4)^3.$$

2. 计算:

$$(1) -9 - (-4)^4 \div (-8);$$

$$(2) (-5)^3 \times 3 - 3^3 \div 6 \div (-2);$$

$$(3) 18 + 32 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 0.5^4 \times (-2)^5;$$

$$(4) -3^4 - \left(1 - 0.2 \times \frac{3}{5}\right)^3 \times (-5)^4.$$



习题3.4



复习与巩固

1. 分别说出下列各组中两个算式不同, 并比较计算结果的大小:

$$(1) \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \text{ 与 } -\frac{2^2}{5};$$

$$(2) \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \text{ 与 } -\frac{2^3}{5^3}.$$

2. 计算:

$$(1) 17 - 12 \div (-4) + 4 \times (-5);$$

$$(2) (-56) \div (-12 + 8) + (-2) \times 5;$$

$$(3) \frac{2}{5} \div (-2.4) - \frac{6}{21} \times (-\frac{7}{4}) - 0.25;$$

$$(4) [(-6 - \frac{9}{2}) \div \frac{19}{4}] \div [(2 - \frac{10}{3}) \times \frac{6}{5}].$$

3. 计算:

$$(1) (-\frac{1}{3}) \times (-3)^3 - 0.25 \times (-3) \times (-2)^4;$$

$$(2) 18 + 32 \div (-2)^3 - (-4)^2 \times 5;$$

$$(3) [(-5)^2 \times (-\frac{3}{5}) + 15] \times (-2)^3 \div 7;$$

$$(4) (\frac{4}{3} - \frac{7}{6})^2 \div (\frac{1}{3} - \frac{1}{2})^2 \div (-\frac{1}{6})^2 \times (-\frac{1}{2})^3.$$



拓展与延伸

4. 计算:

$$(1) (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1};$$

$$(2) (-1)^n + (-1)^{n+1}.$$

5. 计算:

$$(1) (1 + 3 + 5 + \cdots + 99) - (2 + 4 + 6 + \cdots + 100);$$

$$(2) \frac{(-1) \times 2 \times (-3) \times 4 \times \cdots \times (-49) \times 50 \times (-2^{50})}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100}.$$



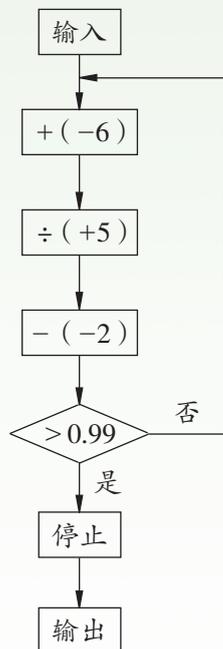
探索与创新

6. 按图中的程序计算, 并把各次结果填入表内(如第一次输入的数为 -4 , $[(-4) + (-6)] \div (+5) - (-2)$ 得 0 , 小于 0.99 , 第二次将 0 代回程序再进行计算: $[0 + (-6)] \div (+5) - (-2)$, \cdots 直到计算的结果是大于 0.99 的数值时, 程序停止).

(1) 当第一次输入的数为 -4 时, 请完成下表:

计算次数	计算结果
1	0
2	
3	
4	

(2) 当第一次输入的数是 -10 时, 那么经过多少次计算程序便可停止?



(第6题)

7. 日常生活中, 我们使用的数是十进制数, 而计算机使用的数是二进制数, 即数的进位方法是“逢二进一”. 二进制数只使用数字 0, 1, 如二进制数 1101 记为 $1101_{[2]}$, $1101_{[2]}$ 通过式子 $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$ 可以转换为十进制数 13. 请你仿照上面的转换方法, 将二进制数 $11101_{[2]}$ 转换为十进制数. 你还能将十进制数 18, 转化为二进制数吗? 试一试.

3.5 利用计算器进行有理数的运算

一根底面直径为 6.5 厘米的圆钢, 长为 230 厘米, 它的体积约是多少? (精确到 0.1 立方厘米)

由圆柱的体积公式, 圆钢的体积约为 $3.14 \times (\frac{6.5}{2})^2 \times 230$ 立方厘米.

上面的算式如果利用笔算, 不仅费时, 而且容易出错. 如果利用科学计算器, 就会简捷、方便得多.

图 3-16 是一种科学计算器的面板, 它由显示屏和键盘两部分组成. 显示屏用来显示计算过程中输入的数据和计算的结果. 图 3-16 中显示屏上行显示的是输入的算式, 下行显示的是计算的结果. 键盘上的每一个键上都标有这个键的功能. 在图 3-16 所示的计算器中,  是开机及清屏键. 使用计算器时, 先按这个键, 电源就接通了; 在开机状态下, 按一下这个键, 可以清除显示屏上的数字与符号. 需要关机时, 依次按第二功能键 2ndF 和关机键  (即 ON 键的第二功能), 就可切断电源. 不同的计算器其按键上的功能符号可能不同, 使用计算器前, 应先阅读使用说明书, 了解各个按键的功能及使用方法, 以免出现计算错误. 对于加、减、乘、除四种运算, 各种计算器的按键功能通常是一样的.

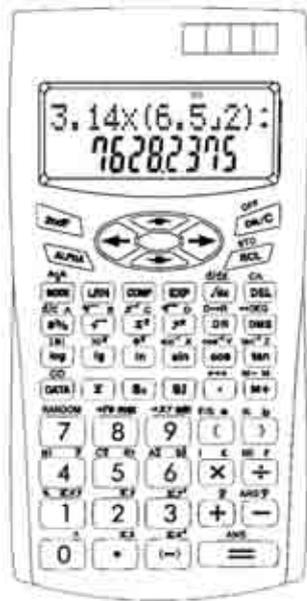


图 3-16

例1 用计算器计算： $15 + (-3.2) - 9.5$.

解 按键顺序为

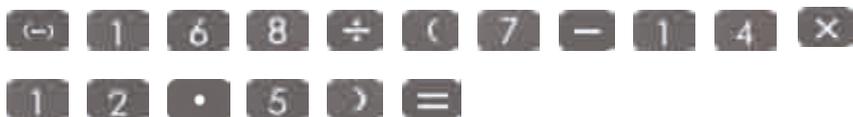


显示屏最后显示的结果为2.3 .

所以， $15 + (-3.2) - 9.5 = 2.3$.

例2 用计算器计算： $-168 \div (7 - 14 \times 12.5)$.

解 按键顺序为

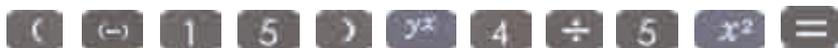


显示屏最后显示的结果为1 .

所以， $-168 \div (7 - 14 \times 12.5) = 1$.

例3 用计算器计算： $(-15)^4 \div 5^2$.

解 按键顺序为



显示屏最后显示的结果为2 025 .

所以， $(-15)^4 \div 5^2 = 2\,025$.

例4 用计算器计算： $(\frac{3}{4} - \frac{7}{8}) \div (-\frac{15}{8}) \times 15 - 89\%$.

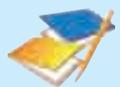
解 按键顺序为



显示屏最后显示的结果为0.11 .

所以， $(\frac{3}{4} - \frac{7}{8}) \div (-\frac{15}{8}) \times 15 - 89\% = 0.11$.

你能用计算器计算本节开始列出的算式吗？试一试，并与同学交流.



练习

用计算器计算：

- $8.5 + 13.65 - 35.35$;
 - $51 \times 11 \div 17 - 19$;
 - $(-14) \times (-18) \div (-21) - 25$;
 - $7.48 \div (-4) + (-3.53) \times 12$.
- $(-2) \times 1.1^3 \div (-2.2)^2$;
 - $-2 \times 2.5^3 \times (-0.2)^2 + (-0.8)^3$;
 - $(-81) \div \frac{9}{4} \times (-\frac{2}{3}) \div (-16)$;
 - $8^2 \times (-\frac{2}{3})^3 \times (-0.25)^2 \times (-4.5)^3$.



习题3.5

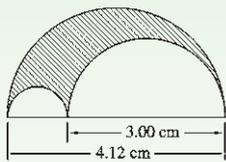


复习与巩固

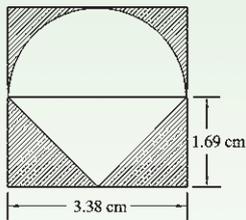
1. 用计算器计算：

- $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$;
 - $4 - (-2)^9 - 13^4 + 5^5$;
 - $[(-3)^3 - (-5)^3] \div [(-3)^5 - (-5)^5]$;
 - $[(-\frac{5}{24}) - \frac{3}{8} + (-\frac{7}{16})] \times 48$.

2. 求下列图形中阴影部分的面积：



(1)



(2)

(第2题)



拓展与延伸

- 德国天文学家开普勒 (Kepler, 1571-1630) 发现了行星运动第三定律：行星公转周期 T 的平方与轨道半长轴 a 的立方成正比。请填写下表，进行验证。



小资料

地球到太阳的平均距离为1.5亿千米，这段距离叫做1个天文单位。

行星	a /天文单位	T /年	a^3	T^2	$\frac{a^3}{T^2}$
金星	0.723	0.615			
火星	1.524	1.881			
木星	5.203	11.862			

4. 用计算器分别计算下列各题, 你发现它们各有什么规律?

(1) $9 \times 9 + 7$;	(2) $1 \times 9 + 2$;
$98 \times 9 + 6$;	$12 \times 9 + 3$;
$987 \times 9 + 5$;	$123 \times 9 + 4$;
$9\ 876 \times 9 + 4$;	$1\ 234 \times 9 + 5$;
$98\ 765 \times 9 + 3$;	$12\ 345 \times 9 + 6$;
...	...



探索与创新

5. (1) 用计算器计算:

$$3^2 = ? \quad 33^2 = ? \quad 333^2 = ? \quad 3\ 333^2 = ? \quad \dots$$

(2) 从上面的计算中, 你发现有什么规律? 利用你发现的规律, 写出下列各式的结果:

$$333\ 333^2 = ? \quad \underbrace{33 \dots 3^2}_{8 \text{个} 3} = ?$$



回顾与总结

- 本章的主要内容是有理数的运算, 你学习了有理数的哪几种运算? 总结一下, 并与同学交流.
- 请根据有理数的加法和乘法的运算法则填写下表.

分类	运算	运算结果的符号	运算结果的绝对值
两数 同号	相加	与加数同号	等于加数的绝对值的和
	相乘	积取正号	等于因数的绝对值的积
两数 异号	相加		
	相乘		
两数中一 数为0	相加	取不为0的加数符号	等于不为0的加数的绝对值
	相乘	积为0	

- 有理数的减法是加法的逆运算. 利用相反数, 有理数的减法可以转化为加法, 法则是 _____ . 这就是说, 在有理数范围内, 加、减运算可以

统一成加法运算.

有理数的除法是乘法的逆运算. 利用倒数, 有理数的除法可以转化为乘法, 法则是
 _____ . 这就是说, 在有理数范围内, 乘、除运算可以统一成乘法运算.

- 有理数的加减运算统一成加法运算后有什么作用? 有理数的乘除运算统一成乘法运算后呢?
- 什么叫做乘方? 如何进行有理数的乘方运算? 正数、负数的任何次幂的符号有何特征? 零的正整数次幂呢?
- 有理数混合运算的顺序是 _____ .
- 有理数加法和乘法的运算律分别有哪些? 运算律在运算过程中有什么作用?
- 科学记数法是科学技术上常用的一种记数方法. 怎样将一个绝对值大于10的数用科学记数法表示? 怎样将科学记数法表示的数写成原来的数? 举例说明.
- 怎样确定一个近似数的精确度? 举例说明.
- 学过本章后, 你认为有理数的运算与非负有理数的运算, 有哪些区别和联系? 从运算法则、运算结果、运算律、运算顺序等方面, 谈谈你的体会, 与同学交流.



综合练习



复习与巩固

- 判断下列说法是否正确; 如果不正确, 请举例说明.
 - 两数相加, 和一定大于每个加数;
 - 两个数的差一定小于这两个数的和;
 - 零减去一个数一定得负数;
 - 如果两个有理数的商是负数, 那么它们的积也是负数;
 - 任何有理数的偶次方都是正数;
 - 任何数的倒数都比它本身小.
- 计算:

(1) $-32 + 59$;	(2) $21 - (-19)$;
(3) $(-\frac{1}{3}) \times (-\frac{6}{7})$;	(4) $64 \div (-0.16)$;
(5) $(-\frac{2}{3}) \times (-1) \times (-\frac{3}{5})$;	(6) $(-3.5) \div \frac{7}{8} \div (-\frac{4}{3})$.
- 把下列各式写成省略加号的和的形式, 并计算它们的值:
 - $(+15) + (-30) - (+14) - (-25)$;
 - $(+4.7) - (-8.9) - (+7.5) + (-6)$.

第4章 数据的收集、整理与描述

内容提要

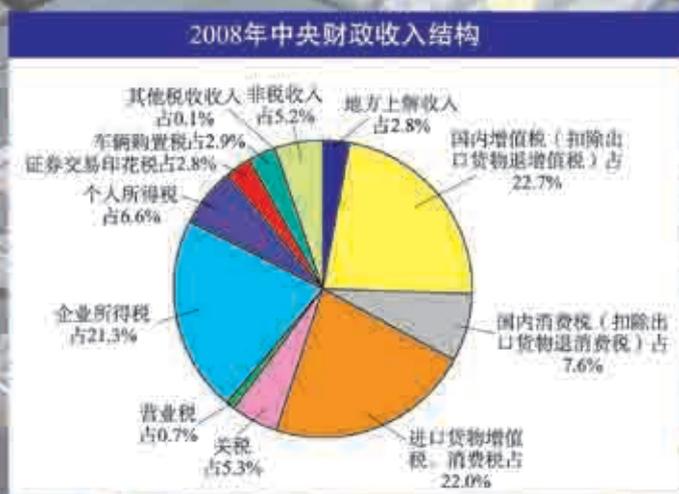
- 普查和抽样调查
- 简单随机抽样
- 数据的整理
- 扇形统计图



情境导航

这是国家统计局公布的《2006—2010年国内生产总值及其增长速度》及《2008年中央财政收入结构》的两幅统计图。

- (1) 从这两幅统计图中，你能得到哪些信息？
- (2) 你能说出这两幅统计图是怎样绘制的吗？
- (3) 为什么五年内国内生产总值、比上年的增长速度和中央财政收入这三项数据选用了三种不同类型的统计图？



4.1 普查和抽样调查



图 4-1



交流与发现

在社会生产和现实生活中，要对某些问题做出科学合理的判断和决策，通常需要先通过调查，收集一些有关的数据，再进行分析研究。

例如，我国从 1984 年到 1996 年，用了 12 年的时间对全国土地使用情况进行了大规模的现状调查。这次调查全国组织了 50 万专业人员，采用了航空为主的遥感资料，运用全野外实地调查的方法，查清了每个地块准确的土地数据，获得了全面的资料。



小资料

全国主要地类面积

单位：亿亩

耕 地	18.257 4
园 地	1.77
林 地	35.41
牧 草 地	39.27
居民点工矿用地	4.04
交 通 用 地	0.37

其他为水域和未利用土地

《2008年国土资源公报》

参考网站：中华人民共和国国土资源部网站
(www.mlr.gov.cn) 2009.4.1

像这样，为了特定目的对全部考察对象进行的全面调查叫做**普查** (survey)。被考察的对象的全体叫做**总体** (population)，组成总体的每一个被考察的对象叫做**个体** (individual)。

在上面的例子中，全国土地使用面积是总体，每个地块土地的面积是个体。

运用普查，通过调查与问题有关的每一个个体，可以获得准确全面的数据资料. 然而，对于许多问题，没有必要甚至也不可能得到与问题有关的所有数据.

分析下面的三个实际问题：

- (1) 某部门要调查全省七年级学生每周课外活动的时间；
- (2) 质量监督部门要检测某种品牌的复合木地板的耐磨程度；
- (3) 河务部门要了解7月份流经某水文站的黄河河水的泥沙含量.

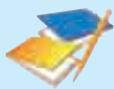
问题(1)中的学生人数多，如果采用普查的方法，对全省每个七年级学生每周课外活动的时间都进行调查，不仅调查的范围广，花费的时间长，消耗的人力、物力也会非常大，并且这种调查的结果也不需要准确值；问题(2)中对木地板的耐磨程度，如果采用普查的方法，需要对该品牌的每块木地板都进行试验，而这种试验是破坏性的；问题(3)中，不可能将7月份流经该地的黄河河水全部封存，然后让泥沙沉淀，再测出泥沙的质量. 因此，问题(1)(2)(3)不能通过普查来收集数据.

想一想，如果你负责调查问题(1)(2)(3)，应当如何收集数据？

对于问题(1)，可以采用抽取一部分学校的一部分七年级学生（比如1 000名）作为代表进行问卷调查. 问题(2)和问题(3)可分别抽取部分木地板样品和7月份流经该地的部分水样进行检测. 根据获取的数据，估计全部被考察对象的情况.

在许多情况下，人们常常从总体中抽取部分个体，根据对这一部分个体的调查估计被考察对象的整体情况，这种调查叫做**抽样调查** (sampling investigation). 从总体中抽取的一部分个体组成总体的一个**样本** (sample)，样本中个体的数量叫做**样本容量** (sample size).

例如，在问题(1)中，全省七年级学生的课外活动的时间是总体，每个学生课外活动的时间是个体，从中抽取的1 000名七年级学生的课外活动的时间是总体的一个样本，样本容量是1 000.



练习

1. 下面的调查是普查还是抽样调查？
 - (1) 想知道一锅菜的咸淡，取一点尝尝；
 - (2) 为了解西瓜甜不甜，在西瓜的某个部位切一个三角口子取出一块尝尝；

- (3) 为了记录某次下雨的降水量, 学校气象小组用雨量计对雨水进行了收集和测量;
- (4) 为了了解七年级一班学生课外作业所用的时间, 老师给全班每个同学发放调查表进行调查.

2. 选择题:

- (1) 为了了解全县七年级 15 000 名学生的视力情况, 抽查了 1 000 名学生的视力进行统计分析. 下面四个说法中, 正确的是 ().
- (A) 15 000 名学生是总体
 (B) 1 000 名学生的视力是总体的一个样本
 (C) 每名学生是总体的一个个体
 (D) 样本容量是 15 000
- (2) 为检测某型号电池的使用寿命, 从中抽取 10 块电池进行测试. 在这个问题中, 所抽取的每块电池的使用寿命是 ().
- (A) 总体
 (B) 个体
 (C) 总体的一个样本
 (D) 样本容量



习题4.1



复习与巩固

- 为了了解顾客对某种家电产品质量的满意度, 抽取 50 名该产品用户进行电话随访. 指出这个抽样调查的总体、个体、样本和样本容量.
- 分析下面的问题, 你认为应当采用普查还是抽样调查? 为什么?
 - 小亮的妈妈去集贸市场买菜, 她想了解市场上出售的西红柿的价格;
 - 学校调查七年级一班学生的近视率;
 - 检测某种药品在常温下可以贮存的天数;
 - 为了收取电费, 检查某居民楼内每户居民本月的用电量;
 - 某航空公司检测 80 架民航客机的安全性能;
 - 电视台了解某电视节目的收视率.
- 填空:
 - 为了了解一批玉米种子的质量, 从中抽取 100 粒种子进行检测. 在这个问题中, 个体是 _____.
 - 为了检查一批零件的内径, 从中抽取 10 个零件进行测量. 在这个问题中, 样本是 _____.



拓展与延伸

4. (1) 医生为了了解病人的病情, 需要对病人进行抽血化验. 这种方法是普查还是抽样调查? 为什么?
- (2) 医院收进 10 名病人住院治疗, 为了了解病人的病情, 需要对病人测量血压. 医生应当对病人进行普查还是抽样调查? 为什么?
- (3) 上面问题 (1) 和 (2) 的总体和个体分别是什么?
5. 上网查询第六次全国人口普查的有关资料 (包括时间、调查方式、所得到数据等), 在全班内交流.

4.2 简单随机抽样



交流与发现

为了了解本校学生暑假期间参加体育活动的情况, 学校准备抽取一部分学生进行调查, 你认为按下面的调查方法取得的结果能反映全校学生的一般情况吗? 如果不能反映, 应当如何改进调查方法?

方法 1: 调查学校田径队的 30 名同学;

方法 2: 调查每个班的男同学;

方法 3: 从每班抽取 1 名同学进行调查;

方法 4: 选取每个班级中的一半学生进行调查.



方法 1 选取的样本是学校田径队的同学, 他们暑假中体育活动较多; 方法 2 只调查男同学, 没有调查女同学, 这两种调查结果不能反映全校同学的一般情况.

方法 3 选取的样本容量太小, 不能客观地反映全校同学的情况; 方法 4 的结果虽然能反映全校同学的一般情况, 但样本的容量较大, 需要花费较多的人力和时间.



对于上面所提出的问题,我们只要得到一部分样本数据就可以对于总体情况进行估计.如果得到的样本能够客观地反映问题,那么对总体的估计就会准确一些,否则估计就会差一些.为此,我们总是希望寻找一个抽取样本的好方法.

为了获取能够客观反映问题的结果,通常按照总体中每个个体都有相同的被抽取机会的原则抽取样本,这种抽取样本的方法叫做**简单随机抽样**(simple random sampling).

对于本节开始提出的问题,采用简单随机抽样方法比较合适.可以在上学时在学校门口随机问讯,也可以利用学生的学号,随机抽取一定数量的学生进行调查.如果学校的学生人数较多,为了保证一定的样本容量,被调查的学生数一般不要少于20人,取40~50人比较合适.

一个好的抽样方法不仅希望“精度高”,还希望“花费少”.



实验与探究

(1) 班主任老师要统计你班今天骑自行车上学的同学人数占全班到校上课同学人数的百分比.怎样得到你班骑自行车上学的同学人数呢?



用普查的方法,请这些同学举手,数一数就可以了.

(2) 按照小亮的方法,统计你班骑自行车上学的同学人数,并计算出骑自行车上学的同学人数所占全班到校上课同学人数的百分比.

(3) 在上面的调查中,哪是总体,哪是个体?

(4) 如果采取抽样调查的方式,为了保证每个个体被抽取的可能性都相等,可采用随机抽取学号的方法:将全班到校上课同学的学号分别写在大小相同的小纸条上,做成纸签,放入一个大纸袋中,并把纸签摇匀.然后由同学参与现场调查.先从袋中随机抽取5名同学的学号,统计这5人中骑自行车上学的人数,并算出这些人数占5名上学人数的百分比,把它作为全班骑自行车上学的同学人数所占的百分比.你感觉这种估计的准确度如何?

(5) 将(4)中随机抽样的样本容量改为20, 重复这个实验.

(6) 将(4)(5)所得到的百分比与普查所得到的百分比加以比较, 你发现哪次调查结果能更接近总体的真实情况?

在随机抽样中, 随着样本容量的增大, 样本的估计更接近总体的真实情况.



(7) 你还能想出其他抽样调查的方法吗? 与同学交流, 并按大家想到的几种方法重复(4)中的实验.

(8) 观察(4)(5)(7)中的所抽到的各组样本, 它们是否相同? 想一想, 如果再次重复(4)中的抽样, 第2次抽到的样本与上一次抽到的样本是否相同? 对此, 你有什么发现?

不同的抽样方法, 所得到的样本可能不同, 即使对于同一种抽样方法, 每次抽样得到的数据也可能是不同的, 这说明抽样调查的结果具有随机性, 即不确定性. 一般地, 在简单随机抽样中, 可以有多种不同的抽样方法, 但只要有足够的样本容量, 就可以根据结果对总体做出估计.

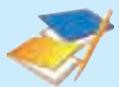
(9) 想一想, 用上面(5)中调查所得到的数据估计全校同学今天骑自行车上学的同学人数占全校到校同学人数的百分比合适吗?

由于不同年级骑自行车上学的同学人数可能差别较大, 因此, 采用分层抽样的方法比较合适. 也就是先按年级进行分层, 每个年级作为一层, 然后按照各年级在校同学人数占全校同学人数的比值大小分配样本数. 而在各个层内则采用随机抽样.

例1 李大伯为了估计一袋大豆种子中大豆的粒数, 先从袋中取出50粒, 做上记号, 然后放回袋中. 将豆粒搅匀, 再从袋中取出100粒, 从这100粒中, 找出带记号的大豆. 如果带记号的大豆有2粒, 便可以估计出袋中所有大豆的粒数. 你知道他是怎样估计的吗?

解 第二次取出的大豆中, 带记号的大豆占100粒大豆的2%. 由于经过搅匀, 带记号的大豆在袋中是均匀分布的. 所以, 估计袋中约有大豆

$$50 \div 2\% = 2\ 500 \text{ (粒)}.$$



练习

1. 你认为下面的调查和推断正确吗？为什么？

(1) 某校的黑板报上刊登了一篇题为《我校大部分同学不吃早餐》的报道. 文章说：“本报小记者通过对课间到学校商品部买小食品的20名同学的调查，发现有16人是因为没有吃早餐而去买零食. 由此推断，我校80%的学生在家不吃早餐.”

(2) 在一场篮球比赛的实况转播中，解说员介绍了参加美国职业篮球比赛（NBA）的3名中国籍队员的身高. 有位观众把这3个人的平均身高与美国球员的平均身高进行比较，得出了一个结论：“中国人的平均身高比美国人高.”

2. 某商场8月份随机抽查7天的营业额，数据分别如下（单位：万元）：

3.6, 3.2, 3.4, 3.9, 3.0, 3.1, 3.6.

试估计该商场8月份的营业额大约是多少万元.



习题4.2



复习与巩固

1. 下列调查中抽取的样本合适吗？为什么？

(1) 为了了解全班同学学习数学中存在的困难和问题，数学老师调查该班数学兴趣小组的10名同学；

(2) 为了了解全校学生阅读课外书籍的情况，图书管理员老师随机调查了来馆借阅图书的两位同学；

(3) 果农王大伯为了估计果园中50棵苹果树的总产量，收获前，他将这些果树进行编号，然后再对编号为5的整数倍的果树进行采摘，称得它们的产量.

2. 为了估计一片森林里的野兔的数量，从森林中捕获50只野兔，做上记号，然后放回森林. 几天后，再捕获第二批野兔55只，发现其中有标记的野兔5只，估计这片森林中约有野兔多少只.



拓展与延伸

3. 某水库年初放养鲢鱼2万尾，成活率约为70%. 秋季捕捞时随意取出10尾，称得每尾的质量如下（单位：千克）：

1.0 1.1 1.4 1.5 1.1 0.9 0.8 1.2 1.0 1.2

根据样本, 估计这池鱼的总产量约为多少千克?

4. 小莹为了调查全市初中生的人数, 她对自己所在的乡镇人口和乡镇在校初中生人数作了调查. 乡镇人口约3万, 在校初中生人数为600名, 全市人口约300万. 由此她估计全市在校初中生人数约为6万. 但市教育局提供全市在校初中生人数约为10万, 与她估计的数据相差很远. 你能找出其中的原因吗?

探索与创新

5. 时代中学七年级共有10个班, 为了了解本年级学生一周中收看电视节目所用的时间, 小亮利用放学时在校门口调查了他认识的60名七年级同学.
- (1) 小亮的调查是抽样调查吗?
 - (2) 如果是抽样调查, 指出调查的总体、个体、样本和样本容量;
 - (3) 根据他调查的结果, 能反映七年级同学平均一周收看电视的时间吗?
 - (4) 请你设计一个合适的调查方案.

4.3 数据的整理



观察与思考

(1) 商场售货员李阿姨一天内售出了20双运动鞋, 依卖出的先后顺序记录下每双鞋子的尺码(单位: 厘米):

24.5 27 23.5 24 24.5 25 26 26 24 24.5
27 25 24.5 25 24.5 23.5 25 26 24 24.5

为了能够清楚地了解当天各种尺码的运动鞋卖出的数量, 应当怎样整理上面的这些数据? 请你帮李阿姨填写下表:

鞋的尺码/厘米	23.5	24	24.5	25	26	27
划 记	┃	┃				
销售量/双	2	3				

(2) 从上面的表格中, 你能得到哪些信息?



销售量最多的是尺码为24.5厘米的运动鞋, 其次为25厘米和26厘米, 进货时还要多进这些尺码的运动鞋.

李阿姨将运动鞋的销售量分别按6种不同的尺码进行分组, 从而可以一目了然地看出各种不同尺码的鞋子的销售情况.

(3) 学校阅览室为了更好地为同学们服务, 管理员老师登记了两周内(每周5天)的读者人次, 并分别按天进行了整理, 得到如下的数据(单位: 人次):

183, 209, 195, 178, 204, 197, 191, 208, 167, 215.

可以看出, 10天中来阅览室看书的人次, 最多的一天为 _____ 人次, 最少的一天为 _____ 人次.

学校阅览室将两周内的读者人数按天进行分组, 便于了解10天中读者人数的变化情况.

(4) 想一想, 在问题(1)(3)中, 你还有其他的分组的方法吗?



在问题(1)中, 还可以按生产运动鞋的厂家进行分组.

对于问题(3), 也可以按年级或班级将读者人数进行分组.



由此可以看出, 对数据进行**分组整理**, 就是将收集到的所有数据, 按照一定的标准划分为若干组. 通过对杂乱无章的数据进行分组整理, 可以比较清晰地掌握数据的整体分布情况.

例1 在一次外语测验中, 学校从七年级400名学生中, 随机抽取了40名同学的外语成绩, 得到如下数据(单位: 分):

89, 87, 97, 92, 61, 93, 75, 80, 89, 73, 79, 75, 76, 81, 76, 88, 82, 79, 64, 69, 91, 85, 52, 81, 60, 63, 67, 82, 70, 73, 64, 54, 58, 62, 66, 70, 54, 92, 65, 63.

(1) 请将上述数据进行分组: 90分以上(含90分)为第一组, 80分~89分为第二组, 70分~79分为第三组, 60分~69分为第四组, 50分~59分为第五组, 49分以下(含49分)为第六组, 并分别统计各分数段中的人数.

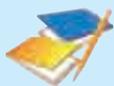
(2) 估计该年级在这次测验中, 成绩不及格的人数.

解 (1) 根据题意, 按分数段, 各段中的数据和各段中的人数, 设计并完成以下表格:

七年级外语测验抽样统计表

分数段	数据/分	划记	人数/人
90分以上(含90分)	97, 92, 93, 91, 92;	正	5
80分~89分	89, 87, 80, 89, 81, 88, 82, 85, 81, 82;	正 正	10
70分~79分	75, 73, 79, 75, 76, 76, 79, 70, 73, 70;	正 正	10
60分~69分	61, 64, 69, 60, 63, 67, 64, 62, 66, 65, 63;	正 正 正	11
50分~59分	54, 58, 54, 52;	正	4
49分以下(含49分)			0

(2) 在这个样本中, 不及格率为 $\frac{4}{40} \times 100\% = 10\%$. 由此估计七年级在这次测验中, 成绩不及格的人数约为 $400 \times 10\% = 40$ (人).



练习

1. 以下是2010年第六次全国人口普查大陆31个省、自治区、直辖市的人口数(单位:万人), 请把该组数据进行适当的分组整理:

1 961	1 294	7 185	3 571	2 471	4 375	2 746	3 831
2 302	7 866	5 443	5 950	3 689	4 457	9 579	9 402
5 724	6 568	10 430	4 603	867	3 885	8 042	3 475
4 597	300	3 733	2 558	563	630	2 181	



习题4.3



复习与巩固

1. 空气的质量状况通常用空气污染指数显示, 下面是某城市4月份每天16时检测得到的空气污染指数:

139, 153, 112, 100, 89, 67, 68, 75, 47, 46, 50, 81, 94, 98, 89, 120,
132, 140, 144, 151, 131, 125, 106, 115, 98, 97, 68, 77, 102, 130.

其中, 污染指数为0~50时, 空气质量为优; 51~100时, 空气质量为良; 101~150时, 空气质量为轻微污染; 151~200为轻度污染; 201~250为中度污染; 251~300为中度重污染; 大于301为重度污染. 试按上述七种情况, 将数据进行分组整理.

2. 在某段公路上, 交警部门设置了雷达探测器监测汽车的行驶速度. 以下是雷达探测器记录的某时段驶过该公路的30辆汽车的速度(单位: 千米/时):

55	49	61	47	49	54	49	57	59	58
50	51	48	49	80	58	48	54	70	71
62	45	56	65	78	52	60	55	49	75

将以上数据进行分组整理.



拓展与延伸

3. 利用适当的收集数据的方式, 收集你们班中所有同学体重的资料, 然后将数据进行适当的分组整理.



探索与创新

4. 在本节“观察与思考”所举的例子中, 李阿姨将运动鞋的销售量分别按6种不同的尺码进行了分组整理. 一般来说, 销售量大的尺码, 进货量也应该大, 同时还要考虑尺码齐全时, 生意会好些. 如果李阿姨可再进100双运动鞋, 请你帮她设计一个各种尺码运动鞋的进货方案.

4.4 扇形统计图



图 4-2 足球赛



观察与思考

在“世界杯”足球赛闭幕后，时代中学学生会对本校七年级学生收看比赛电视实况转播的情况用随机抽样方式进行调查，样本容量为 50，将数据分组整理后，列出下表：

抽样调查 50 名学生收看“世界杯”足球赛电视转播情况统计表

观看场数/场	0	1	2	3	4	5	6	7
观看人数/人	4	5	10	13	8	6	3	1
观看人数占调查人数的百分比/%	8	10	20	26	16	12	6	2

校学生会根据该统计表，制作出扇形统计图（图 4-3）。

观察扇形统计图，思考下面的问题：

(1) 在这幅统计图中，整个圆被分成多少个扇形？在这些扇形中，哪个扇形的面积最大？哪个最小？

(2) 每个扇形的面积与统计表中的数据有怎

抽样调查 50 名学生收看“世界杯”足球赛电视转播统计图

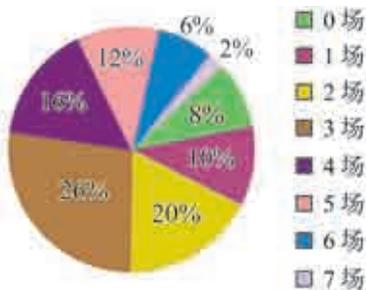


图 4-3

样的关系?

(3) 每个扇形的面积各占整个圆面积的百分之几?

(4) 图 4-3 中所有扇形表示的百分比之和是多少? 量出每个扇形的圆心角的度数, 这些圆心角的度数之和是多少?

(5) 根据“加油站”中的文字说明, 你能说出图 4-3 是怎样绘制的吗?

(6) 你从图 4-3 中可以得到哪些信息?



加油站

顶点在圆心的角叫做圆心角.

扇形的圆心角的度数=该扇形

面积占整圆面积的百分比 $\times 360^\circ$.

由于扇形统计图可以直观地反映各部分占整体的百分比, 所以在统计中也常常用扇形统计图表达数据.

例1 据新华社 2008 年 5 月 5 日报道, 截止到 2007 年底, 全国共有共青团员 7 543.9 万人. 其中, 学生团员 3 872.8 万人, 农村团员 2 032.5 万人, 从事第二产业的团员 553.9 万人, 第三产业及其他行业中的团员 1 084.7 万人. 试用扇形统计图表示全国共青团员人数的分布情况.

解 (1) 该则新闻报道, 已对全国团员人数按学生、农村、第二产业、第三产业及其他行业分四组进行了整理, 各组人数如下表所示:

2007 年全国共青团员人数统计表

单位: 万人	
学生团员	3 872.8
农村团员	2 032.5
从事第二产业的团员	553.9
第三产业及其他行业中的团员	1 084.7
合 计	7 543.9

(2) 上述四组团员人数占全国团员总人数的百分比分别为:

学生团员人数占团员总人数的百分比为 $\frac{3\,872.8}{7\,543.9} \approx 51.34\%$;

农村团员人数占团员总人数的百分比为 $\frac{2\,032.5}{7\,543.9} \approx 26.94\%$;

从事第二产业的团员人数占团员总人数的百分比为 $\frac{553.9}{7\,543.9} \approx 7.34\%$;

第三产业及其他行业中的团员人数占团员总人数的百分比为 $\frac{1\,084.7}{7\,543.9} \approx 14.38\%$.

(3) 各扇形的圆心角的度数分别为:

学生团员: $360^\circ \times 51.34\% \approx 185^\circ$;

农村团员: $360^\circ \times 26.94\% \approx 97^\circ$;

从事第二产业的团员:

$360^\circ \times 7.34\% \approx 26^\circ$;

第三产业及其他行业中的团员:

$360^\circ \times 14.38\% \approx 52^\circ$.

(4) 按圆心角的大小在同一个圆中画出扇形.

(5) 把各部分扇形占整体的百分比标注在相应扇形上, 并在扇形图的上方或下方添加标题.

这样就制作出 2007 年全国共青团员人数分布的扇形统计图 (图 4-4).

2007 年全国共青团员人数分布统计图

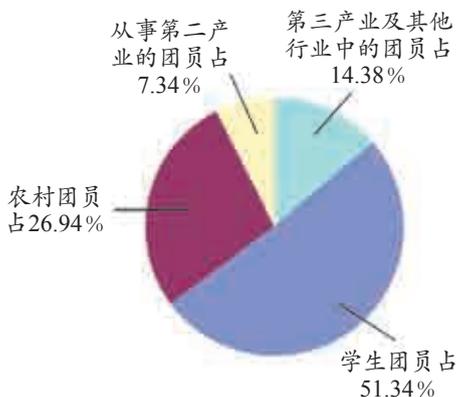


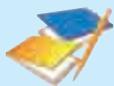
图 4-4



你能总结出制作扇形统计图的步骤吗?

制作扇形统计图的步骤:

- (1) 将数据分组整理, 列出统计表;
- (2) 分别计算各部分在整体中所占的百分比;
- (3) 分别计算各部分相应的扇形圆心角的度数;
- (4) 用圆规作圆, 再利用量角器画出各圆心角, 从而把圆面按百分比分成若干个扇形;
- (5) 分别将各部分占整体的百分比及相应的名称标注在扇形上; 并填写标题.



练习

1. 根据情境导航中的两幅统计图, 回答下列问题:

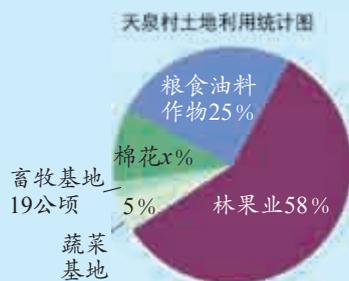
- (1) 从图中你能获得哪些信息?

(2) 这两幅统计图分别属于哪种类型的统计图?

2. 天泉村共有土地 950 公顷, 土地利用情况如图所示.

根据统计图回答下列问题:

- (1) 林果业占地_____公顷;
- (2) 畜牧基地占全村土地的百分比为_____;
- (3) 种植棉花的土地占全村土地的百分比为_____, 占地_____公顷.



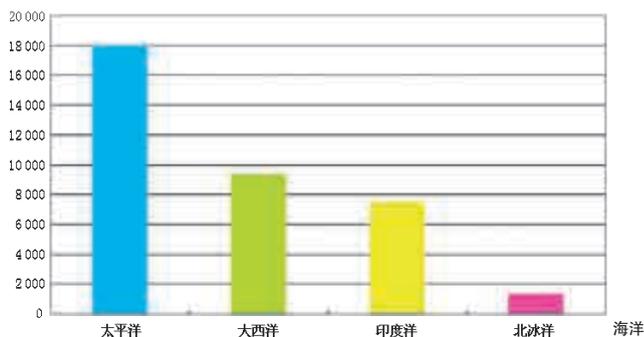
(第2题)



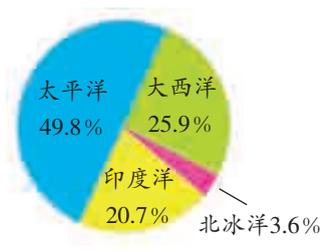
观察与思考

世界四大洋面积统计图

面积/万平方千米



①



②

图 4-5

图 4-5 是世界四大洋面积的条形统计图和扇形统计图, 观察这两幅统计图, 思考下列问题:

- (1) 哪个大洋的面积最大, 哪个最小? 你是从哪幅统计图中看出来的?
- (2) 哪个大洋的面积超过 10 000 万平方千米? 你是从哪幅统计图中看出来的?
- (3) 哪个大洋的面积超过地球海洋面积的 $\frac{1}{3}$? 你是从哪幅统计图中看出来的?
- (4) 从这两幅统计图中, 你还能得到哪些信息? 你认为条形统计图和扇形统计图在表达信息时各有什么优势和不足?

例2 图4-6是某媒体发布的2050年世界人口形势预测图. 小莹根据图中的数据, 绘制了三幅统计图(图4-7①②③). 请根据这些统计图, 回答下列问题:



图4-6

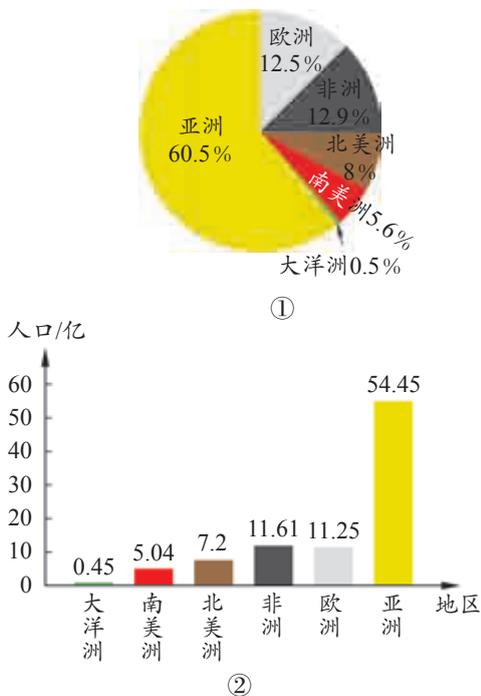


图4-7

- (1) 图4-7①②③分别是哪种类型的统计图? 你能分别给它们加上标题吗?
- (2) 从哪幅统计图中, 能看出1957年后近百年内世界人口的变化趋势?
- (3) 预测2050年亚洲人口将大约达到多少亿? 非洲呢? 你是从哪幅统计图中看出的?
- (4) 2050年亚洲人口与其他各洲人口的总和相比, 你能得到什么结论? 你是从哪幅统计图看出的?

解 (1) 图4-7①是扇形统计图, 标题为2050年世界人口分布预测统计图;

图4-7②是条形统计图, 标题为2050年世界各洲人口预测统计图;

图4-7③是折线统计图, 标题为1957~2050年世界人口变化预测统计图.

(2) 从折线统计图中可以看出1957年后近百年内世界人口的变化趋势.

(3) 2050年亚洲人口将大约达到54.45亿, 非洲人口将大约达到11.61亿, 这是从条形统计图中看出的.

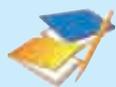
(4) 2050年亚洲人口将比其他各洲人口的总和还要多. 这是从扇形统计图看到的.

一般来说, 对于分组整理后的数据信息可以使用不同的统计图来表达. 但是, 不同的统计图有不同的特点, 因而在表达数据时, 应根据需要选用适当的统计图.

(1) 如果需要表达的数据是分散的, 并且需要清晰地表示出各组实际数据, 那么使用条形统计图较为适宜.

(2) 如果需要表达各个组的数据占整体的百分比, 那么使用扇形统计图较为适宜.

(3) 如果需要清晰地显示各组的数据在一段时期内的变化, 或分析数据的变化趋势, 那么使用折线统计图较为适宜.



练习

- 对于下列统计的数据, 选用哪种统计图表达较为适宜:
 - 我国2000年~2010年国内生产总值(GDP);
 - 我国运动员在历届奥运会上获得金牌的总数;
 - 银行营业厅调查一周内顾客对工作人员服务态度的评价(满意、一般、差);
 - 学校合唱队队员的年龄.
- 为了了解学生的个人爱好情况, 班主任对七年级一班进行了一次问卷调查. 学生只能从“我最喜爱音乐”、“我最喜爱美术”、“我最喜爱体育”和“其他”中选择一项. 将调查结果分组整理后列成下表, 请根据表中的数据绘制扇形统计图.

七年级一班学生个人爱好情况统计表

单位: 人

学生总数	最喜爱音乐的学生数	最喜爱美术的学生数	最喜爱体育的学生数	其他
50	16	11	18	5



习题4.4

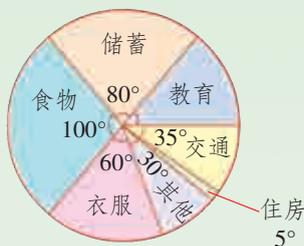


复习与巩固

- 下面两幅图分别是小亮和小莹两个家庭一年的现金支出统计图.
 - 两家用于购买食物的支出占家庭总支出的百分比是多少?

- (2) 根据统计图可以说小亮家在衣服方面的支出比小莹家的多吗?
 (3) 要回答问题(2)还需要什么资料?

小亮家的现金支出统计图



小莹家的现金支出统计图



(第1题)

2. 下面记录的是七年级一班女生1分钟内仰卧起坐测验的成绩(单位:次):

25 33 31 28 13 36 30 29 32 21
 32 29 25 30 19 27 31 35 26 28

根据上面的成绩填写下表,并绘制扇形统计图表示该班女生仰卧起坐次数的百分比.

次数/次	15以下(含15)	16~24	25~32	33以上(含33)
人数/人				
占该班女生总数的百分比/%				



拓展与延伸

3. 《中国2009年统计年鉴》公布2008年全国各级各类学校在校学生人数如下:

类别	普通 高校	普通中学 (高中、初中)	职业 中学	普通 小学	特殊教育	学前 教育	总计
人数/万人	2 021.0	8 050.5	761.1	10 331.5	41.7	2 475.0	
占在校学生总人数的百分比/%							

- (1) 请计算出各类学生人数占在校学生总人数的百分比,填入上表(精确到1%);
 (2) 用扇形统计图表示(1)中的统计结果.
4. 一所学校准备搬迁.在迁校之前,学校就300名学生的到校方式进行了一次调查,分组整理后得到下列数据:

到校方式	步 行	骑自行 车	乘公共 汽车	其 他
人数/人	60	100	130	10

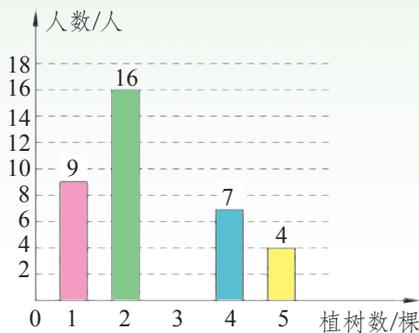
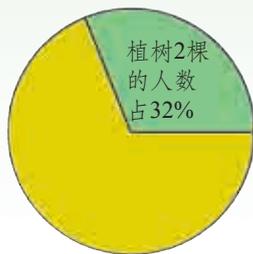
- (1) 根据上表中的数据制作出条形统计图和扇形统计图;
 (2) 你认为哪种统计图能更清楚地表达出学生的到校方式?



探索与创新

5. 为了绿化环境, 时代中学七年级一班同学都积极参加植树活动. 今年植树节时, 该班同学的植树情况的部分数据如图所示. 请根据统计图的信息, 回答下列问题:

- (1) 七年级一班共有多少名同学?
- (2) 将条形统计图补充完整;
- (3) 将扇形统计图补充完整.



(第5题)



回顾与总结

1. 本章学习了哪些主要内容? 总结一下, 与同学交流.
2. 什么是普查? 什么是抽样调查? 在什么情况下不必要或不能采用普查的方法, 举例说明.
3. 什么是简单随机抽样? 在选取样本时, 要注意哪些问题?
4. 对于收集到的数据为什么要分组整理?
5. 绘制扇形统计图的步骤有哪些?
6. 统计图是反映数据信息的一种常用形式. 利用统计图可以直观有效地表示数据, 可以对数据进行分析 and 比较, 可以较清晰地获得统计对象的信息, 可以为人们作出合理决策提供依据.
7. 三种统计图的特点与作用如下表所示:

	条形统计图	折线统计图	扇形统计图
特点	用一个单位长度表示一定的数量		用整个圆面积表示整体,用各个扇形面积表示每组数据占整体的百分比
	用长方形的高表示数据的大小	用折线起伏表示数据的增减变化	
作用	能清晰地反映各组数据及它们之间的大小关系	能清晰地反映数据在不同时段的变化情况	能清晰地反映出各组数据在整体中所占的百分比,以及各组数据之间的多少关系

8. 请找出一个与生活有关的实际问题,通过简单随机抽样,选取样本,收集有关的数据,进行整理后,绘制扇形统计图.



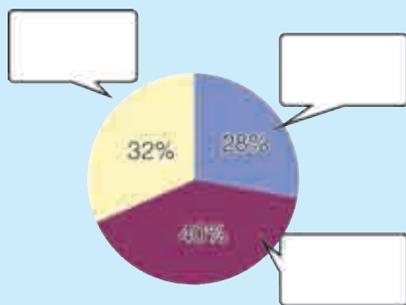
综合练习



复习与巩固

- 社会实践小组为了了解周边地区老年人的健康情况,分别采用了下列四种不同的抽样调查:
 - 在公园里调查了 100 名老年人的健康情况;
 - 在医院调查了 100 名老年人的健康情况;
 - 调查了 10 名老年邻居的健康情况;
 - 访问派出所,从户籍网随机调查了该地区 10% 的老年人的健康情况.
 你认为哪种抽样调查比较合理?
- 为了了解全市九年级学生体育达标的情况,随机地从不同学校抽取 1 000 名学生的体育成绩进行分析,试指出这次调查中的总体、个体、样本和样本容量.
- 某出租车公司在“十一”长假期间平均每天的营业额为 5 万元,由此推断 10 月份的营业额约为 $5 \times 31 = 155$ (万元).你认为这样的推断是否合理?
- 某专业户承包了 12.5 公顷土地,其中 4 公顷种植粮食作物, 3.5 公顷种植蔬菜,其余的栽种果树.

- 在统计图上找出各种作物的面积所对应的扇形,并在相应的方框内标出作物名称;
- 计算各种作物的面积所对应的扇形圆心角的度数.



(第 4 题)

5. 以下是七年级一班25名男同学的体重(单位: 千克):

56 52 47 49 48 51 53 55 42 54
 55 54 56 58 43 45 61 50 44 52
 57 49 50 48 51

- (1) 请把以上数据进行适当的分组整理.
 (2) 根据分组整理的结果, 列出统计表, 并绘制相应的扇形统计图.

6. 学校举办元旦游艺晚会, “竞技场”中设有“投圈”、“钓鱼”、“扔沙包”、“猜谜语”、“射击”5项活动, 每个同学只准参加其中的一项活动. 报名参加“竞技场”活动的同学共有600名, 小莹根据报名情况画出了下面的统计图. 请根据统计图回答:

- (1) 参加“钓鱼”和“射击”活动的同学各有多少名?
 (2) 参加“投圈”和“扔沙包”活动的同学人数占参加竞技场活动总人数的百分之几?
 (3) 在统计图中, 表示“猜谜语”活动的扇形的圆心角为多少度?

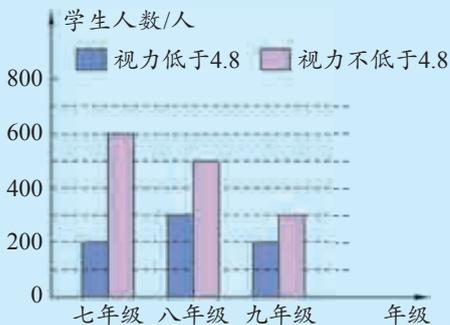


(第6题)

拓展与延伸

7. 某地教育局对所在城区初中学生的视力情况进行抽样调查, 如图是根据调查结果画出的条形统计图. 请根据图中信息回答下列问题:

- (1) 本次调查中共抽查了多少名学生?
 (2) 请估算该城区视力不低于4.8的学生所占的百分比, 并用扇形统计图表示出来.



(第7题)

- (3) 假设该城区七年级共有5800名学生. 请估计这些学生中视力低于4.8的学生约有多少人.

8. 为了使人们认识“白色污染”的严重性, 七年级一班的6名同学分别记录了自己家中一周内丢弃塑料袋的数量, 结果如下(单位: 个):

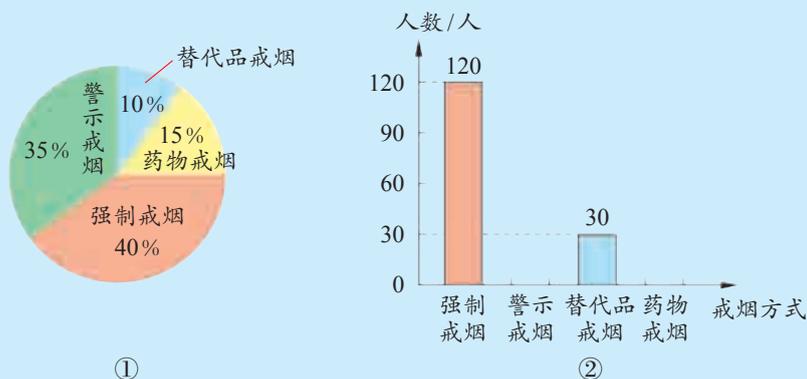
33 25 28 26 25 31

全班有50名同学, 根据这6名同学提供的数据, 估计一周内全班同学各家共丢弃塑料袋的数量大约是多少.

探索与创新

9. 吸烟有害健康！你知道吗，即使被动吸烟也大大危害人类的健康。为此，联合国规定每年的5月31日为“世界无烟日”。我国也于2011年元月1日起在公共场所实行“禁烟”。为配合“禁烟”活动，时代中学组织同学在某社区开展“你支持哪种戒烟方式”的问卷调查，征求18岁以上居民的意见。问卷设四个选项，每位被调查的居民选择其中一项填写。将调查结果整理后，制成下列两幅统计图（图①②）。根据统计图回答下列问题：

(1) 同学们一共随机调查了多少人？



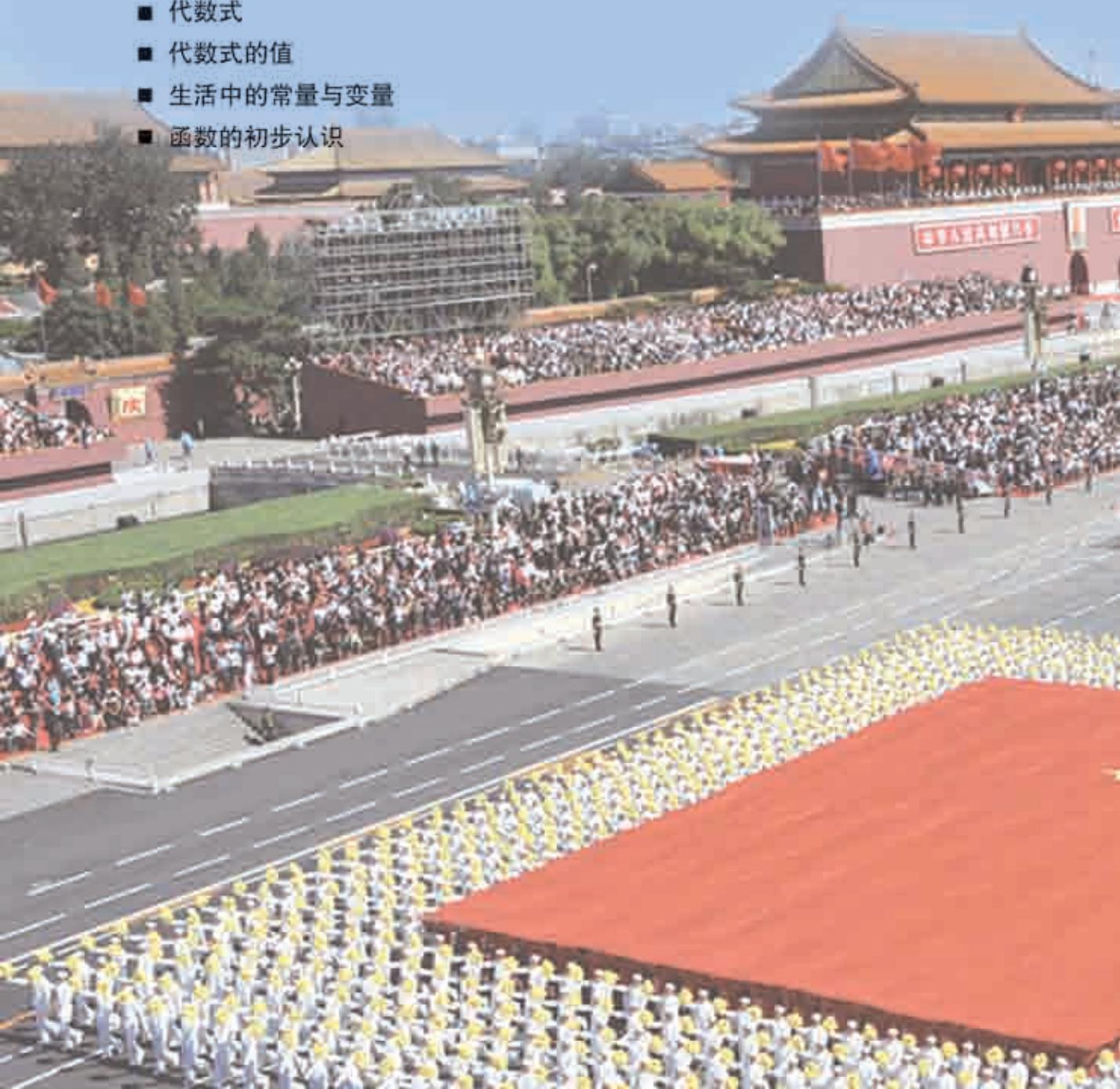
(第9题)

- (2) 根据以上信息，把条形统计图补充完整；
- (3) 如果该社区有2万名18岁以上居民，那么根据以上调查结果，估计该社区大约有多少人支持采取“警示戒烟”这种戒烟方式？
10. 在以下问题中，选择一项你感兴趣的问题进行调查，收集数据后，按问题中的要求加以分组整理，然后画出扇形统计图。
- 调查一个社区居民年龄的分布情况，按下列年龄段分组：0~5岁，6~18岁，19~40岁，41~60岁，61岁及61岁以上。
 - 调查本班同学们最喜爱足球、篮球、排球、乒乓球中哪项球类运动。
 - 调查本班同学们的出生年月。

第5章 代数式与函数的初步认识

内容提要

- 用字母表示数
- 代数式
- 代数式的值
- 生活中的常量与变量
- 函数的初步认识





情境导航

这是中华人民共和国建国60周年时，天安门广场举行阅兵及游行活动的照片。游行队伍的各个方队依次从天安门前通过。如果一个方队的每行及每列都由 n 个人组成，那么：

(1) 这个方队共有多少人？

(2) 这个方队的最外围一周共有多少人？



5.1 用字母表示数



交流与发现

在上一学段中，我们知道用字母可以表示数. 思考下面的问题，并与同学交流.

(1) 3 和 5 是与 4 相邻的两个整数. 同样地，-2 与 0 是与 -1 相邻的两个整数. 如果用字母 n 表示任意一个整数，那么与它相邻的两个整数怎样表示呢？

(2) 我们知道，互为相反数的两个数的和是零.

如果用字母 a 表示任意一个有理数，上面的法则可写成 _____ .

(3) 某城市市内公用电话的付费标准是：通话一方从电话接通开始计费，通话时间不超过 3 分钟付费 0.2 元，超过 3 分钟后，每 1 分钟加付 0.1 元（不足 1 分钟按 1 分钟计费）. 请按上述付费标准填写下表：

通话时间/分	0~3	4	5	6	7	8	...
付费/元							...

如果通话时间用字母 n ($n > 3$, n 是整数) 表示，那么通话 n 分钟应付费多少元？

用字母表示数的例子我们过去遇到很多，你还能举出几个例子吗？

用字母表示数
有什么优越性？



从这些例子可以看出，用字母表示数，能一般而又简明地把数、数量关系、法则和变化规律表达出来，为叙述和研究问题带来方便.

例1 用含有字母的式子表示：

(1) 七年级一班共有学生 n 人，其中男生有 m 人. 女生有多少人？

(2) 七年级二班有女生 a 人, 男生人数是女生人数的 $\frac{4}{3}$ 倍. 男生有多少人?

(3) 从小亮家到学校的路程是 2 千米, 小亮骑自行车的速度是 v 千米/时. 小亮骑自行车从家到学校需要多少时间?

(4) 甲、乙二人分别从 A, B 两地同时出发, 相向而行. 甲的速度为 a 千米/时, 乙的速度为 b 千米/时, 经过 2 时他们相遇. A, B 两地的距离是多少?

解

(1) 女生有 $(n - m)$ 人;

(2) 男生有 $\frac{4}{3}a$ 人;

(3) 小亮骑自行车从家到学校需要 $\frac{2}{v}$ 时;

(4) A, B 两地的距离是 $2(a + b)$ ^❶ 千米.

在含有字母的乘式中, 通常省略“ \times ”号或将“ \times ”号用“ \cdot ”表示, 并将数字因数写在字母的前面. 数字与数字相乘时, 一般仍用“ \times ”号. 含有字母的除法通常写成分数的形式.



挑战自我

用蓝、白两种颜色的六边形地砖铺成图 5-1 所示的图案. 自左向右, 第 1 个图中有白色地砖_____块; 第 2 个图中有白色地砖_____块. 那么, 第 4 个图中应有白色地砖多少块? 第 100 个图中呢? 你是怎样猜出来的? 如果 n 是正整数, 第 n 个图中应有白色地砖多少块? 与同学交流.

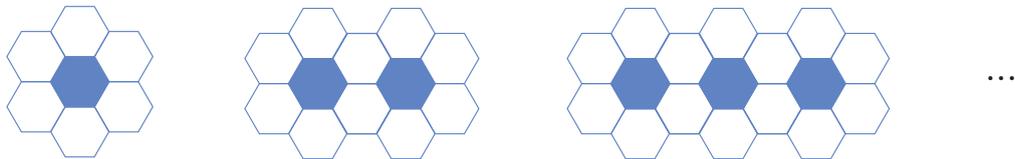
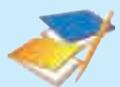


图 5-1

❶ $\frac{4}{3}a$ 也可写成 $\frac{4}{3} \cdot a$, $2(a+b)$ 也可写成 $2 \cdot (a+b)$.



练习

1. 填空:

(1) 如果 a 是一个有理数, 那么 a 的绝对值可表示为____; a 的 2 倍可表示为____;
 a 的一半可表示为____; 比 a 大 2 的数可表示为____; a 的平方可表示为____;
 如果 $a \neq 0$, a 的倒数可表示为____;

(2) 如果用 a, b 分别表示长方形的长和宽, 那么长方形的周长可以表示为____,
 面积可以表示为____.

2. 请指出下列各式的写法是否规范; 如果不规范, 给出规范的写法:

$$5 \times a; \quad a \times b - 1; \quad a \cdot b \div c^2;$$

$$(a+b)2; \quad \frac{6}{5}a \times b; \quad 5 \cdot 2xy.$$



习题5.1



复习与巩固

1. 填空:

(1) 某地 7 时的气温是 3°C , 12 时的气温比 7 时的气温高 $m^\circ\text{C}$, 12 时的气温是____ $^\circ\text{C}$;
 (2) 买 b 千克苹果用了 8 元钱, 买 1 千克苹果需要____元.

2. 三角形三条边的长分别是 a 厘米、 b 厘米和 c 厘米, 它的周长是多少?

3. 天泉村现有村民 n 人, 耕地 160 公顷, 人均占有耕地多少公顷?

4. 如果练习本售价每本 1.8 元, 铅笔售价每支 0.5 元, 那么:

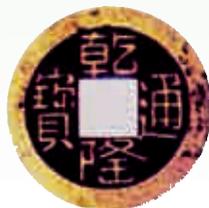
(1) 买 x 本练习本和 4 支铅笔共需多少元?
 (2) 买 4 本练习本和 y 支铅笔共需多少元?
 (3) 买 x 本练习本和 y 支铅笔共需多少元?

5. 解答本章“情境导航”中提出的问题.



拓展与延伸

6. 右图是清代乾隆年间铸造的一枚圆形钱币, 如果它的外圆半径为 r 厘米, 中间正方形小孔的边长为 a 厘米. 求这枚古币的一面的面积.

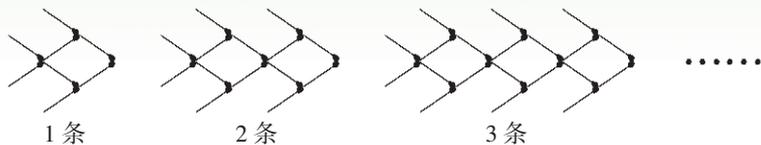


(第 6 题)

7. (1) 如果 a 是有理数, 那么 $-a$ 是负数吗? 为什么?
 (2) 如果 a 是有理数, 那么 $|-a|$ 是正数吗? 为什么?

探索与创新

8. 如图是小莹用火柴搭的 1 条、2 条、3 条“金鱼”, 搭 4 条“金鱼”需要火柴多少根? 搭 n 条“金鱼”需要火柴多少根?



(第 8 题)

5.2 代数式

用含有字母的式子填空:

- (1) 大西洋是世界第二大洋. 据测量, 它的东西宽度每年约增加 4 厘米, 经过 n 年将增加_____厘米.
 (2) 长方形的长和宽分别是 a 和 b , 正方形的边长是 c , 长方形与正方形面积的和是_____.

按上面问题列出的式子 $4n$ 和 $ab+c^2$, 以及 5.1 节中所列的式子 $n-m$, $\frac{4}{3}a$, $\frac{2}{v}$, $2(a+b)$ 等, 都是代数式 (algebraic expression).

特别地, 单独一个表示数的字母或一个数也是代数式. 例如 a , -5 , $\frac{3}{2}$ 等都是代数式.

例 1 设字母 x 表示甲数, 字母 y 表示乙数,

用代数式表示:

- (1) 甲数的 3 倍与乙数的 2 倍的和;
 (2) 甲数与乙数的 5 倍的差的一半.

解 (1) $3x + 2y$; (2) $\frac{1}{2}(x - 5y)$.



小资料

一般地, 用运算符号加、减、乘、除、乘方、开方 (以后将学到) 把数或者表示数的字母连接起来, 所得到的式子叫做代数式.

在例1中，“甲数的3倍与乙数的2倍的和”、“甲数与乙数的5倍的差的一半”是用文字表达数量关系的，这样的语言称为文字语言（或自然语言），而 $3x+2y$ 与 $\frac{1}{2}(x-5y)$ 是用数、表示数的字母、运算符号及表示运算顺序的符号表达数量关系的，这样的语言称为符号语言. 符号语言是一种重要的数学语言. 例1是把文字语言译成了符号语言. 可以看出，在描述问题时符号语言比文字语言更简单明确，更具有一般性.

牛顿（Newton, 1643-1727, 英国物理学家、数学家、天文学家）说过：“解答一个含有数量关系的问题时，只要把问题中的自然语言译成数学语言就行了.”



牛 顿

例2 用代数式表示：

- (1) 某数的3倍与2的差的平方；
- (2) 三个连续偶数的和.

解 (1) 如果把某数用 x 表示，那么某数的3倍与2的差的平方可以表示为 $(3x-2)^2$ ；

(2) 如果用 $2n$ (n 为整数) 表示中间的一个偶数，那么三个连续偶数可以由小到大依次表示为 $2n-2$, $2n$, $2n+2$.

所以，三个连续偶数的和是 $(2n-2) + 2n + (2n+2)$.

一个偶数可以用 $2n$ 表示.
一个奇数怎样表示?



例3 设字母 a 表示甲数，用代数式表示下列各题中的乙数：

- (1) 甲、乙两数的和为10；
- (2) 甲、乙两数的积为-1；
- (3) 甲数是乙数的5倍；
- (4) 乙数比甲数的平方小2.

解 (1) $10-a$ ；

(2) $-\frac{1}{a}$ ；

(3) $\frac{1}{5}a$ ；

(4) a^2-2 .



史海漫游

代数的由来

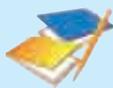
“代数”一词起源于阿拉伯数学家阿尔·花拉子米 (al-Khowārizmī, 约 783–850) 的著作《al-Kitāb al-jabr wa l-muqābala》. 该书大约写于公元 820 年. 按照阿拉伯原文, 这一书名直译出来就是“利用还原与对消运算的简明算书”, 书中讨论的是初等代数及各种实用算术问题. 该书于 1183 年被译成拉丁文传入欧洲, 英文译作 algebra (代数).



韦达

1591 年, 法国数学家韦达 (Vieta, 1540–1603) 在他的著作《分析方法入门》中引进了用字母表示数的方法, 创设了大量的代数符号, 促进了代数学的发展. 17~18 世纪中期, 代数学被理解为在代数符号上进行计算的科学. 瑞士数学家欧拉 (Euler, 1707–1783) 的《代数学入门》(1770), 是对 16 世纪中期发展起来的符号代数学的系统总结.

1859 年, 我国清代数学家李善兰 (1811–1882) 和英国人伟烈亚力 (Wylie, 1815–1887) 合译了英国数学家德·摩根 (De Morgan, 1806–1871) 于 1835 年出版的著作《Elements of Algebra》, 把书名译为《代数学》. 从此, “代数”这个名词开始在我国正式使用.



练习

1. 选择题:

(1) 在 $-3x$, $6-a=2$, $4ab^2$, $\frac{m-3}{m}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, x 中, 是代数式的共有 ().

(A) 7 个 (B) 6 个 (C) 5 个 (D) 4 个

(2) 下列代数式中, 表示“ m 与 n 的和的 2 倍”的是 ().

(A) $2m+n$ (B) $m+2n$
(C) $2(m+n)$ (D) $(m+n)^2$

2. 用代数式表示:

(1) x 的 2 倍与 y 的一半的差; (2) x 的 $\frac{4}{5}$ 与 -1 的和.

3. 用代数式表示:

(1) 与某数的乘积等于8的数;

(2) 比某数的平方少1的数.

例4 将下列代数式用文字语言表示:

(1) $(a+b)^2$; (2) a^2+b^2 .

你能说出这两个式子有什么不同吗?

解 (1) $(a+b)^2$ 用文字语言表示为 a 与 b 的和平方的平方;

(2) a^2+b^2 用文字语言表示为 a, b 两个数的平方和(即平方的和).

用文字语言怎样表示代数式 $(a-b)^2$ 与 a^2-b^2 ? 与同学交流.

例5 结合两个不同的情境, 解释代数式 $a+2$ 的意义.

解 代数式 $a+2$ 是具有一般意义的. a 可以表示数量. 例如某班原有学生 a 人, 本学期又转来新生2人, 本学期这个班共有学生 $(a+2)$ 人. a 也可以表示长度. 例如一个圆的半径为 a 厘米, 将半径增加2厘米, 圆的半径为 $(a+2)$ 厘米; 等等.

你还可以对代数式 $a+2$ 的实际意义做出其他解释吗? 与同学交流.



广角镜

数字代码

我们每天都在与书打交道. 你是否注意到, 每本书的封底都印有 ISBN 字样, ISBN 后面有 10 个数字组成的编码. 例如, 一本商务印书馆出版的《现代汉语词典(修订本)》的底面印有“ISBN 7-100-01777-7”. 你知道这些编码代表什么吗?

“ISBN”是英文“International Standard Book Number”的缩写, 意思是“国际统一书号”. 编码中的10个数字分为4组, 中间用短线“-”分开. 前三组分别代表“出版地域”、“出版社”和“书名”, 第四组是检验码. 检验码是用来检验前三组代码的正确性的, 以防止伪造书号. 在“ISBN 7-100-01777-7”中, 第一组编码“7”表示这本书是在中国大陆出版的; 第二组编码“100”是商务印书馆的代码; 第三组编码“01777”是《现代汉语词典(修订本)》这本书的代号; 第四组编码“7”是检验码.

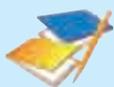
我们上面学过, 字母可以表示数和其他事物. 同样, 数字也可以表示字母或其他事物. 这种用数字表示一定事物的方式, 叫做数字代码. 数字代码可以很方便地表达和传递信息, 应用十分广泛. 除了书号是数字代码外, 居民身份证的号码、汽车牌照、驾驶证

号码、邮政编码和电话号码等也都是数字代码. 再如, 利用二进制中的数 0 和 1 组成的数字表示用字母组成的文字, 从而使计算机和因特网成为当今社会人们学习、工作、科研、生产和生活中的重要帮手.

你还能举出几个数字代码的例子吗?

请你收集一些表示事物的数字代码, 并了解它们的意义, 然后与同学交流.

你能编写一个具有实际意义的数字代码吗? 试一试. 编好后, 与同学交流.



练习

1. 将下列代数式用文字语言表示:

(1) $5 - 4a$;

(2) $(a + b)(a - b)$.

2. 两个正方形的边长分别是 a 厘米和 b 厘米 ($a > b$).

(1) 它们的面积之和是多少?

(2) 它们的面积相差多少?

(3) 它们的周长之和是多少?

(4) 它们的周长相差多少?

3. 结合两个不同的情境, 解释代数式 $2a$ 的意义.



习题5.2



复习与巩固

1. 用代数式填空:

(1) a, b 两数的平方和减去它们乘积的 2 倍: _____;

(2) a, b 两数的差与它们和的乘积: _____;

(3) 一件商品原来的价格是每件 m 元, 如果涨价 15%, 那么每件涨价 _____ 元, 涨价后每件的定价是 _____ 元, 买 n 件这种商品, 共需 _____ 元;

(4) 一个两位数, 如果个位上的数字为 b , 十位上的数字为 a , 那么这个两位数可用代数式 _____ 表示; 如果一个三位数的个位上的数字为 c , 十位上的数字为 b , 百位上的数字为 a , 那么这个三位数可用代数式 _____ 表示.

2. 把下面的符号语言译成文字语言, 并填表:

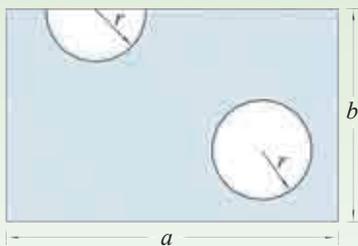
符号语言	文字语言
$x + 3y$	
$3(x + y)$	
$\frac{a-1}{b}$	
$\frac{1}{a-b}$	

3. 结合两个不同的情境，解释代数式 ab 的意义.
4. 今年新上市的苹果每千克的售价是 m 元，比去年同期下降了8%. 去年同期每千克苹果的售价是多少元？



拓展与延伸

5. 为了合理利用淡水资源，某市自来水的收费标准规定：当每户居民每月的用水量不超过6立方米时，按每立方米 a 元收费；超过6立方米时，超过的部分按每立方米 b ($b > a$) 元收费. 小莹家三月份共用水9立方米，应缴自来水水费多少元？
6. 用代数式表示图中阴影部分的面积.



(第6题)



探索与创新

7. 将一根钢筋锯成 a 段需要 b 分钟，按此速度将同样的钢筋锯成 c 段，需要多少分钟？
8. 把正整数按照由小到大的顺序排列，可得到一列数 $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$
 - (1) 从这列数的第2个数开始数，数到第6个数时，一共数了多少个数？
 - (2) 从这列数的第10个数开始数，数到第100个数时，一共数了多少个数？
 - (3) 从这列数的第 m 个数开始数，数到第 n 个数 ($n > m$) 时，一共数了多少个数？

5.3 代数式的值

学校举办庆元旦智力竞赛，竞赛的记分方法是：开始前，每位参赛者都有100分作为底分，竞赛中每答对一个问题加10分，答错或不答得0分. 小亮代表七年级一班参加竞赛，共答对了 x 个问题，他的最后得分是多少？

根据记分方法，他的最后得分是 $(100 + 10x)$ 分.

如果小亮答对了2个问题，也就是 $x = 2$ ，那么小亮的最后得分就是

$$100 + 10 \times 2 = 120 \text{ (分).}$$

这里，120是代数式 $100 + 10x$ 当 $x = 2$ 时的值.

想一想，如果小亮答对了3个问题，应该怎样计算他的得分？

像这样，用数代替代数式里的字母，按照代数式指明的运算计算出的结果，叫做代数式的值（value of algebraic expression）。

$100+10x$ 的值是由字母 x 所取的值确定的. 将代数式中的字母 x 换成具体的数，就将求代数式的值的问题转化成数的计算问题.



例1 当 $a = -2$ 时，求代数式 $a^3 - 3a^2 + 2a + 15$ 的值.

解 当 $a = -2$ 时，

$$\begin{aligned} & a^3 - 3a^2 + 2a + 15 \\ &= (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) + 15 \\ &= -8 - 12 - 4 + 15 \\ &= -9. \end{aligned}$$

例2 为了保护黄河流域的生态环境，减少水土流失，共青团中央等部门共同发起了“保护母亲河行动”，要在沿河流域大力植树，号召青少年积极参加义务植树劳动. 时代中学八年级有 x 名同学参加植树，平均每人植树3棵；七年级有 y 名同学参加植树，平均每人植树2棵.

- (1) 该校七、八年级同学共植树多少棵？
- (2) 如果 $x = 98$, $y = 102$ ，那么这个学校七、八年级的同学共植树多少棵？

解 (1) 八年级同学共植树 $3x$ 棵，七年级同学共植树 $2y$ 棵，该校七、八年级同学共植树 $(3x + 2y)$ 棵.

(2) 在代数式 $3x + 2y$ 中，分别用98代替 x ，用102代替 y ，得到

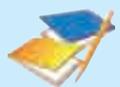


图 5-2 黄河中游的一段

$$3 \times 98 + 2 \times 102 = 498 \text{ (棵)}.$$

由此可知，七、八年级同学共植树 498 棵.

这里，498 是代数式 $3x + 2y$
当 $x = 98$, $y = 102$ 时的值.



练习

1. 求下列代数式的值:

(1) $3x + 2$, 其中 $x = -3$;

(2) $x^2 - 2x + 3$, 其中 $x = 5$.

2. 根据下面所给字母 a , b 的值, 分别求代数式 $3a^2 - 4b$ 的值:

(1) $a = 2$, $b = -3$;

(2) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$.

3. 甲、乙两地相距 150 千米, 一辆汽车从甲地行驶至乙地需要 t 时, 这辆汽车的平均速度是多少? 如果 $t = 3$, 那么这辆汽车的平均速度是多少?



习题5.3



复习与巩固

1. 填表:

x	-2	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	1.5
$\frac{1}{2}x + 1$						
$x^2 + x$						

2. 根据下面所给字母 x , y 的值, 求代数式 $-2x^2 - 2xy + y^2$ 的值:

(1) $x = 3$, $y = -2$;

(2) $x = -2$, $y = -3$.

3. 当 $a = 2$, $b = -4$ 时, 求下列代数式的值:

(1) $a^2 - b^2$; (2) $(a - b)^2$; (3) $a^2 + b^2$; (4) $(a + b)^2$.

4. 当 $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$ 时, 求下列代数式的值:

(1) $(a - b)(b - c)(c - a)$;

(2) $b^2 - 4ac$.

5. 已知三个连续奇数的中间一个数是 $2n + 1$ ，请写出其余两个数. 如果 $n = 11$ ，求出这三个连续奇数.
6. 天泉村去年的小麦总产量为 a 吨，今年产量比去年增加了 10%，今年的小麦总产量是多少吨？如果去年的小麦总产量为 480 吨，今年的小麦总产量是多少吨？



拓展与延伸

7. 某城市出租车的收费标准为：3 千米以内收起步价 8 元，超过 3 千米后每千米加收 1.6 元（不足 1 千米的按 1 千米计费）. 小亮乘出租车去体育中心观看足球比赛，出租车行驶了 a 千米（ a 是大于 3 的整数）应付车费多少元？如果 $a = 10$ ，应付车费多少元？
8. 代数式 $3a$ 的值一定大于 a 吗？为什么？举例说明.



探索与创新

9. 下面是按一定规律排列的一列数：3, 6, 9, 12, 15, 18,
- (1) 在上面这列数中，第 n 个数怎样表示？
- (2) 在上面这列数中，第 100 个数是什么数？
- (3) 369 是上面这列数中的数吗？如果是，它是第几个数？

5.4 生活中的常量与变量



交流与发现

解答下面的问题，并与同学交流.

(1) 在 5.3 节中，小亮在智力竞赛中答对了 x 个问题，得分是 $100 + 10x$ ，如果用 y （分）代表小亮的得分.

① 计算当 x 取下列数值时 y 的值，并填写下表：

答对的题数 x /个	1	2	3	4	5
得分 y /分					

② 在这个问题中，哪些量保持不变？哪些量可以取不同的数值？

(2) 某种期刊每册定价 5.80 元, 买 3 册应付款 _____ 元; 买 5 册应付款 _____ 元; 如果买 x 册, 应付款 y 元, 那么 y 用关于 x 的代数式表示为 $y =$ _____.

(3) 如图 5-3, 一个长方形的推拉窗, 窗扇高 1.5 米, 如果活动窗扇拉开的距离为 x 米, 拉开后的通风面积为 y 平方米, 那么 y 用关于 x 的代数式表示为 $y =$ _____.



图 5-3 推拉窗

(4) 小亮设计了一个计算机程序, 输入和输出的数据如下表:

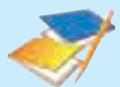
输入 (x)	...	1	2	3	4	...
输出 (y)	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$...

当输入的数据是 8 和 10 时, 输出的数据分别是多少? 当输入的数据用 x 表示时, 输出的数据 y 怎样用关于 x 的代数式表示?

(5) 在问题 (2) (3) (4) 中, 哪些量保持不变? 哪些量可以取不同的数值? 分别把它们指出来.

在某一问题中, 保持不变的量叫做**常量** (constant), 可以取不同数值的量, 叫做**变量** (variable).

请你再举出用式子表示变量之间关系的一些实例, 与同学交流.



练习

1. 指出下列公式中的常量和变量:

(1) 电费的计算公式为 $y = 0.52x$, 其中 y (元) 表示电费, 0.52 (元/千瓦时) 是单价, x (千瓦时) 表示用电量;

(2) 等边三角形的周长公式为 $l = 3a$, 其中 l 表示等边三角形的周长, a 表示等边三角形一边的长;

(3) 时和分的换算公式为 $t = 60T$, 其中 t, T 都表示时间, t 的单位为分, T 的单位为时;

(4) 平行四边形的面积公式为 $S = ah$, 其中 S 表示平行四边形的面积, a 为平行四边形的底边长, h 表示这边上的高.

2. 指出下列问题中的常量和变量, 并将其中的一个变量用关于另一个变量的代数式表示:

- (1) 一辆汽车以 100 千米/时的速度在公路上行驶, 经过的路程 s (千米) 与行驶时间 t (时) 之间的关系;
- (2) 海拔每上升 1 千米, 气温就下降 6°C . 某时刻, 地面气温为 20°C , 高出地面 x 千米处的气温为 y ($^{\circ}\text{C}$).



观察与思考

(1) 图 5-4 是某地 2011 年 6 月 28 日的气温变化图. 观察图 5-4, 回答下列问题:

① 这天_____时气温最高, 最高气温是_____;

② 这天共有_____个小时气温在 31°C 以上;

③ 这天的 9 时、12 时、21 时的气温分别是_____、_____、_____;

④ 这天从_____时到_____时气温逐渐上升;

⑤ 在这幅图中, 哪些量是变量?

这幅图还提供了哪些信息? 与同学交流.

(2) 山青水库的蓄水量 Q 与最大水深 h 之间的关系, 经过测量如下表所示:

最大水深 h /米	0	5	10	15	20	25	30	35
蓄水量 Q /万立方米	0	20	40	90	160	275	437.5	650

根据上表, 回答下列问题:

① 当最大水深为 20 米时, 水库的蓄水量是多少? 当最大水深为 30 米时, 蓄水量是多少?

② 在这个问题中, 哪些量是变量?

最大水深 h 的值在表内第一行各值中选取, 对于水深 h 每取一个确定的值,

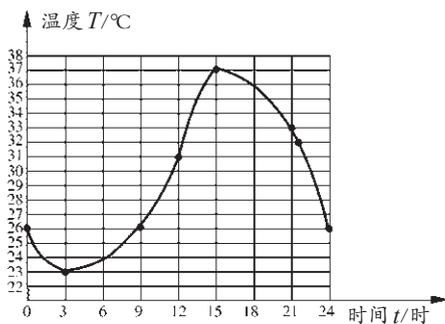


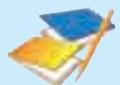
图 5-4

对于时间 t (时) 每取一个确定的值, 气温 T ($^{\circ}\text{C}$) 的值也随着唯一确定.



蓄水量 Q 的值也随着唯一确定.

生活中利用图表表示变量之间关系的例子很多,你能举出几个实例吗?

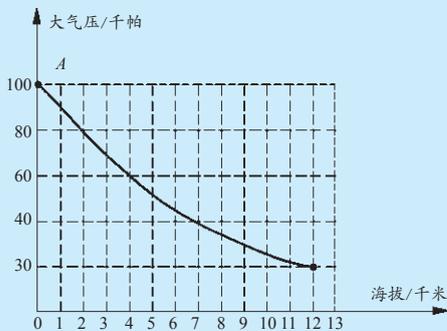


练习

1. 空中一个物体由静止自由下落,它下落的距离与时间之间有下面的关系:

时间 t /秒	1	2	3	4	...
距离 h /米	4.9×1	4.9×4	4.9×9	4.9×16	...

- (1) 当物体下落5秒时,它下落的距离是多少?下落2.5秒时呢?
 - (2) 将下落的距离 h 用关于时间 t 的代数式表示;
 - (3) 在这个问题中,哪些量是变量?哪些量是常量?
2. 地球周围被厚厚的大气层所包围,大气对物体会产生一定的压强.在不同的高度,由于空气稀薄程度不同,所产生的大气压也不同.右图表示的是不同海拔的大气压.



(第2题)

- (1) 海拔为2千米时,大气压大约是多少?海拔为6.5千米时呢?
- (2) 图中反映了哪两个量之间的关系?
- (3) 你从图中能得到什么信息?



习题5.4



复习与巩固

1. 指出下列问题中的常量和变量:

- (1) 正方形的周长 l 与它的边长 a 之间的关系是 $l = 4a$;
- (2) 一台机器上的轮子的转速为60转/分,轮子旋转的转数 n (单位:转)与时间 t (单位:分)之间的关系为 $n = 60t$;
- (3) 小亮练习1500米长跑,他跑完全程所用的时间 t (单位:秒)与他跑步的平均速度 v (单位:米/秒)的关系为 $t = \frac{1500}{v}$.

2. 王朋星期一至星期五每天工作8小时,星期六工作4小时,星期日休息.如果用 y

表示王朋 x 个星期中工作的时间(时), 请写出 y 与 x 之间的关系式. 在这个问题中, 哪些量是常量? 哪些量是变量?

3. 填写下表, 并观察表中两个代数式的值的变化情况.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$5a + 6$									
a^2									

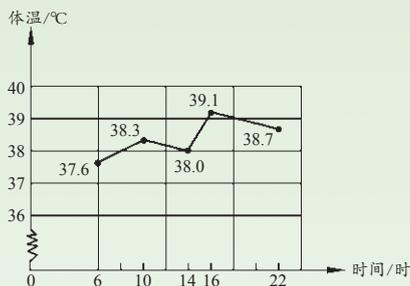
(1) 随着 a 的值逐渐增大, 两个代数式的值有什么变化?

(2) 估计哪个代数式的值先达到 100;

(3) 在表左端的代数式中, 哪些量是变量?

哪些量是常量?

4. 右图是一位病人从早 6 时到晚 22 时的体温变化图. 这位病人早晨 6 时的体温是多少? 12 时的体温大约是多少?



(第 4 题)

5. 某种型号轿车的耗油量 y (升) 可以用关于行驶路程 x (千米) 的代数式 $\frac{2}{25}x$ 表示.

(1) 根据上述关系填写下表:

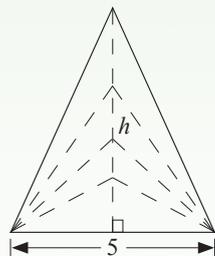
行驶路程 x /千米	80	120	140	200
耗油量 y /升				

(2) 在这个问题中, 哪些量是常量? 哪些量是变量?

6. 某家电商城将原定价每台 4 850 元的 A 品牌空调按九折降价销售. 降价后这个商城每天销售 A 品牌空调 x 台, 总收入 y 元. 试把 y 用关于 x 的代数式表示出来. 在这个问题中, 哪些量是变量? 哪些量是常量?

拓展与延伸

7. 如图, 一个三角形的底边长为 5, 底边上的高 h 可以任意伸缩. 把三角形面积 S 用关于高 h 的代数式表示出来. 在这个问题中, 哪些量是变量? 哪些量是常量?



(第 7 题)

探索与创新

8. 对于温度, 有些国家采用摄氏温度表示, 有些国家采用华氏温度表示. 华氏温度 y ($^{\circ}\text{F}$) 与摄氏温度 x ($^{\circ}\text{C}$) 之间的关系如下表所示:

$x/^{\circ}\text{C}$...	-10	0	10	20	30	...
$y/^{\circ}\text{F}$...	14	32	50	68	86	...

- (1) 观察上表, 你发现当摄氏温度每升高 10°C 时, 华氏温度是怎样变化的?
 (2) 根据(1)中的发现, 分别求摄氏温度为 -20°C 和 40°C 时的华氏温度;
 (3) 华氏温度为 100°F 时, 摄氏温度是多少?

5.5 函数的初步认识



交流与发现

思考下面的问题, 并与同学交流.

- (1) 一台彩色电视机屏幕的对角线长度是34英寸, 换算成公制为多少厘米?
 (2) 说一说, 你家的电视机屏幕是多少英寸的, 换算成公制为多少厘米?
 (3) 如果某种电视机屏幕的对角线长度是 x 英寸, 换算成公制是 y 厘米, 试把 y 用关于 x 的代数式表示出来;
 (4) 在问题(3)中, 哪些量是常量? 哪些量是变量? y 的值是由哪个变量的取值确定的?
 在问题(3)中, y 用关于 x 的代数式表示为 $y = 2.54x$, 其中2.54是常量, x 与 y 都是变量, y 的值是由 x 的取值确定的. 例如, 当 $x = 34$ 时, $y = 2.54 \times 34 = 86.36$ (厘米).
 (5) 研究5.4节中提到的问题, 你发现变量 y 与 x 之间有什么关系?



小资料

电视机屏幕的尺寸 (指它的对角线长度) 一般采用两种计量单位: 一种是英制, 以英寸为单位; 一种是公制, 以厘米为单位. 这两种单位之间的换算关系是

$$1 \text{英寸} = 2.54 \text{厘米}.$$

在同一个变化过程中, 有两个变量 x 和 y , 如果对于变量 x 的每一个确定的值, 都能随之确定一个 y 值, 我们就把 y 叫做 x 的函数 (function), 其中 x 叫做自变量 (independent variable). 如果自变量 x 取 a 时, y 的值是 b , 就把 b 叫做 $x = a$ 时的函数值 (value of function).

例如, 在上面问题中, 86.36是关于 x 的代数式 $2.54x$ 当 $x = 34$ 时的值, 也叫做函数 $y = 2.54x$ 当 $x = 34$ 时的函数值.

如果一个变量与另一个变量之间的函数关系可以用一个数学式子表示出来，我们就把这个数学式子叫做该函数的**表达式**（expression）。

例1 人行道用同样大小的小正方形水泥地砖铺设而成. 图 5-5 中的每一个小正方形表示一块地砖.

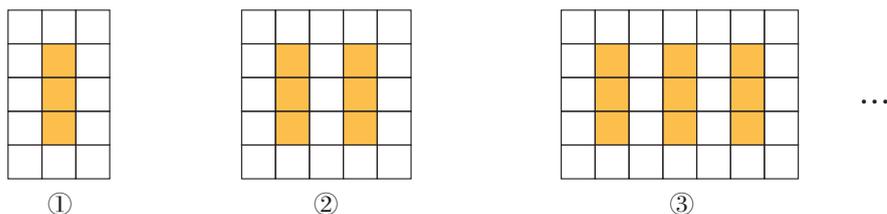


图 5-5

(1) 按图 5-5 ①②③ … 的次序铺设水泥地砖，铺设第④个图形将需要多少块地砖？

(2) 如果用 n 表示上述图形中的序号， S 表示第 n 个图形中地砖的块数，写出 S 与 n 之间的表达式. 指出在这个问题中哪些量是常量，哪些量是变量，哪个量是哪个量的函数.

(3) 铺设序号为 100 的图形时，需要多少块地砖？

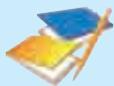
解 (1) 在图 5-5 中，图①中有 3×5 块地砖，图②中有 5×5 块地砖，图③中有 5×7 块地砖. 从第 2 个图形开始，每个图形都比它前面的一个图形多 2 列地砖，因此第④个图形应当有 $5 \times 9 = 45$ 块地砖.

(2) 根据 (1) 中发现的规律，第 n 个图形中地砖的块数应当是 $5(2n + 1)$ ，即 $S = 5(2n + 1)$.

在这个问题中，5，2，1 是常量， S 和 n 是变量， S 是 n 的函数.

(3) 当 $n = 100$ 时， $S = 5 \times (2 \times 100 + 1) = 1\,005$ (块).

本题还有哪些不同的解法？与同学交流.



练习

1. 当 x 分别取 -1 ， 0 ， 2 时，求下列函数的函数值：

(1) $y = 8x + 2$;

(2) $y = \frac{x}{x+2}$.

2. 如果三角形一条边的长为 x 厘米，这条边上的高为 6 厘米，那么这个三角形的面积 $y =$ _____ 平方厘米；当 $x = 4$ 厘米时， $y =$ _____ 平方厘米；当 $x = 8$ 厘米时， $y =$ _____ 平方厘米.



习题5.5



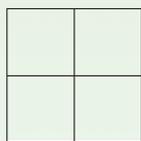
复习与巩固

1. 已知1立方厘米钢的质量是7.8克, 写出正方体钢块的质量 y (克)与它的棱长 x (厘米)之间的表达式. 在这个问题中, 哪些量是变量, 其中哪个量是自变量?
2. 果农委托水果店代销苹果, 每箱销售价为45元, 每销售1箱付给水果店劳务费5元. 请写出果农的实际收入 y (元)与销售数量 x (箱)之间的表达式. 在这个问题中, y 的值是由哪个变量的取值确定的? 当 $x=100$ 时, y 的值是多少?

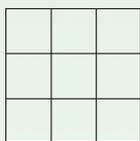


拓展与延伸

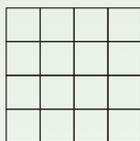
3. 如图, 在正方形中画1条纵线和1条横线, 便把正方形分成了4部分(图①); 如果画2条纵线和2条横线, 便把正方形分成了9部分(图②).



①



②



③

...

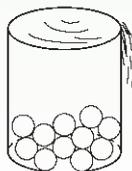
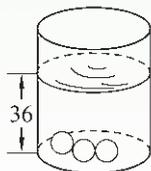
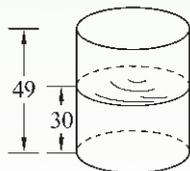
(第3题)

- (1) 在正方形中画3条纵线和3条横线, 便把正方形分成几部分?
- (2) 在正方形中画 n 条纵线和 n 条横线, 便把正方形分成 S 部分, 试写出变量 S 和 n 之间的表达式.
- (3) 如果在正方形中画99条纵线和99条横线, 能把正方形分成多少部分?



探索与创新

4. 如图, 小亮受“乌鸦喝水”故事的启发, 利用一只高49厘米的量桶和一些体积相同的小球进行如下实验:



(第4题)

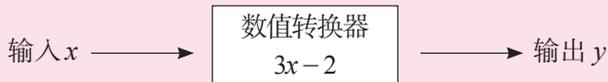
先向量桶内注水，使水面高30厘米；再放入3个小球，量得水面的高度是36厘米.

- (1) 如果再放入一个小球，量桶中水面会升高到多少厘米？
- (2) 当放入 x 个小球时，量桶内水面的高度为 y （厘米），请写出变量 y 与 x 之间的表达式；
- (3) 至少放入几个小球时，量桶中的水会溢出？



回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容？总结一下，并与同学交流.
2. 用字母表示数有什么优越性？
3. 在列代数式和读代数式时，你认为应当注意哪些问题？
4. 一个代数式可以具有不同的实际意义. 你能解释代数式 $\frac{5}{m}$ 的实际意义吗？
5. 一个代数式可以看做一台数值转换器. 例如，对于代数式 $3x-2$ ，如果把 x 所取的某一个值输入到数值转换器 $3x-2$ 中，便可输出相应的一个数 y ， y 的值由 x 的取值所确定.



你能通过上面这个例子，说明什么是代数式的值吗？

6. 什么叫做常量？什么叫做变量？你能从生活中举出几个常量和变量的例子吗？
7. 请你解释什么是函数，什么是函数值，并举例说明.
8. 在本章学习中，你经历了一些探索规律的过程，请你谈谈解决这类问题的体会.
9. 在本章中，你见过哪几种表示变量之间函数关系的方法？它们各有什么特点？



综合练习



复习与巩固

1. 填空：

- (1) 水库的水位由 h 米下降了4米，下降后的水位是_____米；
- (2) 学校食堂有煤250吨，每天用煤 m 吨；采取节能措施后，每天少用煤 n 吨. 这样，这些煤可比原来多用_____天；

- (3) 一棵树苗, 刚栽种时, 树高 1.5 米, 以后每年长 0.3 米, n 年后树高为 _____ 米;
- (4) 一颗人造卫星绕地球运行一周需 a 时, 如果这颗卫星在太空运行 2 年 (每年按 365 天计算), 它将绕地球转 _____ 周.

2. 当 $a=3, b=-2, c=-1$ 时, 求下列代数式的值:

(1) $c - (c - a)(c + b)$; (2) $\frac{a + b + c}{a - b + c}$.

3. 观察下表中两个变量间的数量关系:

	1	2	3	...	n	...
	4×1	4×2	4×3	...	$4n$...

你能用生活中的实例解释表中的关系吗? 把你所举实例的两个变量的名称及字母表示填在表中左边的空格内.

4. 电业部门每月都按时去居民家查电表, 电表读数与上次读数的差就是这段时间内用电的千瓦时数. 上月初小亮家电表显示的读数为 300, 本月初电表显示的读数为 n .

- (1) 小亮家上月用电多少千瓦时?
- (2) 如果每千瓦时的电费为 0.52 元, 全月的电费为 y (元), 那么上月小亮家应缴的电费是多少?
- (3) 在问题 (2) 中, 哪些量是常量? 哪些量是变量? y 是哪个变量的函数?



(第 4 题)

5. 上海磁悬浮列车的设计载客量每列为 959 人, 每小时单向可运行 12 列, 若双向运行 x (时) 最大客流量为 y (人), 请写出 y 与 x 之间的表达式. 如果双向运行 6 时, 最大客流量是多少人?
6. 某音像书店对外租赁光盘. 收费办法是: 每张光盘在租赁后的头两天每天按 0.8 元收费, 以后每天按 0.5 元收费 (不足 1 天按 1 天收费).

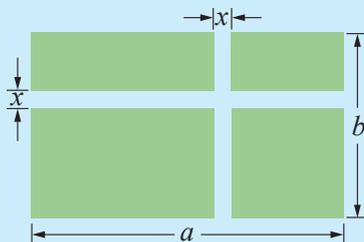
(1) 根据这个收费标准填写下表:

租期 x /天	1	2	3	4	10	20	30
租金 y /元							

(2) 请写出两天后租金 y (元) 和租期 x (x 是大于 2 的整数) 之间的表达式.

拓展与延伸

7. 如图, 学校的草坪上有两条小路. 用代数式表示除小路外的草坪的面积, 并计算当 $x = 1.2$ 米, $a = 40$ 米, $b = 18$ 米时草坪的面积.

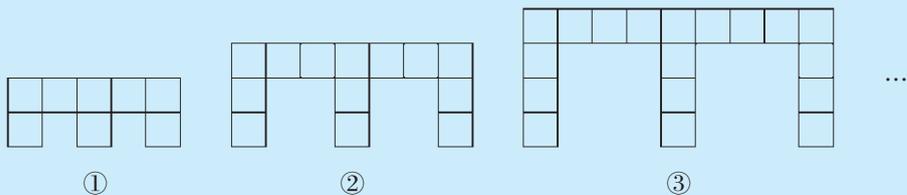


(第 7 题)

8. 时代中学阶梯教室共有 15 排座椅, 第一排有 20 个座椅, 其后每排都比前一排多 2 个座椅. 第 n 排的座椅个数为 _____, 这里 n 取 _____. 由此可以计算第 10 排有 _____ 个座椅, 最后一排有 _____ 个座椅.

探索与创新

9. 下面的一列图形是由边长为 1 的正方形按照某种规律排列而成的.



(第 9 题)

- (1) 观察图形, 填写下表:

图 形	①	②	③	...
正方形的个数	8			...
图形的周长	18			...

- (2) 在第 5 个图形中, 正方形的个数为 _____, 周长为 _____; 猜想第 n 个图形中, 正方形的个数为 _____, 周长为 _____.
- (3) 这些图形中, 如果任意一个图形的周长为 y , 它含有的正方形的个数为 x , 那么 y 与 x 之间的表达式为 _____.



综合与实践

你知道的数学公式

公式是用来表示同一类问题中各相关量之间的数量关系的数学式子. 在过去的数学学习中, 你已经学过许多公式.

(1) 你记得圆的周长公式吗? 如果用 C 表示圆的周长, r 表示圆的半径, 那么圆的周长公式应当怎样表示?

(2) 在圆的周长公式中, 哪些量是常量? 哪些量是变量? 哪个量是哪个量的函数?

(3) 如果已知圆的半径为 3 厘米, 如何利用圆的周长公式, 求出圆的周长? 如果圆的半径为 10 厘米呢?

(4) 在过去的数学学习中, 你还学过哪些公式? 把它们按不同的类别 (如周长、面积、体积、距离、价格、利率……) 加以整理, 分别用字母把它们表示出来, 并指出哪些量是常量, 哪些量是变量.

(5) 人的体重指数 $BMI = \frac{w}{h^2}$, 其中 w 为人的体重 (千克), h 为身高 (米). 在这个公式中, 哪些量是变量?

你能运用这个公式计算一下你的家人和你所熟悉的人的体重指数, 并根据他的体重指数, 向他提出爱护身体, 注意生活方式的建议吗?

(6) 通过查阅有关书籍、上网查询、请教家长或高年级同学等方式, 收集生活中或科学中经常用到的数学公式, 说出公式中字母所表示的实际意义, 并尽可能地了解这些公式的应用.

已知圆的半径的具体数值, 求圆的周长, 实质上是已知自变量的值, 求函数值的问题.



小资料

中国成年人体重指数的标准为:

- 当 $BMI < 18.5$ 时为轻体重;
- 当 $18.5 \leq BMI < 24$ 时为健康体重;
- 当 $24 \leq BMI < 28$ 时为超重;
- 当 $BMI \geq 28$ 时为肥胖.

最理想的体重指数是 22.



交流与发现

公式是人们通过实验、探索、归纳或通过数学推导得出的. 其实, 利用已有的数学知识和经验, 你也可以发现和推导出一些数学公式, 不信吗? 就让我们一起来探索计算前 n 个正奇数和的公式吧.

先从最简单的情况开始计算:

$$1 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad 1 + 3 + 5 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

你发现上面几个算式等号的左右两边有什么特点?

上述每个算式中, 等号的左边分别是前 2 个、前 3 个、前 4 个、前 5 个正奇数的和, 等号右边 4, 9, 16, 25 都是平方数, 分别可以写成 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 , 而且恰是加数个数的平方. 按照这个规律, 你能猜出下面的算式的结果吗?

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 19 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

请通过具体的计算, 验证你猜得的结果是否正确. 想一想, 如果前 n 个正奇数相加, 第 n 个正奇数如何表示? 它们的和是多少? 你能用公式把你发现的规律表示出来吗? 试一试.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

这样, 我们便探索出前 n 个正奇数和的计算公式. 请用这个公式验证当 $n = 6, 7, 8, 9$ 时, 是否符合公式.

对于这个公式的证明, 将在今后的数学学习中加以解决.



实验与探究

(1) 除了以上我们通过具体计算归纳出前 n 个正奇数和的公式外, 也可以利用构造图形的方法探索出这个公式.

如图 1, 设计一个 $n \times n$ 的方格纸, 其中每个小方格的面积都是 1. 我们可以用涂色的方法去数图中小方格的个数: 先将方格纸的左上角的 1 个小方格涂上颜色, 与它相邻的 3 个小方格都不涂颜色, 再将这 3 个小方格相邻的 5 个小方格都涂上颜色……按这个规律涂下去, 直至最后第 $(2n - 1)$ 个小方格. 这样一来, 方格纸上的方格都既无重复, 又无遗漏地数了一遍. 所以, 这张方格纸共有 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ 个小方格. 另一方面, 利用乘法可

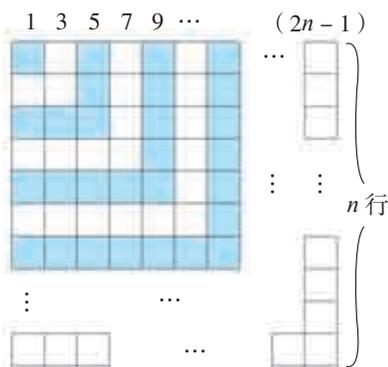


图 1

求得小方格一共有 $n \cdot n$ 个, 即 n^2 个. 于是便可以得到前 n 个正奇数和的计算公式

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

(2) 你能探索出前 n 个正整数和的计算公式吗? 试一试.

观察下面两个图形, 对你有启发吗?

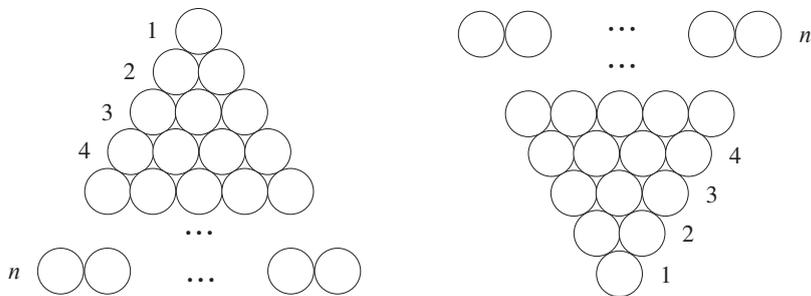


图 2



观察与思考

(1) 分别计算下面的每个算式:

第 1 组

$$1 + 8;$$

$$1 + 8 + 27;$$

$$1 + 8 + 27 + 64;$$

...

第 2 组

$$(1 + 2)^2;$$

$$(1 + 2 + 3)^2;$$

$$(1 + 2 + 3 + 4)^2;$$

...

(2) 分别写出每组算式中的第 4 个算式, 并计算它的结果;

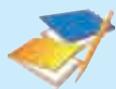
(3) 你发现上面的两组算式分别有什么特点? 两组算式之间有什么联系?

(4) 你能分别写出这两组算式中的第 n 个算式吗? 与同学交流.

(5) 由以上探索过程, 你猜测前 n 个正整数的立方和与前 n 个正整数的和的平方之间有怎样的联系? 由此, 你能得到一个怎样的公式?

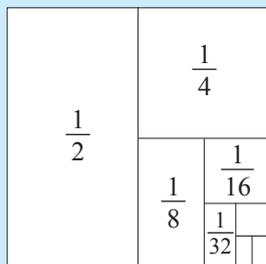
(6) 利用你得到的公式, 计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3$.

通过班内交流或写出小论文等方式, 展示你收集到的或探索出的公式, 从中选出大家认为最常用的 10 个公式, 举例说明它们的用途.



练习

1. 如图, 把一个面积为 1 的正方形等分成两个面积为 $\frac{1}{2}$ 的长方形; 接着把其中一个面积为 $\frac{1}{2}$ 的长方形等分成两



(第 1 题)

个面积为 $\frac{1}{4}$ 的长方形；再把其中一个面积为 $\frac{1}{4}$ 的长方形等分成两个面积为 $\frac{1}{8}$ 的长方形；……如此进行下去.

(1) 利用上述图形, 你能得出计算 $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots + (\frac{1}{2})^n$ 的公式吗?

(2) 利用你得出的公式, 计算:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256}.$$



习题



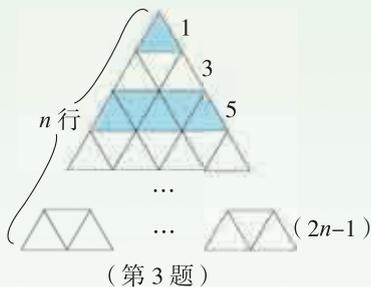
复习与巩固

1. 探索前 n 个偶数和的计算公式: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$.
2. 时代中学七年级共有6个班级, 每班各组织一支篮球队参加本年级篮球联赛. 如果比赛采用单循环制(每支篮球队都要与其他各队比赛1场), 一共要举行多少场比赛? 如果参加比赛的篮球队有 n 支, 你能写出一个计算比赛场数的公式吗?



拓展与延伸

3. 你能利用数图中小三角形的个数的方法, 探索出前 n 个正奇数和的公式吗?
4. 1条直线把平面分成2部分, 2条直线把平面最多分成几部分? 3条直线把平面最多分成几部分? 4条直线呢? ……由此你能探索出 n 条直线把平面最多分成几部分的公式吗?



探索与创新

5. 分别计算下列三组算式:

$$(1) 3^2 + 4^2 = ?$$

$$5^2 = ?$$

$$(2) 10^2 + 11^2 + 12^2 = ?$$

$$13^2 + 14^2 = ?$$

$$(3) 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = ?$$

$$25^2 + 26^2 + 27^2 = ?$$

你发现了什么规律? 利用你发现的规律, 写出一个由9个连续正整数组成, 符合你发现的规律的等式.

第6章 整式的加减

内容提要

- 单项式与多项式
- 同类项
- 去括号
- 整式的加减

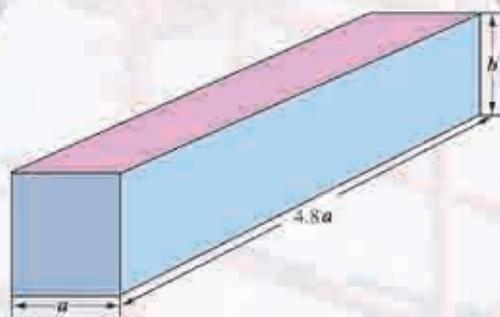


情境导航

你见过集装箱吗？图片中港口码头上摆放着大量的集装箱。

集装箱是有一定规格、便于机械装卸、可以重复使用的装运货物的长方体形的箱子。用集装箱进行货物的运输，已成为当前世界交通运输的主要方式。我国上海、深圳、青岛、大连等八大港口已进入集装箱港口世界 50 强。

已知一个集装箱的长、宽、高分别为 $4.8a, a, b$ （如图），它的六个面的面积分别是多少？这个长方体的表面积是多少？



6.1 单项式与多项式



交流与发现

思考下列问题，并与同学交流.

(1) 卖报的王阿姨从报社以每份 0.35 元的价格购进 a 份《晚报》，以每份 0.50 元的价格售出 b 份 ($b < a$)，那么她此项卖报的收入是 _____ 元.

(2) 从书店邮购每册定价为 a 元的图书，邮费为书价的 5%，邮购这种图书一册共需付款 _____ 元.

(3) 某建筑物的窗户，上半部为半圆形，下半部为长方形 (图 6-1). 已知长方形的长、宽分别为 a , b ，这扇窗户的透光面积是 _____.

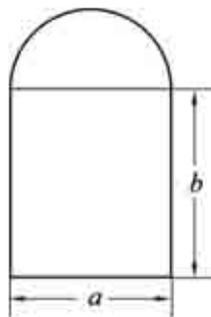


图 6-1

观察上面得到的代数式，以及在第 5 章中遇到的代数式 $\frac{4}{3}n$, $\frac{1}{2}ah$, $ab + c^2$, $\pi r^2 - a^2$ 等，它们分别含有哪几种运算？

像这样，只含有加、减、乘、乘方运算的代数式叫做**整式** (integral expression). 其中，不含有加、减运算的整式叫做**单项式** (monomial).

例如， $0.05ab$, $\frac{4}{3}n$, $-a^2$ 等都是单项式.

特别地，单独的一个字母或一个数也是单项式.

除式中含有字母的代数式不是整式. 如代数式 $\frac{2}{x}$ 不是整式.



单项式中的数字因数，叫做单项式的**系数** (coefficient). 一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的**次数** (degree).

例如，单项式 $3x^2$ 的系数为 3，次数是 2； $-\frac{1}{3}ab^2$ 的系数是 $-\frac{1}{3}$ ，次数是

3; 单项式 x 的系数是 1, 指数也是 1.

单项式的系数是 1 或 -1 时,
“1”通常省略不写, 但“-1”的
符号“-”不能省略.



几个单项式的和叫做**多项式**(polynomial). 例如, $0.5b - 0.35a$, $a + 0.05a$, $ab + \frac{1}{8}\pi a^2$, $\pi r^2 - a^2$ 等都是多项式. 多项式中的每个单项式都叫做这个多项式的**项**(term), 其中不含字母的项叫做**常数项**(constant term).

例如, 多项式 $x^2 + 3x - 2$ 有三项, 分别是 x^2 , $3x$, -2 , 其中 -2 是常数项. 多项式中的每一项都包括它前面的符号.

多项式中次数最高项的次数, 叫做这个**多项式的次数**(degree of a polynomial).

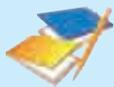
例如, 多项式 $x^2 + 3x - 2$ 中, 次数最高的项是 x^2 , 这一项的次数是 2, 所以这个多项式是一个二次三项式.



挑战自我

观察下列单项式: $-2x$, $4x^2$, $-6x^3$, $8x^4$, $-10x^5$, ...

- (1) 你能说出这列单项式中的第 6 个与第 7 个吗?
- (2) 你能写出这列单项式中的第 2 012 个与第 2 013 个吗?
- (3) 你能写出这列单项式中的第 $2k$ 个与第 $(2k+1)$ 个 (k 是正整数) 吗?



练习

1. 举出三个单项式的例子, 并指出它们的系数和次数.
2. 说出下列单项式的系数和次数:
 $-2x^2$, a^3b , $\frac{2}{3}x^2y^4$, $-a$, $\frac{3xy}{4}$.
3. 说出下列多项式是由哪几项组成的, 它们分别是几次多项式?
(1) $3x - 2y + 1$; (2) $2a^2 - 3a + 5$;
(3) $2a - a^3b$; (4) $1 - x + x^2$.



习题6.1



复习与巩固

1. 下列代数式中, 哪些是整式?

$$2, \quad -3x, \quad -5xy + \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{3}x^2 - 7, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{a+b}{a-b}, \quad x + \frac{2}{3}.$$

2. 下列整式中, 哪些是单项式?

$$-xy^2, \quad 3, \quad a - b^2, \quad x + 1, \quad \frac{xy}{2}.$$

3. 说出单项式 $-2x^2y^3$ 的系数与次数, 并求当 $x = \frac{2}{3}$, $y = -3$ 时, 这个单项式的值.

4. 说出下列多项式的项数和次数, 并分别写出它们的各项:

$$(1) 7 - 3xy^2;$$

$$(2) \pi R^2 - \pi r^2;$$

$$(3) 3x^2 - xy + y^3;$$

$$(4) a^3 - a^2b + ab^2 - b^3.$$

5. 已知多项式 $-\frac{1}{2}x^3y + 3x^2 + 2xy^2 - \frac{2}{3}$, 回答下列问题:

(1) 这个多项式有几项? 写出它所有的项;

(2) 这个多项式的各项中, 次数最高的项是哪一项? 写出它的次数和系数;

(3) 这个多项式有常数项吗? 如果有, 是哪一项?

(4) 当 $x = -2$, $y = -3$ 时, 计算这个多项式的值.

6. 分别写出一个一次、二次、三次多项式, 并写出它们的各项.



拓展与延伸

7. 利用加法交换律将多项式 $3x^2y - 5xy^2 + y^3 - 2x^3$ 的各项, 按其中字母 x 的次数从大到小的顺序重新排列, 可以写成 $-2x^3 + 3x^2y - 5xy^2 + y^3$, 这种排列叫做多项式按字母 x 的降幂排列; 若按 x 的次数从小到大的顺序排列, 又可以写成 _____, 这种排列叫做多项式按字母 x 的升幂排列. 请将下列多项式分别按 x 的降幂和升幂进行排列:

$$(1) x^2 - 2 - 5x^4 + \frac{1}{2}x^3;$$

$$(2) -3x^2y - \frac{3}{5}xy^2 - 5y^3 + \frac{1}{2}x^3.$$



探索与创新

8. 对于单项式 $-2a^2y$, 我们可以从以下多个角度描述它的特点:

- ① 它是一个三次式; ② 它含有两个字母 a 与 y ; ③ 字母 a 的次数是 2, 字母 y 的次数是 1; ④ 它的系数为负数等.

参照以上的分析, 回答下列问题:

(1) 试指出单项式 $3x^2yz$ 与 $-5xy^3$ 的相同点和不同点;

(2) 试用尽可能多的方法对下列单项式进行分类:

$$3a^3x, bxy, 5x^2, -4b^2y, a^3, -b^2x^2, \frac{1}{2}axy^2.$$

6.2 同类项



交流与发现

(1) 图 6-2 是某超市的蔬菜柜台, 你发现蔬菜是怎样摆放的吗?



我发现同类品种的蔬菜都摆放在一起.



图 6-2 超市

(2) 在多项式 $\frac{1}{2}xy + 3x^2 - 5xy + x^2$ 中, 项 $\frac{1}{2}xy$ 与 $-5xy$, $3x^2$ 与 x^2 有什么共同点? 与同学交流.

像这样, 所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同的项, 叫做同类项 (like terms). 常数项都是同类项.



观察与思考

本章“情境导航”中提到的集装箱的上、下底面的面积都是 $4.8a^2$, 它们的和是 $4.8a^2 + 4.8a^2$, 根据乘法对加法的分配律, 可以把这两个同类项合并:

$$4.8a^2 + 4.8a^2 = (4.8 + 4.8)a^2 = 9.6a^2.$$

同样地, 集装箱相邻的两个侧面的面积的和是 $ab + 4.8ab = (1 + 4.8)ab = 5.8ab$.

把一个多项式中的同类项合并成一项叫做合并同类项 (unite like terms).

例1 合并下列多项式中的同类项:

$$(1) 3x^2 + (-2x^2);$$

$$(2) -a^2b - 7a^2b;$$

$$(3) 2mn - 5mn + 10mn;$$

$$(4) -6xy^2 + 6xy^2.$$

解

$$(1) 3x^2 + (-2x^2)$$

$$= [3 + (-2)]x^2$$

$$= x^2;$$

$$(2) -a^2b - 7a^2b$$

$$= (-1 - 7)a^2b$$

$$= -8a^2b;$$

$$(3) 2mn - 5mn + 10mn$$

$$= (2 - 5 + 10)mn$$

$$= 7mn;$$

$$(4) -6xy^2 + 6xy^2$$

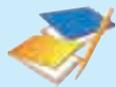
$$= (-6 + 6)xy^2$$

$$= 0.$$

你能总结出合并同类项的方法吗?



合并同类项时, 把同类项的系数相加, 所得的和作为系数, 字母与字母的指数不变.



练习

1. 下列各题中的两项是不是同类项? 为什么?

$$(1) 2x^2y \text{ 与 } \frac{1}{2}x^2y;$$

$$(2) -\frac{1}{3}a^2b^2 \text{ 与 } 0.2a^2b^2;$$

$$(3) a^3 \text{ 与 } b^3;$$

$$(4) -2 \text{ 与 } 3;$$

$$(5) \frac{1}{2}a^3b \text{ 与 } ba^3;$$

$$(6) -2x^2y \text{ 与 } -2xy^2.$$

2. 合并下列多项式中的同类项:

$$(1) 3a + (-5a);$$

$$(2) 4m^2n + m^2n;$$

$$(3) -0.3ab + 0.3ab;$$

$$(4) -a^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

3. 找出下面四项 $2x^2y$, $-2xy^2$, $3x^2y$, $-xy$ 中的同类项, 并将同类项合并.

例2 合并下列多项式中的同类项:

$$(1) 4x^2 - 7x + 5 - 3x^2 + 2 + 6x;$$

$$(2) 5a^2 + 4b^2 + 2ab - 5a^2 - 7b^2.$$

解

$$(1) 4x^2 - 7x + 5 - 3x^2 + 2 + 6x$$

$$= \underline{4x^2} - \underline{7x} + \underline{5} - \underline{3x^2} + \underline{2} + \underline{6x} \quad (\text{标出同类项})$$

$$= 4x^2 - 3x^2 - 7x + 6x + 5 + 2 \quad (\text{加法交换律})$$

$$= (4x^2 - 3x^2) + (-7x + 6x) + (5 + 2) \quad (\text{加法结合律})$$

$$= (4 - 3)x^2 + (-7 + 6)x + (5 + 2) \quad (\text{合并同类项})$$

$$= x^2 - x + 7;$$

$$(2) 5a^2 + 4b^2 + 2ab - 5a^2 - 7b^2$$

$$= \underline{5a^2} + \underline{4b^2} + \underline{2ab} - \underline{5a^2} - \underline{7b^2}$$

$$= 5a^2 - 5a^2 + 2ab + 4b^2 - 7b^2$$

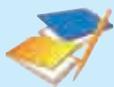
$$= (5 - 5)a^2 + 2ab + (4 - 7)b^2$$

$$= 2ab - 3b^2.$$

合并同类项时, 如果两个同类项的系数互为相反数, 合并后结果为0, 通常说成这两项抵消.



想一想, 当 $x = \frac{1}{3}$, $y = -2$ 时, 如何求多项式 $3x^2 - 2xy^2 + 4x^2y + xy^2 - 4x^2y$ 的值? 与同学交流.



练习

- 先标出多项式 $4x^2 - 8x + 1 - 3x^2 + 6x - 2$ 中的同类项, 然后再分别合并, 并在每一步运算后面用括号注明变形的依据.
- 合并下列各多项式中的同类项:
 - $3x - 4y - 2x + y;$
 - $x^2 - 2xy - 1 - 4y^2 + 2xy + 1.$
- 化简多项式 $2y^2 - 6y - 3y^2 + 5y$, 并求当 $y = -2$ 时的值.



习题6.2



复习与巩固

- 写出三个 $-2a^2b^3$ 的同类项.
- 下列各题合并同类项的结果对不对? 如果不对, 说明理由.

(1) $3a + 2b = 5ab$;

(2) $5y^2 - 3y^2 = 2$;

(3) $7ab - 7ba = 0$;

(4) $4a^2b - 5ab^2 = -a^2b$;

(5) $x + x = 2x$;

(6) $3x^2 + 4x^2 = 7x^4$.

3. 合并下列各多项式中的同类项:

(1) $13x - 3x - 10x$;

(2) $\frac{t}{2} - \frac{t}{3} - \frac{5t}{6}$.

4. 合并下列各多项式中的同类项:

(1) $\frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{4}x + 3 - x$;

(2) $x^2y - 4x^2y + 2x^2y$;

(3) $2m^2 + 1 - 3m - 7 - 3m^2 + 5$;

(4) $5ab - 4a^2b - 8ab^2 + 3ab - ab^2 - 4a^2b$.

5. 本章“情境导航”中集装箱的表面积是多少?

6. 先化简, 再求值:

(1) $2x^2 - 5xy + 2y^2 + x^2 - xy - 2y^2$, 其中 $x = -1$, $y = 2$;

(2) $a^3 - 3a^2b + ab^2 + 3a^2b - b^3 - ab^2$, 其中 $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$.



拓展与延伸

7. 把下列多项式中的 $(a+b)$ 看做一个因式, 合并同类项:

(1) $3(a+b) + 2(a+b) - 4(a+b)$;

(2) $3(a+b)^2 - 2(a+b) - 4(a+b)^2 + 2(a+b)$.

8. 合并多项式 $5x^2 - 3x^3 - x - 4 + x^3 + 2x - x^2 - 9$ 中的同类项, 并把结果按 x 的降幂排列.

6.3 去括号



交流与发现

思考下列问题, 并与同学交流.

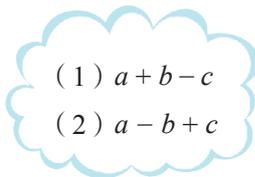
(1) 时代中学原有 a 台电脑, 暑假新购进 b 台电脑, 同时淘汰 c 台旧电脑, 该中学现在有多少台电脑?

(2) 李老师去书店购书, 带去人民币 a 元, 买书时付款 b 元, 又找回 c 元, 李老师还剩余多少元?



$$(1) a + (b - c)$$

$$(2) a - (b - c)$$



$$(1) a + b - c$$

$$(2) a - b + c$$

他们所列的式子都正确，即

$$a + (b - c) = a + b - c;$$

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

(3) 计算下面的两组式子，你发现了什么规律？

$$3x + (2x - x) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad 3x + 2x - x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3x - (2x - x) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad 3x - 2x + x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

由此得出

$$3x + (2x - x) = 3x + 2x - x;$$

$$3x - (2x - x) = 3x - 2x + x.$$

分别比较(1)(2)(3)所得到的四个等式中等号两边的整式，你能总结出去括号的法则吗？

括号前面是“+”号，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里各项的符号都不改变；括号前面是“-”号，把括号和它前面的“-”号去掉，括号里的各项都改变符号。

例1 先去括号，再合并同类项：

$$(1) 4a + (2a - b);$$

$$(2) 2ab - (3ab - 2a);$$

$$(3) a - (-b + a - c);$$

$$(4) 4x - 2(x - y).$$

解 (1) $4a + (2a - b)$

$$= 4a + 2a - b$$

(括号前面是“+”号)

$$= 6a - b;$$

$$(2) 2ab - (3ab - 2a)$$

$$= 2ab - 3ab + 2a$$

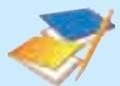
(括号前面是“-”号)

$$= -ab + 2a$$

$$= 2a - ab;$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & a - (-b + a - c) \\ & = a + b - a + c \\ & = b + c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & 4x - 2(x - y) \\ & = 4x - (2x - 2y) && \text{(乘法对加法的分配律)} \\ & = 4x - 2x + 2y \\ & = 2x + 2y. \end{aligned}$$



练习

1. 去括号:

$$(1) \quad a + (-b + c);$$

$$(2) \quad a - (b + c - d);$$

$$(3) \quad -(a - b) + (c - d);$$

$$(4) \quad (a - b) - (-c + d).$$

2. 先去括号, 再合并同类项:

$$(1) \quad (6a - 10b) + (-4a + 5b);$$

$$(2) \quad (-3a + 5b) - (-5a + 7b);$$

$$(3) \quad (3x + 5y) + (5x - 4y) - (2x - 3y);$$

$$(4) \quad 7m + 2(3m - n).$$



习题6.3



复习与巩固

1. 下列各题中的去括号是否正确? 如果不正确, 请改正.

$$(1) \quad a^2 - (2a - c) = a^2 - 2a - c;$$

$$(2) \quad (x - y) - (z - 1) = x - y - z + 1;$$

$$(3) \quad -(x - 1) - (1 + 3x) = -x - 1 - 1 + 3x.$$

2. 先去括号, 再合并同类项:

$$(1) \quad (2x^2 - 3x + 2) + (-x^2 + 3x - 5);$$

$$(2) \quad 2(a - b + c) - 3(a + b - c).$$

3. 化简:

$$(1) \quad 3a + (5x - 6y - 3a) - (2x - 6y);$$

$$(2) \quad (a^2 - 4ab + 4b^2) - 4(a^2 - ab + b^2).$$



拓展与延伸

4. 3, 5, 7 是三个连续奇数, 它们的和 15 能被 3 整除. 任意三个连续奇数的和都能被 3 整除吗? 说明理由.
5. 对于有理数 a , 随意取几个值, 分别求代数式 $(a^3 + 4a) + [(a^3 - 3a - 1) - (2a^3 + a - 1)]$ 的值. 你发现了什么? 请你解释其中的原因.



探索与创新

6. 将式子

$$3x + (2x - x) = 3x + 2x - x,$$

$$3x - (2x - x) = 3x - 2x + x,$$

分别反过来, 你得到两个怎样的等式? 比较你得到的式子, 你能总结出添括号的法则吗?

7. 不改变多项式 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 的值, 把它的后两项放在:

- (1) 前面带有“+”号的括号里;
 (2) 前面带有“-”号的括号里.

6.4 整式的加减

小亮和小莹到希望小学去看望小同学. 小亮买了 10 支钢笔和 5 本字典作为礼品; 小莹买了 6 支钢笔、4 本字典和 2 个文具盒作为礼品. 钢笔的售价为每支 a 元, 字典的售价为每本 b 元, 文具盒的售价为每个 c 元.

- (1) 小亮和小莹买礼品共花了多少元?
 (2) 小亮比小莹多花了多少元?

请你计算:

- (1) 小亮花了 _____ 元;
 小莹花了 _____ 元;
 小亮和小莹共花 _____ 元;
 (2) 小亮比小莹多花 _____ 元.

- 例1** (1) 求 $5a^2b$ 与 $2ab^2 - 4a^2b$ 的和;
 (2) 求 $3x^2 - xy + 1$ 减 $4x^2 + 6xy - 7$ 所得的差.

解

$$\begin{aligned} (1) \quad & 5a^2b + (2ab^2 - 4a^2b) \\ &= 5a^2b + 2ab^2 - 4a^2b && \text{(去括号)} \\ &= a^2b + 2ab^2; && \text{(合并同类项)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (3x^2 - xy + 1) - (4x^2 + 6xy - 7) \\ &= 3x^2 - xy + 1 - 4x^2 - 6xy + 7 && \text{(去括号)} \\ &= -x^2 - 7xy + 8. && \text{(合并同类项)} \end{aligned}$$

- 例2** 化简: $(-a^3 - 6a) + 5a^2 - (a^3 - 10a)$.

解

$$\begin{aligned} & (-a^3 - 6a) + 5a^2 - (a^3 - 10a) \\ &= -a^3 - 6a + 5a^2 - a^3 + 10a \\ &= -2a^3 + 5a^2 + 4a. \end{aligned}$$

整式加减的步骤是先
去括号, 然后合并同类项.



- 例3** 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 求代数式 $15a^2 - [-4a^2 + (6a - a^2) - 3a]$ 的值.

解

$$\begin{aligned} & 15a^2 - [-4a^2 + (6a - a^2) - 3a] \\ &= 15a^2 - [-4a^2 + 6a - a^2 - 3a] \\ &= 15a^2 + 4a^2 - 6a + a^2 + 3a \\ &= 20a^2 - 3a. \end{aligned}$$

先化简, 再
求值, 比较简便.

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 原式 $= 20 \times (-\frac{1}{2})^2 - 3 \times (-\frac{1}{2}) = \frac{13}{2}$.

例3还有其他解法吗? 与同学交流.



挑战自我

在图 6-3 的月历表中,

(1) 任意框出竖列上三个相邻的数, 如果记中间一个数为 a , 那么这三个数的和是多少?

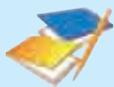
(2) 如果用一正方形在月历表中任意框出四个数, 将其中最小的数记为 a , 那么这四个数的和是多少? 较大的两个数的和与较小的两个数的和相差多少?

(3) 换一张不同的月历表, 还有(1)(2)中的结论吗?

(4) 你发现月历表中的数还存在什么规律? 与同学交流.

日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

图 6-3



练习

1. 先列式, 再计算:

(1) 求 $x^2 - \frac{1}{2}y^2$ 与 $3x + \frac{1}{2}y^2$ 的和; (2) 求 $3a^2 + 2b^2$ 减 $5a^2 - 2b^2 + 1$ 所得的差.

2. 化简:

(1) $(2b - 3c) + (5a - 3b + 2c)$; (2) $(5x^2 - 6x + 4) + (-4x^2 - 4)$;

(3) $(9a^2 - 6ab - b^2) - (4a^2 - ab)$; (4) $(a^2 + 2a + \frac{1}{3}) - (-2a - 3 - 4a^2)$.



习题6.4



复习与巩固

1. 化简:

(1) $a^2b + (-ab^2) - (-a^2b)$; (2) $-y^2 - 2x^2 - (-\frac{1}{3}y^2)$;

(3) $(ax + bx + ay + by) - (ax - bx - ay + by)$;

(4) $(3a^2bc - 2ab) + 2(-2a^2bc + ab^2)$.

2. 先化简, 再求值:

$\frac{1}{2}x - (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y^2) - (2x - \frac{3}{2}y^2)$, 其中 $x = -2$, $y = \frac{2}{3}$.

3. 已知两个整式的和是 $x^3y + x^2y - 2z$, 其中一个整式是 $2x^3y + z$, 求另一个整式.

4. 已知两个整式的差是 $c^2d^2 - a^2b^2$, 其中一个整式是 $a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd$, 求另一个整式.

5. 长方形的长为 $(3a + 2b)$ 米, 长比宽多 $(a - b)$ 米, 求这个长方形的周长.



拓展与延伸

6. 随意写出一个三位数, 然后将它的百位和个位上的数字对调, 得到另一个三位数, 求这两个三位数的差. 从中你发现了什么?
7. 代数式 $(2x^2 + ax - \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}) - (x - 2y + 1 - bx^2)$ 的值与字母 x 的取值无关, 求 a, b 的值.



探索与创新

8. 对任意有理数 a , 两个整式 $a^2 + a - 2$ 与 $2a^2 + a - 1$ 中, 谁的值较大? 为什么?



回顾与总结

1. 本章学习了哪些主要内容? 总结一下, 并与同学交流.
2. 什么是整式? 什么是单项式? 什么是多项式? 请你分别举出几个例子, 并指出单项式的系数和次数, 多项式的项、项数和次数.
3. 合并同类项是整式加减运算的基础. 同类项必须满足哪些条件? 合并同类项应注意些什么?
4. 整式的加减运算是通过去括号转化为合并同类项, 而合并同类项是将单项式的加减运算转化为有理数运算(系数相加减)进行的. 在去括号时应注意些什么?



综合练习



复习与巩固

1. 分别指出下列单项式的系数和次数:

$$28a^3b^2, -\frac{1}{2}x^2y, -\frac{a^3b^4}{2}, a, -x^n \text{ (} n \text{ 是正整数)}.$$

2. 化简:

$$(1) 5xy - x^2 + 2x^2 - 4xy - 3x^2; \quad (2) (3a + b - 5ab) + (4ab - b + 7a);$$

$$(3) 3(a + b) - 2(a + b) - 4(a + b) + 5(a + b);$$

$$(4) 3 + [3a - 2(a - 1)].$$

3. 先化简, 再求值:

$$5(3a^2b - ab^2) - (ab^2 + 3a^2b), \text{ 其中 } a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}.$$

4. 已知多项式 $A = 2x^2 - 3xy + 2y^2$, $B = 2x^2 + xy - 3y^2$.

(1) 求 $A - B$;

(2) 如果 $A + B + C = 0$, 求多项式 C .

5. (1) 一个多项式减去 $3a^2b - 5ab^2 + 6b^3$ 得 $a^3 - b^3$, 求这个多项式;

(2) $7a^2 + 4ab - b^2$ 加上一个多项式得 $10a^2 - ab$, 求这个多项式.

6. 一个三位数, 它的个位数字是 x , 十位数字比个位数字大 1, 百位数字比个位数字小 2, 写出这个三位数.

7. 已知长方体工件的长为 a 米, 宽为 b 米, 高为 c 米. 用红油漆涂刷工件的上、下底面, 成本是每平方米 30 元. 用黄油漆涂刷工件的 4 个侧面, 成本为每平方米 25 元. 将整个工件表面涂漆的成本共为多少元?



拓展与延伸

8. 小刚计算“一个整式减去 $2ab - 3bc + 4ac$ ”时, 误把“减去”算成“加上”, 得到的结果是 $2bc + ac - 2ab$. 请你帮他求出正确答案.

9. 某高级中学, 全校共有三个年级, 每个年级均有 $3a$ 名学生. 如果从明年开始, 每年比前一年多招收 a 名新生, 求三年后该校的在校学生人数.



探索与创新

10. 小莹背对小亮, 让小亮按下列步骤分发扑克牌:

第一步: 按左、中、右三堆分牌, 每堆牌不少于 2 张, 且各堆牌的张数相同;

第二步: 从左边一堆拿出 2 张, 放入中间一堆;

第三步: 从右边一堆拿出 1 张, 放入中间一堆;

第四步: 左边一堆有几张, 就从中间一堆拿出几张放入左边一堆.

这时, 小莹准确说出了中间一堆牌现有的张数. 你知道中间一堆牌现有多少张吗?

11. 小亮的爸爸将手中持有的 A, B 两种股票同时卖出, 卖价均为 m 元. 其中, A 股票盈利 10%, B 股票亏损 10%. 请问卖出这两种股票合计盈亏多少?

12. 将连续的奇数 1, 3, 5, 7, ... 排列成如下的数表.

(1) 十字框框出的 5 个数的和与框内正中间的数 17 有什么关系?

(2) 将十字框上下左右平移, 可框出另外 5 个数, 若设正中间的数为 a , 则框内 5 个数的和是多少?

(3) 十字框框出的 5 个数之和能等于 2 012 吗? 若能, 分别写出框内的 5 个数; 若不能, 请说明理由.

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59
...	...				

(第 12 题)

第7章 一元一次方程

内容提要

- 等式的基本性质
- 一元一次方程
- 一元一次方程的解法
- 一元一次方程的应用



情境导航

吴敬是我国明代的数学家，是《九章算法比类大全》的作者，他的一首诗至今尚在流传：

巍巍宝塔高七层，
点点红灯倍加增。
灯共三百八十一，
请问顶层几盏灯？

这首诗的意思是：一座雄伟壮观的七层宝塔，层层飞檐上闪烁着红灯，下层红灯数目是相邻上层红灯数目的2倍。全塔上下共有381盏灯，请问顶层有几盏灯？你能做出这道古代数学趣题吗？



7.1 等式的基本性质



交流与发现

思考下面的问题，并与同学交流.

(1) 小莹今年 a 岁，小亮今年 b 岁，再过 c 年他们分别是多少岁？

(2) 如果小莹和小亮同岁（即 $a = b$ ），那么再过 c 年他们的岁数还相同吗？
 c ($c < a$) 年前呢？为什么？

(3) 从问题 (2) 中，你发现了什么结论？能用等式把它表示出来吗？

如果 $a = b$ ，那么 $a + c = b + c$ ， $a - c = b - c$.

也就是说：等式两边都加上（或减去）同一个整式，所得的结果仍是等式.

我们把这一性质作为等式的基本性质 1.

例如，将等式 $0.2 = \frac{1}{5}$ 的两边都加上 2 或都减去 1，所得的结果仍是等式.

(4) 一袋巧克力糖的售价是 a 元，一盒果冻的售价是 b 元，买 c 袋巧克力糖和买 c 盒果冻各要花多少元？

(5) 如果一袋巧克力糖与一盒果冻的售价相同（即 $a = b$ ），那么买 c 袋巧克力糖和买 c 盒果冻的价钱相同吗？

(6) 从问题 (5) 中，你发现了什么结论？能用等式把它表示出来吗？

如果 $a = b$ ，那么 $ac = bc$.

类似地，如果 $a = b$ ，那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ($c \neq 0$).

也就是说：等式两边都乘（或除以）同一个数（除数不能为零），所得的结果仍是等式.

我们把这一性质作为等式的基本性质 2.

例如，将等式 $0.2 = \frac{1}{5}$ 的两边都乘 3 或都除以 -2 ，所得的结果仍是等式.

(7) 如图 7-1，已知线段 a, b, c ，其中 $a = b, c < a$.



图 7-1

① 如果线段 a, b 分别加上（或减去）线段 c ，所得到的线段还相等吗？画图说明；

② 如果将线段 a, b 的长同时扩大（或缩小）相同的倍数，所得到的线段还相等吗？画图说明.

例 1 在下列各题的横线上填上适当的整式，使等式成立，并说明根据的是等式的哪一条基本性质以及是怎样变形的.

(1) 如果 $2x - 5 = 3$ ，那么 $2x = 3 + \underline{\hspace{2cm}}$ ；

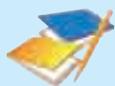
(2) 如果 $-x = 1$ ，那么 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 (1) $2x = 3 + 5$.

根据等式的基本性质 1，两边都加上 5；

(2) $x = -1$.

根据等式的基本性质 2，两边都除以（或乘） -1 .



练习

1. 回答下列问题：

(1) 从等式 $a = b$ 能不能得到等式 $a + 3 = b + 3$ ？为什么？

(2) 从等式 $a = b$ 能不能得到等式 $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$ ？为什么？

(3) 从等式 $x + 5 = y + 5$ 能不能得到等式 $x = y$ ？为什么？

(4) 从等式 $-2x = 2y$ 能不能得到等式 $x = -y$ ？为什么？

2. 写出仍能成立的等式：

(1) 如果 $x + 3 = 10$ ，两边都减去 3，那么 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 如果 $2x - 7 = 15 - x$ ，两边都加上 $7 + x$ ，那么 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 如果 $4a = -12$ ，两边都除以 4，那么 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(4) 如果 $-\frac{y}{3} = \frac{1}{6}$ ，两边都乘 -3 ，那么 $\underline{\hspace{2cm}}$.



习题7.1



复习与巩固

1. 回答下列问题, 并说明变形的根据:

(1) 怎样从等式 $3x = 2x + 7$ 得到等式 $x = 7$?

(2) 怎样从等式 $5x = -15$ 得到等式 $x = -3$?

(3) 怎样从等式 $\frac{a}{8} = \frac{b}{4}$ 得到等式 $a = 2b$?

2. 在下列各题的横线上填上适当的数或整式, 使所得结果仍是等式, 并说明根据的是等式的哪一条基本性质以及是怎样变形的.

(1) 如果 $-\frac{x}{10} = \frac{y}{5}$, 那么 $x =$ _____, 根据 _____;

(2) 如果 $-2x = 2y$, 那么 $x =$ _____, 根据 _____;

(3) 如果 $\frac{2}{3}x = 4$, 那么 $x =$ _____, 根据 _____;

(4) 如果 $x = 3x + 2$, 那么 $x -$ _____ $= 2$, 根据 _____.



拓展与延伸

3. 选择题:

(1) 下列说法中, 正确的是 ().

(A) 如果 $ac = bc$, 那么 $a = b$ (B) 如果 $\frac{a}{c} = \frac{b}{-c}$, 那么 $a = -b$

(C) 如果 $x - 3 = 4$, 那么 $x = 3 - 4$ (D) 如果 $-\frac{1}{3}x = 6$, 那么 $x = -2$

(2) 下列等式中, 可由等式 $2x - 3 = x + 2$ 变形得到的是 ().

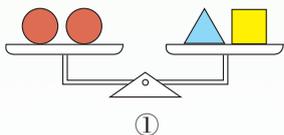
(A) $2x - 1 = x$ (B) $x - 3 = 2$ (C) $3x = 3 + 2$ (D) $x + 3 = -2$

4. 你能结合实例解释等式的基本性质1和2吗?

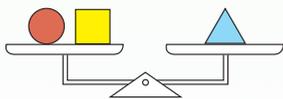


探索与创新

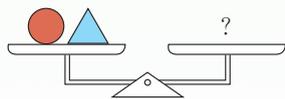
5. “ ” 分别表示三种不同的物体. 如图所示, 天平①②保持平衡, 如果要使天平③也平衡, 那么应在天平③的右端放几个 “”?



①



②



③

(第5题)

7.2 一元一次方程



实验与探究

我们来做一个剪纸片的实验.

拿一张正方形纸片, 第1次将它剪成4片, 第2次再将其中的一片剪成更小的4片, 连同第1次的其余3张纸片, 共剪得7张纸片; 继续这样剪下去, 如图7-2.

(1) 第3次, 第4次, 第5次, ……分别共剪得多少张纸片? 请填写下表:

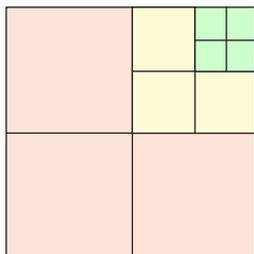


图 7-2

次 数	1	2	3	4	5	…
纸片数	4	7				…

(2) 如果剪了 x 次 (x 是正整数), 那么共剪得多少张纸片? 你是怎样得到的? 与同学交流.



剪 x 次 共能
剪得 $(3x+1)$ 片.

第一次剪得4片,
以后每一次都比前一次
多3片, 剪 x 次 共能得到
 $[4+3(x-1)]$ 片.



(3) 如果剪得的纸片共64片, 一共剪了多少次?

这时剪纸的次数 x 是未知数, 问题中包含的等量关系是:

剪 x 次 共剪得的纸片数 = 64.

根据这个等量关系, 你能列出怎样的等式?



$$3x + 1 = 64.$$

$$4 + 3(x - 1) = 64.$$



等式 $3x + 1 = 64$, $4 + 3(x - 1) = 64$ 以及 $3x + 5 = 2$, $2x - 3 = x$ 中都含有未知数. 像这样的等式就是我们已经认识的**方程** (equation). 方程是解决实际问题的工具, 今后, 我们将进一步研究方程, 感受它的重要价值.

将 $x = -1$ 代入方程 $3x + 5 = 2$, 方程的左边 = 右边.

像这样使方程的两边相等的未知数的值叫做方程的**解** (solution).

例如, $x = -1$ 是方程 $3x + 5 = 2$ 的解, 而不是方程 $2x - 3 = x$ 的解.

只含有一个未知数的方程的解也叫做方程的**根** (root). 求方程的解的过程叫做**解方程**.

观察方程 $3x + 1 = 64$, $4 + 3(x - 1) = 64$, $3x + 5 = 2$, $2x - 3 = x$, 它们有什么共同特点?

这些方程的两边都是整式, 都只含有一个未知数, 并且未知数的次数都是 1, 像这样的方程叫做**一元一次方程** (linear equation with one unknown).



交流与发现

你能估算出方程

$$4 + 3(x - 1) = 64$$

的解吗?

(1) 我们先估计一个数, 比方估计 $x = 10$, 检验 $x = 10$ 是否是方程 $4 + 3(x - 1) = 64$ 的解, 将 $x = 10$ 代入方程, 左边 = 31, 右边 = 64, 这说

明 $x = 10$ 不是这个方程的解. 从该方程左右两边的实际意义看, 31 是剪 10 次得到的纸片数, 它小于 64, 这说明我们估计 $x = 10$ 是估计小了.

(2) 再换一个比 10 大的数进行尝试, 比方 $x = 25$. 将 $x = 25$ 代入方程 $4 + 3(x - 1) = 64$. 左边 = 76, 右边 = 64, 这说明 $x = 25$ 也不是方程的解. 从该方程左右两边的实际意义看, 76 是剪 25 次得到的纸片数, 它大于 64, 这说明我们估计 $x = 25$ 又大了.

(3) 由 (1) (2) 可以知道, 方程 $4 + 3(x - 1) = 64$ 的解应当在 10 到 25 之间, 我们在这个范围内再选取一个整数进行估算. 比方说 $x = 15$, 代入方程进行检验, 你得到什么结论?



小资料

这里, “元”就是“未知数”. 在方程中, 除了用 x 外, 也经常用字母 y, z 等表示未知数.

(4) 请你按照下面表格中的步骤, 估算这个方程的解, 并进行检验.

	估计的 x 的值	左边 (剪 x 次得到的纸片数)	与方程右边 64 比较
第一次估算	10	31	小了
第二次估算	25	76	大了
第三次估算			

你得到这个方程的解了吗? 你对上面这种“估算—检验”的方法有什么体会? 与同学交流.



史海漫游

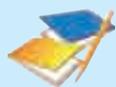
方程史话

大约 3 600 年前, 古埃及人就创造了自己的文化. 他们把一些象形文字写在纸草书上 (图 7-3). 后人从这些纸草书上发现了 85 道数学题, 其中就有解方程的问题. 比纸草书年代更久远的有古巴比伦的泥版, 记载在公元前两千年左右, 利用特殊的方法解出了一些一次、二次甚至三次和四次方程.



图 7-3 埃及纸草书

公元前 1 世纪成书的我国数学经典著作《九章算术》的第八章名为“方程”. 魏晋时期数学家刘徽在对《九章算术》作注释时说:“程, 课程也, 二物者二程, 三物者三程, 皆如物数程之, 并列为行, 故谓之方程.” 这里所谓“如物数程之”, 是指有几个未知量就得列出几个等式. 由于当时是用算筹来表示和计算等式中的系数和常数项的, 每一个等式的系数和常数项排成一行, 几行算筹并列起来好像一个方阵, 所以形象地称为“方程”. 可见, 当时所讲的“方程”与我们今天所学的方程不完全相同, 它实际上是我们以后要学习的方程组. 现在的“方程”一词来源于英文单词 equation, 意为相等, 清朝初年曾把它译为等式. 1859 年数学家李善兰翻译德·摩根的《代数学》时开始把 equation 译为“方程”.



练习

1. 下列方程中哪些是一元一次方程，哪些不是？为什么？

(1) $2x - 1 = 0$;

(2) $2x - y = 3$;

(3) $x^2 - 16 = 0$;

(4) $4(t - 1) = 2(3t + 1)$.



习题7.2



复习与巩固

1. 某通讯公司推出两种手机付费方式：甲种方式不交月租费，每通话1分钟付话费0.15元；乙种方式需交18元月租费，每通话1分钟付话费0.10元；两种方式不足1分钟均按1分钟计算。

(1) 如果一个月内通话 x 分钟，那么用甲种方式应付话费多少元？用乙种方式应付话费多少元？

(2) 如果求一个月内通话多少分钟时两种方式的费用相同，可以列出一个怎样的方程？它是一元一次方程吗？

2. 用“估算—检验”的方法解第1题中列出的方程。



拓展与延伸

3. 《文摘报》每份0.5元，《信息报》每份0.4元，小刚用7元钱买了两种报纸共15份。他买的两种报纸各多少份？列出方程，并用“估算—检验”的方法找出答案。

7.3 一元一次方程的解法



交流与发现

用“估算—检验”的方法解一元一次方程比较麻烦，有时甚至无法进行。有没有一般的方法？

解一个以 x 为未知数的方程，就是要设法把它化成 $x = c$ 的形式。

(1) 回忆一下, 在上一学段你是如何解一元一次方程 $x - 2 = 5$ 的?

这个方程的左边有两项, 它们是 x 和 -2 , 方程的右边是常数项 5 , 为了将方程化成 $x = c$ 的形式, 就要设法使左边只保留未知数 x . 运用等式的基本性质 1:

方程 $x - 2 = 5$ 的两边都加上 -2 的相反数 2 , 得

$$x = 5 + 2,$$

$$x = 7.$$

即

这就是说, 方程左边的常数项 -2 , 改变符号后, 可移到等号的右边.

(2) 如何解方程 $2x = x + 3$ 呢?



这个方程等号的左、右两边都有含未知数 x 的项. 为了化成 $x = c$ 的形式, 能将等号右边的项 x 移到等号的左边吗?



运用等式的基本性质 1, 方程 $2x = x + 3$ 的两边都减去 x , 得

$$2x - x = 3,$$

$$x = 3.$$

即

方程中的一项可以从等号的一边移到另一边, 但它的符号必须改变.

(3) 观察上面解方程的过程, 你发现了什么?

把方程中的某一项改变符号后, 从方程的一边移到另一边, 这种变形叫做**移项** (transposition of terms).



(4) 如何解方程 $6x = -24$ 呢?

这个方程是 $ax = b$ 的形式, 为了化成 $x = c$ 的形式, 就要设法使左边未知数的系数化为 1 , 运用等式的基本性质 2, 将方程 $6x = -24$ 的两边都除以未知数的系数 6 , 得

$$\frac{6x}{6} = \frac{-24}{6},$$

即

$$x = -4.$$

例1 解方程 $5x + 1 = 4x - 2$.

解 移项, 得

$$5x - 4x = -2 - 1.$$

合并同类项，得

$$x = -3.$$

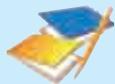
例2 解方程 $-\frac{3}{5}x = -6$.

解 方程的两边都乘 $-\frac{5}{3}$ (或除以 $-\frac{3}{5}$)，得

$$-\frac{3}{5}x \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -6 \times \left(-\frac{5}{3}\right),$$

即 $x = 10$.

请你把求出的 $x = 10$ 代入原方程进行检验，看方程两边的值是否相等.



练习

1. 解方程：

(1) $x - 3 = -12$;

(2) $1.5x + 4.5 = 0$;

(3) $5 - 2x = 9$;

(4) $-3y = -15$.

2. 下列各题中方程的变形正确吗？如果不正确，怎样改正？

(1) 在方程 $-\frac{x}{2} = 1$ 的两边都乘 -2 ，得 $x = 1$ ；

(2) 在方程 $3y = -2$ 的两边都除以 3 ，得 $y = -\frac{3}{2}$ ；

(3) 由方程 $z + 3 = 1$ ，移项得 $z = 1 + 3$ ；

(4) 由方程 $3x = 4x - 9$ ，移项得 $3x - 4x = -9$.

3. 解下列方程，并写出方程变形的根据：

(1) $x + 1.6 = 0$;

(2) $-2.8y - 0.7 = 1.4$.



交流与发现

你会解7.2节中的方程

$$3x + 1 = 64 \quad \text{①}$$

和 $4 + 3(x - 1) = 64 \quad \text{②}$

吗？试一试，说出每步变形的依据，与同学交流.

将方程②去掉括号，再合并同类项就化为方程①了.



例3 解方程 $3(x + 6) = 9 - 5(1 - 2x)$.

解 去括号, 得 $3x + 18 = 9 - 5 + 10x$.

移项, 得 $3x - 10x = 9 - 5 - 18$.

合并同类项, 得 $-7x = -14$.

系数化为1, 得 $x = 2$.

例4 解方程 $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}(20 - x) = 8$.

解 去分母 (方程两边都乘6), 得

$$2x + 3(20 - x) = 48.$$

去括号, 得 $2x + 60 - 3x = 48$.

移项, 得 $2x - 3x = 48 - 60$.

合并同类项, 得 $-x = -12$.

系数化为1, 得 $x = 12$.

还有其他解法吗? 与同学交流.

例5 解方程 $\frac{2x+1}{3} - \frac{10x+1}{6} = 1$.

解 去分母, 得 $2(2x + 1) - (10x + 1) = 6$.

去括号, 得 $4x + 2 - 10x - 1 = 6$.

移项, 得 $4x - 10x = 6 - 2 + 1$.

合并同类项, 得 $-6x = 5$.

系数化为1, 得 $x = -\frac{5}{6}$.

通过上面的例题, 你能总结出解一元一次方程的步骤吗? 与同学交流.

解一元一次方程时, 目标是把原方程化为 $x = c$ 的形式, 一般步骤为:

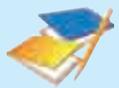
(1) 去分母; (2) 去括号; (3) 移项; (4) 合并同类项; (5) 未知数的系数化为1.

利用等式的基本性质2, 可去掉方程中的分母. 去分母时, 方程两边所有的项都要乘各分母的最小公倍数, 注意不要漏乘没有分母的项.



挑战自我

解方程 $\frac{3}{4}(\frac{4}{3}x - 8) = 2x + 1$ 时, 先做哪一步要简单些? 试一试.



练习

1. 解方程:

(1) $0.8x + (10 - x) = 9;$

(2) $6x - 3(11 - 2x) = -1;$

(3) $3(x - 3) - 2(1 + 2x) = 6;$

(4) $8(3 - 2x) = 4(x + 1).$

2. 解方程:

(1) $\frac{5x-1}{8} = \frac{7}{4};$

(2) $\frac{x+5}{5} = \frac{3-2x}{3};$

(3) $\frac{1}{7}x + 16 = \frac{1}{2};$

(4) $\frac{3y+12}{8} = 2 - \frac{5y-7}{3}.$



习题7.3



复习与巩固

1. 解方程:

(1) $3x - 4 + 2x = 4x - 3;$

(2) $8 = 3 - 5y;$

(3) $4 - 3.8x = 3 - 4.9x;$

(4) $5x + 6 = 6 - 2x.$

2. 如果关于 x 的方程 $2x + a = x - 1$ 的解是 -4 , 那么 a 的值是多少?

3. 解方程:

(1) $x - (5 - 2x) = 7;$

(2) $(y + 1) - 2(y - 1) = 1 - 3y;$

(3) $2(3y - 4) + 7(4 - y) = 4y - 7(4 - y);$

(4) $3x - 4(2x + 5) = 7(x - 5) + 4(2x + 1).$

4. 解方程:

(1) $\frac{5x-1}{6} = \frac{7}{3};$

(2) $\frac{x+15}{4} - \frac{3x-5}{2} = 0;$

(3) $\frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{6} = 1;$

(4) $y + \frac{y-1}{2} = 2 - \frac{y+2}{5}.$

5. 当 x 取什么值时, 代数式 $\frac{x+3}{2}$ 与 $\frac{x-7}{5}$ 的差等于 5?6. 当 m 取什么值时, 代数式 $5m + \frac{1}{4}$ 与 $5(m - \frac{1}{4})$ 的值互为相反数?

7. 下列方程的解法对吗? 如果有错, 指出错在哪里, 并给出正确的解法.

(1) 解方程: $2(x-2) = 5-x$;

解 $2x-2 = 5-x = 2x+x$
 $= 5+2 = 3x+7,$
 $x = \frac{7}{3}.$

(3) 解方程: $\frac{2x+1}{5} - 1 = \frac{x+3}{5};$

解 $2x+1-1 = x+3,$
 $x = 3.$

(2) 解方程: $3x+4 = 5x+6;$

解 $3x+5x = 6+4,$
 $8x = 10,$
 $x = \frac{5}{4}.$

(4) 解方程: $\frac{x+4}{2} - \frac{x-2}{6} = \frac{2x+1}{3}.$

解 $3x+12-x-2 = 4x+2,$
 $-2x = -8,$
 $x = 4.$



拓展与延伸

8. 解下列方程:

(1) $x - \frac{1}{3} [x - \frac{1}{3}(x-9)] = \frac{1}{9}(x-9);$

(2) $2 [\frac{4}{3}x - (\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})] = \frac{3}{4}x.$

9. 已知 $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{3}$, 当 x 为何值时 $y_1 = y_2$?



探索与创新

10. 按一定规律排列的一列数:

$$2, -4, 8, -16, 32, \dots$$

其中某三个相邻数的和是 -192 , 这三个数各是多少?

7.4 一元一次方程的应用



交流与发现

怎样解答本章“情境导航”中的问题? 与同学交流.

根据题意, 请思考下列问题:

(1) 题目中哪些是已知量? 哪些是未知量?

需要把文字语言转化为符号语言.



(2) 如果用 x 表示其中的一个未知量, 例如, 设宝塔顶层有 x 盏灯, 那么你能根据数量关系“点点红灯倍加增”, 用关于 x 的代数式表示出其他未知量, 即其他各层上灯的盏数吗?

(3) 题目中的等量关系是什么?

(4) 根据等量关系, 即“七层宝塔红灯总数 = 381”, 可以列出一个怎样的方程?

设宝塔顶层有 x 盏灯, 那么由上而下, 其余各层依次有 $2x$, $4x$, $8x$, $16x$, $32x$, $64x$ 盏灯, 根据题意可列出方程

$$x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x + 64x = 381. \quad \textcircled{1}$$

方程①是用方程的形式表示出实际问题中的全部数量关系, 即“巍巍宝塔高七层, 点点红灯倍加增, 灯共三百八十一”, 所以, 我们可以把方程①看做上面实际问题的一个**数学模型** (mathematical model).

要求顶层几盏灯, 就需要解方程①. 你会解方程①吗?

对于这个实际问题, 你还有设未知数的其他方法吗? 利用其他方法列出的方程与方程①有什么不同和相同?

例1 时代中学“迎春杯”科普知识竞赛的规则如下: 每次答题时需先按抢答器, 获得抢答权并答对一次得 20 分; 答错、答不出或提前按抢答器均扣掉 10 分. 七年级一班代表队按响抢答器 12 次, 最后得分是 120 分. 这个代表队答对的次数是多少?

如果用 x 表示这个代表队答对的次数, 那么问题中其他的未知量如下表:

	答 对	答错、答不出或提前抢答
次数/次	x	$12 - x$
得分/分	$20x$	$10(12 - x)$

题目中的等量关系是

$$\text{所得的分数} - \text{扣掉的分数} = 120.$$

利用上面的表格, 你能解答本题了吗?

$(12-x)$ 次. 于是, 答对共得 $20x$ 分, 扣掉 $10(12-x)$ 分. 根据题意, 得

$$20x - 10(12 - x) = 120.$$

解这个方程, 得

$$x = 8.$$

将 $x = 8$ 代入原题中进行检验: 当这个代表队答对 8 次时, 得分为 160 分, 答错、答不出或提前按抢答器 4 次, 扣掉 40 分, 最后得分 $160 - 40 = 120$ (分). 因此, $x = 8$ (次) 符合题意.

所以, 这个代表队答对 8 次.

如果设扣分共 x 次, 你能列出一个怎样的方程? 与同学交流.



挑战自我

小亮求出 50 个数据的平均数后, 粗心地把这个平均数和原来的 50 个数据混写在一起, 成为 51 个数据, 忘记哪个是平均数了. 如果这 51 个数据的平均数恰为 51, 那么原来的 50 个数据的平均数是多少?



练习

列方程解应用题:

- 小莹用 30 元钱买了 5 千克苹果和 2 千克香蕉, 找回 3 元. 已知每千克香蕉的售价是每千克苹果售价的 2 倍, 每千克苹果的售价是多少元?
- 在一次竞赛中有 A, B 两组题, 大刚平均 1 分钟做 4 道 A 组题, 4 分钟做 1 道 B 组题. 他用了 100 分钟做了 100 道题, 大刚做了多少道 A 组题?
 - 这个问题中的已知量是什么? 未知量是什么?
 - 选取问题中的一个未知量并用 x 表示, 利用表格表示出其他的未知量;
 - 题目中的等量关系是什么?
 - 列出方程并给出解答.

例2

甲、乙两个仓库共存化肥 40 吨. 如果甲仓库运进化肥 3 吨, 乙仓库运出化肥 5 吨, 两仓库所存化肥的质量恰好相等, 那么原先两仓库各存有化肥多少吨?

设甲仓库原来库存化肥 x 吨，你能通过下面的表格，表示出问题中其他的未知量吗？

	甲仓库库存化肥质量/吨	乙仓库库存化肥质量/吨
原来	x	
现在		

题目中的等量关系是

甲仓库现在库存化肥质量 = 乙仓库现在库存化肥质量.

根据这个等量关系就可以列出方程.

解 设原来甲仓库库存化肥 x 吨，那么乙仓库库存化肥 $(40-x)$ 吨.

根据题意，得

$$x + 3 = (40 - x) - 5.$$

解这个方程，得

$$x = 16.$$

经检验， $x = 16$ （吨）符合题意.

此时， $40 - x = 40 - 16 = 24$.

所以，甲、乙两仓库原来分别库存化肥 16 吨和 24 吨.

本题还有其他解法吗？

如果设运进化肥 3 吨后甲仓库库存化肥 x 吨，根据等量关系：“甲仓库原来库存化肥的质量 + 乙仓库原来库存化肥的质量 = 40 吨”，你能列出方程吗？试一试.

比较以上两种列方程的方法，你认为有哪些不同？



挑战自我

6 人围坐成一圈，每人心中想一个数，并把这个数告诉左、右相邻的人. 然后每个人把左、右两个相邻的人告诉自己的数的平均数亮出来（如图 7-4）. 问：亮出平均数是 11 的人原来心中想的数是多少？

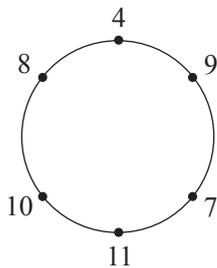
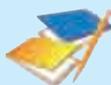


图 7-4



练习

列方程解应用题:

- 大小两台拖拉机共耕了 5 公顷土地. 已知大拖拉机的效率是小拖拉机的 1.5 倍, 两台拖拉机各耕地多少公顷?
- 水上公园某一天共售出门票 128 张, 收入 912 元. 门票价格为成人每张 10 元, 学生可享受六折优惠. 这一天出售的成人票与学生票各多少张?

例3 某中学组织学生到校外参加义务植树活动. 一部分学生骑自行车先走, 速度为 9 千米/时; 40 分钟后其余学生乘汽车出发, 速度为 45 千米/时, 结果他们同时到达目的地. 目的地距学校多少千米?



图 7-5



速度、时间和路程之间有什么关系? 如果设目的地距学校 x 千米, 你能填写下表吗?

	路程/千米	速度/(千米/时)	时间/时
骑自行车			
乘汽车			

题目中的等量关系是 _____ ;
骑自行车所用时间 - 乘汽车所用时间 = _____ .

解 设目的地距学校 x 千米, 那么骑自行车所用时间为 $\frac{x}{9}$ 时, 乘汽车所用时间为 $\frac{x}{45}$ 时. 根据题意, 得

$$\frac{x}{9} - \frac{x}{45} = \frac{40}{60}.$$

解这个方程，得

$$x = 7.5.$$

经检验， $x = 7.5$ （千米）符合题意.

所以，目的地距学校 7.5 千米.

如果设汽车从学校到目的地要行驶 x 时，根据等量关系“汽车行程 = 自行车行程”，你能列出方程吗？试一试.



等量关系也可以
利用图 7-6 来分析.

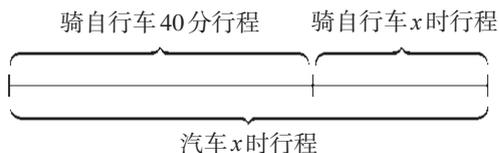


图 7-6

比较上述两种列方程的方法，你认为它们有哪些不同？与同学交流.



智趣园

古代算题

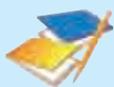
在我国古代数学名著《九章算术》第六章“均输”中，有这样一道题：“今有乘传委输，空车日行七十里，重车日行五十里. 今载太仓粟输上林，五日三返，问太仓去上林几何？”译成现代汉语，大意是：

有人用车把米从太仓运到上林，空车日行 70 里，装米的重车日行 50 里，5 天往返 3 次. 问：太仓距上林多少里？

通过列表，将文字语言转化为符号语言.

文字语言	符号语言
太仓与上林的距离	x 里
重车从太仓到上林的时间	$\frac{x}{50}$ 天
空车从上林返回太仓的时间	$\frac{x}{70}$ 天
往返一次需要的时间	$(\frac{x}{50} + \frac{x}{70})$ 天
往返三次共需的时间	$3(\frac{x}{50} + \frac{x}{70})$ 天

根据 5 天往返三次，你能列出一个怎样的方程？你会解这个方程吗？



练习

列方程解应用题:

1. 甲、乙两人从相距 1 200 米的两地同时出发, 相向而行. 甲每分钟行 70 米, 乙每分钟行 50 米, 多少时间后两人相遇?
2. 一队学生从学校出发去郊游, 以 4 千米/时的速度步行前进. 学生出发 $\frac{3}{2}$ 时后, 一位老师骑摩托车从原路经 $\frac{1}{4}$ 时赶上学生. 求摩托车的速度.

例4

用两台水泵从同一池塘中向外抽水, 单开甲泵 5 时可把水抽完, 单开乙泵 2.5 时便能抽完.

- (1) 如果两台水泵同时抽水, 多长时间能把水抽完?
- (2) 如果甲泵先抽 2 时, 剩下的由乙泵来抽, 乙泵用多少时间才能把水抽完?

在本题中, 有工作量、工作效率和工作时间三个基本数量. 它们之间有如下等量关系:

$$\text{工作量} = \text{工作效率} \times \text{工作时间}.$$

解 (1) 设两台水泵同时抽水 x 时能把水抽完, 根据题意, 得

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2.5}x = 1.$$

解这个方程, 得

$$x = \frac{5}{3}.$$

经检验, $x = \frac{5}{3}$ (时) 符合题意.

所以, 两泵同时抽 $\frac{5}{3}$ 时 (即 1 时 40 分) 可把水抽完.

(2) 设乙泵再开 x 时才能抽完, 根据题意, 得

$$\frac{1}{5} \times 2 + \frac{1}{2.5}x = 1.$$

解这个方程, 得

$$x = 1.5.$$

经检验, $x = 1.5$ (时) 符合题意.

所以, 甲泵抽 2 时, 乙泵再抽 1.5 时才能把水抽完.

“抽完一池水”没有具体的工作量, 通常把这种工作量看做整体“1”.



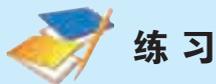


智趣园

爱迪生 (Edison, 1847-1931) 是美国著名的科学家和发明家, 被誉为“发明大王”. 有趣的是, 他曾设计了一个注水装置, 将它与他家的大门相连, 来人推开大门的同时, 带动打水装置往水槽中注水. 最初每次推门只能往水槽里加入 20 升水, 后来经过改进, 每次推门能往水槽里加 25 升水, 这样比原来少推门 12 次就能把水槽加满水. 爱迪生家的水槽能盛多少升水?



爱迪生



练习

列方程解应用题:

1. 点燃两支等长的蜡烛, 第一支 4 小时燃尽, 第二支 3 小时燃尽. 同时点燃两支蜡烛, 几小时后第一支蜡烛剩余的高度是第二支蜡烛剩余高度的 2 倍?
2. 维修一段管道, 师傅单独维修需 4 小时完成, 徒弟单独维修需 6 小时完成. 如果徒弟先修 30 分钟, 再与师傅一块维修, 还需多少时间完成?

例5

周大爷准备去银行储蓄一笔现金. 经过咨询, 银行 (2011 年 7 月公布) 的一年定期储蓄年利率为 3.5%, 二年定期储蓄年利率为 4.4%. 如果将这笔现金存二年定期储蓄, 期满后将比先存一年定期储蓄到期后连本带息再转存一年定期储蓄的方式多得利息 335.5 元. 周大爷准备储蓄的这笔现金是多少元?

解

设这笔现金为 x 元. 第 1 年一年定期储蓄所得利息为 $3.5\%x$, 第 2 年一年定期储蓄所得利息为 $3.5\% \times (1 + 3.5\%)x$. 二年定期储蓄所得利息为 $2 \times 4.4\%x$.

根据题意, 得

$$2 \times 4.4\%x - [3.5\%x + 3.5\% \times (1 + 3.5\%)x] = 335.5 \text{元}.$$

解得

$$x = 20\,000.$$

经检验, $x = 20\,000$ (元) 符合题意.

所以, 周大爷准备储蓄的这笔现金为 20 000 元.

例6 商店将某种商品按原价的九折出售，调价后该商品的利润率是15%.

已知这种商品每件的进货价为1 800元，求每件商品的原价.

解 设商品的原价为 x 元，根据题意，得

$$90\%x - 1\,800 = 1\,800 \times 15\%.$$

解这个方程，得

$$x = 2\,300.$$

经检验， $x = 2\,300$ (元)符合题意.

所以，每件商品的原价为2 300元.

设商品的原价为 x 元，
根据题意，我列的方程为
 $90\%x = 1\,800(1 + 15\%).$



你能利用“加油站”中的第二个等量关系列出方程吗？



加油站

在有关营销问题中，一般要涉及成本、售价和利润. 它们之间有下列等量关系：

$$\text{售价} - \text{成本} = \text{利润},$$

$$\frac{\text{利润}}{\text{成本}} \times 100\% = \text{利润率},$$

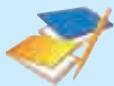
$$\text{成本} \times (1 + \text{利润率}) = \text{售价}.$$

解题时，可以用“进货价”代替“成本”. 但在实际的商业活动中，成本除包括进货价外，还应包括诸如营业税、运输费、仓储费、店铺租赁费、职工工资等.



挑战自我

如果例6的题目中的条件不变，除了可以求“每件商品的原价”之外，你还能提出一个新的问题吗？根据你提出的问题，列出一元一次方程求解，并与同学交流.



练习

1. 填写下表：

商品名称	售价/元	进价/元	利润/元	利润率
钢笔	15	12		
笔记本	8		3	
文具盒		15		20%

2. 李老师于2011年8月到银行将30 000元现金存三年定期储蓄. 在网上使用“存款利息计算器”计算可知, 到期本息合计将共得34 500元. 三年定期储蓄的年利率是多少?

例7 一个圆柱形容器的内半径为3厘米, 内壁高30厘米, 容器内盛有高度为15厘米的水. 现将一个底面半径为2厘米、高18厘米的金属圆柱竖直放入容器内, 容器内的水面将升高多少厘米?

本题涉及圆柱的体积 $V = \pi r^2 h$, 这里 r 是圆柱底面半径, h 为圆柱的高. 一个金属圆柱竖直放入容器内, 会出现两种可能: (1) 容器内的水面升高后没有淹没放入的金属圆柱; (2) 容器内的水面升高后淹没放入的金属圆柱. 因此列方程求解时要分两种情况.

解 设容器内放入金属圆柱后水面的高度为 x 厘米.

(1) 如果容器内的水面升高后没有淹没放入的金属圆柱, 那么根据题意, 得

$$\pi \cdot (3^2 - 2^2) \cdot x = \pi \cdot 3^2 \times 15.$$

解这个方程, 得 $x = 27$.

因为27厘米 > 18厘米, 这表明此时容器内的水面已淹没了金属圆柱, 不符合假定, 应舍去.

(2) 如果容器内的水面升高后淹没放入的金属圆柱, 那么根据题意, 得

$$\pi \cdot 3^2 \cdot x = \pi \cdot 3^2 \times 15 + \pi \cdot 2^2 \times 18.$$

解这个方程, 得 $x = 23$.

$$23 - 15 = 8.$$

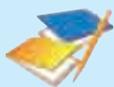
经检验, $x = 8$ (厘米) 符合题意.

所以, 容器内的水面升高8厘米.

通过以上例题可以看出, 列方程解应用题的步骤是: (1) 仔细审题, 弄清题意, 分析问题中的已知量和未知量; (2) 用字母 (如 x) 表示出问题中的一个未知量; 再根据问题中的数量关系, 用含未知数的代数式, 表示出其他相关的未知量; (3) 找出能够反映应用题全部含义的一个等量关系, 并用方程表示出来; (4) 解这个方程; (5) 检验方程的解是否符合题意, 最后写出答案.

容器内的水的体积不变.





练习

- (1) 如果三个连续奇数的和是81, 求这三个连续奇数;
(2) 如果三个连续奇数的和是47, 求这三个连续奇数.
- 一种饮水机上的圆柱形水桶的内径为25厘米, 内壁高为35厘米. 有一个内径为6厘米, 内壁高为10厘米的圆柱形玻璃杯, 如果一桶饮用水全部用这个玻璃杯去盛, 可以盛满多少杯?



习题7.4



复习与巩固

- 山青林场今年植树2 800棵, 比去年植树的2倍还多400棵, 去年植树多少棵?

- (1) 这个题目中的已知量是什么? 未知量是什么?
- (2) 这个题目中的等量关系是什么?
- (3) 列出方程解答这个问题.

列方程解应用题:

- 暑假里, 小莹看一本小说, 第一天看了全书页码的 $\frac{1}{4}$, 第二天比第一天多看了4页, 还剩116页没有看, 这本小说共有多少页?
- 小亮与小莹练习跳绳, 小莹先跳了2分钟, 然后两人各跳了3分钟, 一共跳了780下. 已知小莹比小亮每分钟多跳12下, 两人每分钟各跳多少下?
- 用一根长60厘米的铁丝围成一个长方形.
 - (1) 如果长方形的宽是长的 $\frac{2}{3}$, 求这个长方形的长和宽;
 - (2) 如果长方形的宽比长少4厘米, 求这个长方形的面积.
- 甲、乙两站相距240千米, 从甲站开出一列慢车, 速度为80千米/时; 从乙站开出一列快车, 速度为120千米/时.
 - (1) 如果两车同时开出, 相背而行, 那么多长时间两车相距540千米?
 - (2) 如果两车相向而行, 慢车先开出1时后, 快车开出, 那么再经过多长时间两车相遇?
 - (3) 如果两车同时开出, 同向而行(快车在后), 那么经过多长时间快车可以追上慢车?
 - (4) 如果两车同时开出, 同向而行(慢车在后), 那么经过多长时间两车相距300千米?

6. 复印一批文件, 如果由A, B两台复印机单独完成, 则分别需用时50分、40分. 现两台复印机同时工作, 在20分时B复印机出了故障, 剩下的工作由A机单独完成, 还需多少时间?
7. 一件商品按成本价提高40%标价, 再打8折(标价的80%)销售, 售价为240元. 这件商品的成本价是多少?
8. 书店出售某种挂历, 每售出一本可获得利润18元. 售出全部挂历的 $\frac{2}{5}$ 后, 每本比原价减价10元出售, 直到全部售完, 共获利润3000元. 书店共售出这种挂历多少本?
9. 两根铁棒直立于桶底是水平面的木桶中. 在桶中加入水后, 一根铁棒露出水面的长度是它的 $\frac{1}{3}$; 另一根铁棒露出水面的长度是它的 $\frac{1}{5}$. 两根铁棒长度之和为55厘米. 此时桶中水的深度是多少?
10. 时代中学礼堂主席台上方有一个长12.8 m的长方形会议横标框, 铺红色衬底. 开会前将会议名称用白色厚纸或不干胶纸刻出来贴在上面. 但会议名称不同, 字数一般每次都多少不等. 为了制作及贴字时方便美观, 礼堂工作人员对有关数据做了如下规定: 边空: 字宽: 字距=9:6:2, 如下图所示:



根据这一规定, 当会议名称的字数为18个时, 边空、字宽、字距各是多少?



拓展与延伸

11. 甲、乙二人承包一项工程. 已知甲做了10天, 乙做了13天, 共得工资2650元, 又知甲的技术比乙高, 甲做4天比乙做5天的工资多40元. 求两人各应分得多少元.
12. 张老师买了13时30分开车的火车票, 12时40分从家门口乘公交车赶往火车站. 公交车的平均速度是30千米/时, 在行驶了 $\frac{1}{3}$ 路程后改乘出租车, 车速提高了1倍, 结果提前10分钟到达车站. 张老师家到火车站有多远?
13. 父子俩在同一个工厂工作, 父亲从家到工厂步行需30分钟, 儿子走这段路只需20分钟. 如果父亲比儿子早5分钟动身, 儿子多长时间就能追上父亲?(提示: 可以把从家到工厂的路程看成“1”.)
14. 时代中学现有校舍的面积为20000平方米. 为改善办学条件, 计划拆除部分旧校舍, 建新教学楼. 如果新建教学楼的面积是拆除旧校舍面积的3倍, 计划完成后校舍总面积增加20%, 那么拆除旧校舍多少平方米?
15. 某工厂现库存某种原料1200吨, 用来生产A, B两种产品. 每生产1吨A产品需

这种原料2吨、生产费用1 000元；每生产1吨B产品需这种原料2.5吨、生产费用900元.如果用来生产这两种产品的资金为53万元，那么A、B两种产品各生产多少吨才能使库存原料和资金恰好用完？

16. (中国古代数学问题)^① 100个和尚分100个馒头，大和尚1人分3个馒头，小和尚3人分1个馒头.大、小和尚各有多少人？

探索与创新

17. (中国古代数学问题)^② 用一根绳量井深，把绳3折来量，井外余绳4尺，把绳4折来量，井外余绳1尺.井深和绳长各多少尺？
18. 一辆汽车从A地驶往B地，前 $\frac{1}{3}$ 路段为普通公路，其余路段为高速公路.已知汽车在普通公路上行驶的速度为60千米/时，在高速公路上行驶的速度为100千米/时，汽车从A地到B地共行驶了2.2时.
- 根据以上信息，就该汽车行驶的路程或时间，提出一个用一元一次方程解决的问题，并写出解答过程.



回顾与总结

- 本章学习了哪些内容？总结一下，并与同学交流.
- 等式的基本性质是：
 - (1) _____；
 - (2) _____.
- 在解一元一次方程时，运用等式的基本性质对方程所进行的变形是：去分母；移项；把未知数的系数化为1.
 - (1) 去分母的根据是等式的基本性质_____，去分母时应当注意_____.
 - (2) _____叫做移项，移项的根据是等式的基本性质_____.移项时必须注意_____.
 - (3) “把未知数的系数化为1”的根据是等式的基本性质_____.

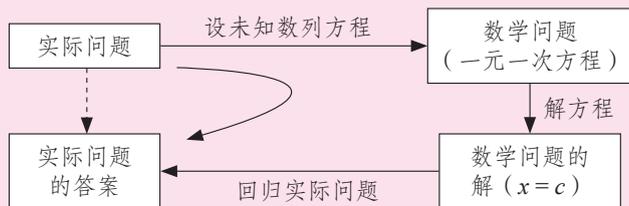
① 本题出自我国明代数学家程大位原编、清代数学家梅珏成增删的《算法统宗》. 原题是：“一百馒头一百僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚得几丁？”

② 本题亦出自《算法统宗》，尺，旧制长度单位，1米=3尺.

4. 解一元一次方程的目标是把原方程化为 $x = c$ 的形式. 它的一般步骤是_____

解一元一次方程时, 要注意根据方程的特点, 灵活运用解方程的步骤对方程进行变形.

5. 一元一次方程是一种重要的数学模型. 建立和求解这一模型的过程包括: 从现实生活或具体情境中抽象出数学问题; 用数学符号建立方程, 表示问题中的数量关系; 解方程; 检验方程解的意义, 回到实际问题. 这个过程如下图所示:



解决问题的关键是分析实际问题中的数量关系, 并根据其中的等量关系列出方程. 在寻找数量关系时, 为了方便, 有时可以借助图示或列表的方法.

6. 日常生活中存在大量的两个量的乘积等于第三个量的实际问题, 如:

实际问题	b	c	$a (a = bc)$
行程问题	速度	时间	路程
工程问题	工作效率	工作时间	工作总量
利润问题	商品利润率	商品进价	商品利润
利息问题	利率	本金	利息
购销问题	单价	数量	总价
...

在建立一元一次方程或其他模型时, 要常常用到“两个量的乘积等于第三个量”的问题. 你还能列举出一些类似的例子吗? 与同学交流.

7. 许多应用题既可以用四则运算方法也可以采用列一元一次方程的方法. 四则运算方法是用题目中的已知量把未知量表示出来, 列出算式, 通过计算求得答案. 列一元一次方程的方法是通过用字母表示题目中的一个未知量, 根据应用题中的数量关系将其他的未知量用含有所设字母的代数式表示出来, 再根据能够包括题目中全部含义的一个等量关系列出方程, 通过解方程求得答案. 在解应用题时, 你觉得这两种算法, 哪种方法更简便些?
8. 学过本章后, 你有哪些收获和体会? 与同学交流.



综合练习



复习与巩固

1. 解下列方程:

$$(1) 4x - 3(20 - x) = 3;$$

$$(2) 7 - 2(5 - 2x) = 2(4x + 3);$$

$$(3) \frac{4x-1}{4} = \frac{2x+3}{3} - 1;$$

$$(4) \frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{6}(x-2) = \frac{1}{2}(4-x).$$

2. 在公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 中, 已知 $a_1 = 2$, $d = 3$, $a_n = 14$, 求 n .

3. 已知 $x = 5$ 是关于 x 的方程 $ax - 8 = 20 + a$ 的解, 求 a 的值.

4. 甲、乙两数的和是 100, 差为 10, 求甲、乙两数.

列方程解应用题:

5. 一份试题由 50 道选择题组成, 每道题选对得 3 分, 不选、选错均扣 1 分. 小亮在这次考试中得了 102 分, 他答对了多少道题?

6. 一个房间里有 4 条腿的椅子和 3 条腿的凳子共 16 个, 如果椅子腿数和凳子腿数加起来共 60 条, 那么有几把椅子和几条凳子?

7. 某种服装因换季打折销售, 如果按定价的六五折出售, 则每件亏本 35 元; 如果按定价的八折出售, 则每件盈利 10 元. 这种服装原定价多少元?

8. 用直径 200 毫米的圆钢铸造一个长、宽、高分别为 300 毫米、300 毫米、80 毫米的长方体工件, 应截取多长的圆钢? (精确到 1 毫米)

9. (中国古代数学问题) ① 一个妇女在河边洗碗, 河官问: “洗多少只碗? 有多少客人用餐?” 妇女答: “洗 65 只碗, 客人二人共用 1 只饭碗, 三人共用 1 只汤碗, 四人共用 1 只肉碗. 你说有多少客人用餐?”



拓展与延伸

10. 当 m 取什么值时, 关于 x 的方程 $5x + 3m = 24$ 与方程 $5x + 3 = 0$ 的解相同?

列方程解应用题:

11. 小亮和哥哥在离家 2 千米的同一所学校上学, 小亮以 4 千米/时的速度步行去学校, 经过 10 分钟, 哥哥骑自行车以 12 千米/时的速度去追小亮.

(1) 到校前哥哥能追上小亮吗?

① 本题出自《孙子算经》, 原题是: “妇女河上荡杯, 津吏问: ‘杯何以多?’ 妇人曰: ‘有客.’ 津吏曰: ‘客几何?’ 妇人曰: ‘两人共饭, 三人共羹, 四人共肉, 凡用杯六十五. 不知客几何?’ ”

(2) 如果哥哥能追上小亮, 此时离学校还有多远?

12. 要铺设一条长 650 米的地下管道, 由甲、乙两个工程队从两端相向施工, 甲队每天铺设 48 米, 乙队比甲队每天多铺设 22 米. 如果乙队比甲队晚开工 1 天, 那么乙队开工多少天, 两队能完成整个铺设任务的 80%?
13. (中国古代问题) 一棵树高九丈八, 一只蜗牛往上爬; 白天往上爬一丈, 晚上下滑七尺八. 试问需要多少天, 爬到树顶不下滑^❶?



探索与创新

14. 商店对某一种商品按原价的八折出售, 为了使销售总金额不变, 销售量要比原价销售时增加百分之几?
15. (古代数学问题) 希腊数学家丢番图 (Diophantus, 公元 3-4 世纪人, 生卒年代不详) 的墓碑上记载着:
 “他生命的六分之一是幸福的童年;
 再活了他生命的十二分之一, 两颊长起了细细的胡须;
 又度过了一生的七分之一, 他结了婚;
 再过五年, 他有了儿子, 感到很幸福;
 可是他儿子只活了他全部年龄的一半;
 儿子死后, 他在极度悲痛中度过了四年, 也与世长辞了”.
 根据以上信息, 请求出丢番图的寿命及儿子死时丢番图的年龄.
16. 为鼓励学生参加体育锻炼, 学校计划拿出不超过 1 600 元的资金, 再购买一批篮球和排球. 已知两个篮球的价钱和三个排球的价钱相等, 买一个篮球和一个排球共需 80 元.
- (1) 篮球和排球的单价分别是多少?
- (2) 若要购买的篮球和排球的总数量是 36 个, 且购买的篮球数量多于 25 个. 有几种购买方案?

❶ 丈、尺是我国长度的市制单位, 1 丈 = 10 尺, 原文中“九丈八”是 9 丈 8 尺的意思, 即 9.8 丈, “七尺八”是 7 尺 8 寸的意思, 即 7.8 尺.

后 记

这套义务教育七~九年级数学教科书是在原《义务教育课程标准实验教科书 数学(七~九年级)》(青岛出版社 2005年1月第一版)的基础上,依据教育部2011年颁布的《义务教育课程标准》修订完成的.经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过,准许使用.

本套教科书由展涛担任主编,殷建中担任执行主编,参加本册教材编写的有(按姓氏笔画为序):马德志、王德刚、刘崇渭、李殿起、张吉三、殷建中、傅海伦、谢廷楨等同志,由谢廷楨担任本册主编.在本套教科书的编写工作中,我们得到了关心我们教材建设的许多专家、学者以及广大数学教育工作者的大力支持和热情帮助.在此,我们一并致谢.

欢迎教师 and 同学们在使用本书过程中,向我们提出改进的意见和建议.

编 者

数 学

SHUXUE



绿色印刷产品

价格批准文号：鲁发改价格核 [2021] 629012

举报电话：12345

ISBN 978-7-5436-3322-3



9 787543 633223 >

定价：10.66 元