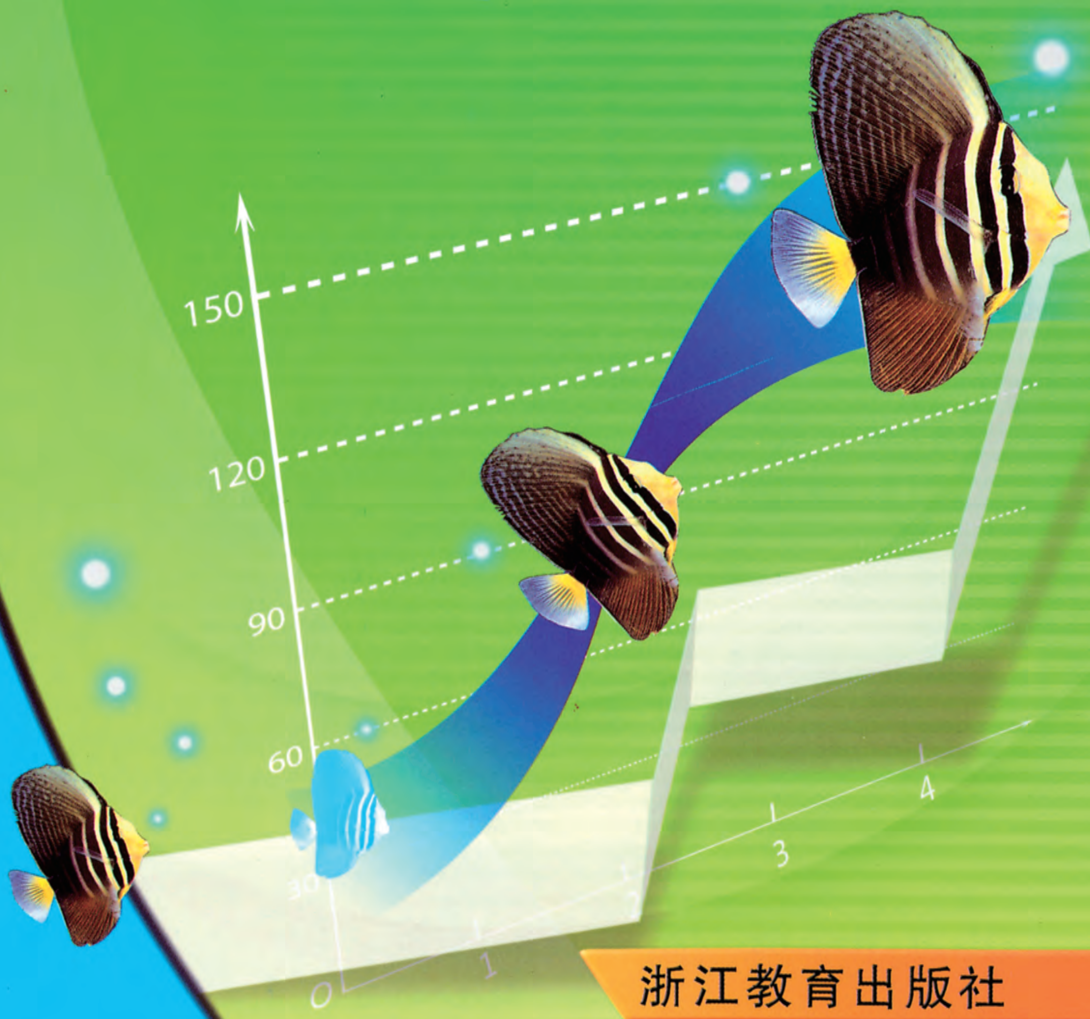
教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级上册



浙江教育出版社

义务教育教科书

数学 八年级上册

SHUXUE

本册教科书编写人员

实验版（2004～2012）

主　　编　范良火

副 主 编　岑　申　张宝珍

编写人员　范良火　金克勤　金才华　徐鸿斌

　　　　　王亚权　岑　申　许芬英　王利明

　　　　　郑　瑄　郑　洁　张幼云

2013年版

主　　编　范良火

副 主 编　岑　申　张宝珍　许芬英

编写人员　范良火　金才华　许芬英　王亚权

　　　　　金克勤　王利明　岑　申　巩子坤

浙江教育出版社

前 言

亲爱的同学：

当这册数学教科书放在你面前时，你又开始了一段新的数学学习之旅.

翻开新书，你会感受到数学世界的精彩：八年级上册首先介绍**三角形**和**特殊三角形**——等腰三角形、等边三角形和直角三角形. 通过这两章的学习，不仅能使我们了解这些图形的判定、性质以及在现实生活中的应用，同时也为我们进一步学习其他几何图形打下基础. 在现实世界中，不等关系远比相等关系多且复杂，通过**一元一次不等式**的学习，也就拉近了与实际生活的距离. **图形与坐标**告诉我们如何确定物体在平面上的位置，给我们一种崭新的数形结合的数学方法，为用图象研究函数的性质作了准备. 函数是探索具体问题中的数量关系和变化规律的最重要的数学工具，用**一次函数**刻画实际问题有着非常广泛的应用.

这册新的数学教科书，保持了前两册的体例、结构和理念. "合作学习"，让你与同伴一起探索新的数学知识、新的数学方法；"探究活动"，使你亲身经历知识的发生过程，体验"发现"的快乐；"阅读材料"帮助你了解许多有趣的数学史实，开阔你的数学视野；而"设计题"和"课题学习"，则为你提高分析和解决问题的能力，并在数学中进行探索、实践和创新提供了机会.

数学是最重要的基础学科，是学习物理、化学、地理、生物、经济等学科的必备知识；数学也能培养我们的思考能力，能使人思维缜密、思路清晰，增强逻辑性和精确性；数学更是认识世界，把握事物本质的科学，具有简洁之美，朴素之真，具有无穷的魅力.

数学是严肃的，它需要学习者有足够的勤奋和毅力；但数学也并不神秘，只要有充分的兴趣和良好的方法，每个人都可以学好它.

这套教科书按照教育部最新制订的《义务教育数学课程标准》(2011 年版)编写，7～9 年级共 6 册. 我们殷切希望它能成为你的朋友，能够帮助你掌握数学知识，提高数学能力，欣赏数学魅力，享受学习乐趣. 祝你学习快乐，学业进步！

编 者

目 录

第1章

三角形的初步知识

目录 CONTENTS<<

在铁塔、吊车悬臂、桥梁和房顶构造中，你能看到很多三角形的形状. 你知道为什么要采用三角形的结构吗？

本章我们将学习三角形的有关概念和性质，全等三角形和基本尺规作图，学习证明的意义、方法及其表述.

1·1 认识三角形

在这座铁塔上我们可以看到许多三角形的支架. 你能举出在生活中看到的三角形的例子吗?

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做**三角形**(triangle). “三角形”用符号“△”表示. 如图 1-1,顶点是 A,B,C 的三角形记做“$\triangle ABC$”,读做“三角形 ABC”. $\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 是在三角形的内部,由相邻两边组成的角,称为**三角形的内角**,简称**三角形的角**. 线段 AB,BC 和 CA 是三角形的三条边.

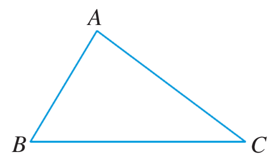


图 1-1

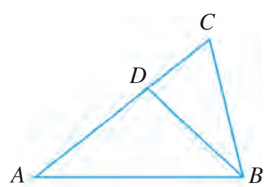
小学里我们已经学过,三角形的内角有以下性质:

三角形三个内角的和等于 180°.

做一做 ZUOYIZUO

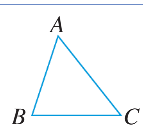
(1) 说出图中所有的三角形,以及每一个三角形的三条边和三个内角.

(2) 若 $\angle A=40°$,$\angle C=60°$,求 $\angle ABC$ 的度数.

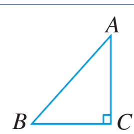


三角形可以按内角的大小进行分类.

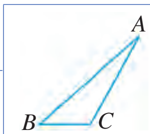
三角形



三个内角都是锐角的三角形是**锐角三角形**(acute triangle).



有一个内角是直角的三角形是**直角三角形**(right triangle).



有一个内角是钝角的三角形是**钝角三角形**(obtuse triangle).

图 1-2

由两点之间线段最短，可以得到如下性质：

三角形任何两边的和大于第三边.

如图 1-3，把△ABC 的三个顶点 A，B，C 的对边 BC，AC，AB 分别记为 a，b，c，就有 $b+c>a$，$a+b>c$，$a+c>b$.

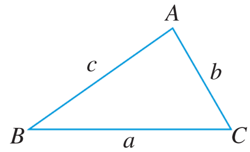


图 1-3

例1 判断下列各组线段中，哪些首尾相接能组成三角形，哪些不能组成三角形，并说明理由.

（1）$a=2.5\text{ cm}$，$b=3\text{ cm}$，$c=5\text{ cm}$.

（2）$e=6.3\text{ cm}$，$f=6.3\text{ cm}$，$g=12.6\text{ cm}$.

分析 要判断三条线段能否组成三角形，依据“三角形任何两边的和大于第三边”，只要把最长的一条线段与另外两条线段的和作比较. 如果最长的一条线段小于另外两条线段的和，那么这三条线段就能组成三角形；如果最长的一条线段大于或等于另外两条线段的和，那么这三条线段就不能组成三角形.

解 （1）∵ 最长线段是 $c=5\text{ cm}$，

$a+b=2.5+3=5.5(\text{cm})$，

∴ $a+b>c$，所以线段 a，b，c 能组成三角形.

（2）∵ 最长线段是 $g=12.6\text{ cm}$，

$e+f=6.3+6.3=12.6(\text{cm})$，

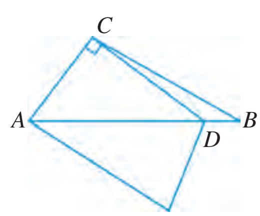
∴ $e+f=g$，所以线段 e，f，g 不能组成三角形.

想一想

三角形任何两边的差与第三边有什么关系？

课内练习 KENEILIANXI

1. 说出图中的锐角三角形、直角三角形和钝角三角形.



（第 1 题）

2. 由下列长度的三条线段能组成三角形吗？请说明理由.

（1）1 cm，2 cm，3.5 cm.

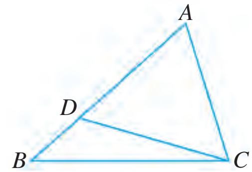
（2）4 cm，5 cm，9 cm.

（3）6 cm，8 cm，13 cm.

3. 如图，在$\triangle ABC$中，D 是 AB上一点，且 $AD=AC$，连结 CD. 在下面各空格中填入“$>$”或“$<$”，并说明理由.

（1）AB______$AC+BC$.

（2）$2AD$______CD.



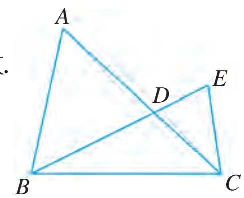
（第 3 题）

作业题 ZUOYETI

A **1.** 如图，AC 与 BE 相交于点 D.

（1）图中有几个三角形？把它们写出来.

（2）若$\angle ABE=55°$，$\angle EDC=70°$，求$\angle A$ 的度数.



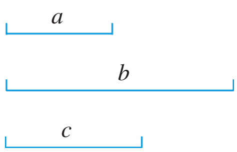
（第 1 题）

2. 下列长度的三条线段能组成三角形吗？请说明理由.

（1）20 cm，15 cm，8 cm.

（2）7 cm，15 cm，8 cm.

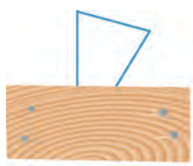
（3）5 cm，15 cm，8 cm.

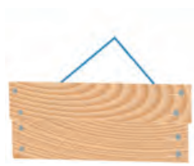


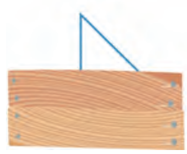
（第 3 题）

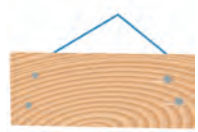
3. 如图所示三条线段 a，b，c 能组成三角形吗？你是用什么方法判别的？

4. 下面给出的四个三角形都有一部分被遮挡，其中不能判定三角形类型的是(　　)


A.


B.


C.


D.

B **5.** 已知平面内三个点 A，B，C 之间的距离满足关系式 $AB+BC=AC$. 画图说明点 A，B，C 的位置关系.

6. 四根木棒的长度分别为 12 cm，8 cm，5 cm，6 cm. 从中取三根，使它们首尾顺次相接组成一个三角形. 一共有多少种取法？把它们都列出来.

2

在三角形中，一个内角的角平分线与它的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫做**三角形的角平分线**. 如图 1-4，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D，线段 AD 就是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线.

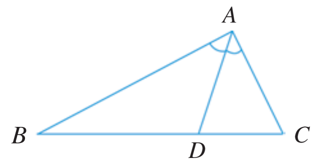


图 1-4

连结三角形的一个顶点与该顶点的对边中点的线段，叫做**三角形的中线**（median）. 如图 1-5，D 为 BC 的中点，线段 AD 就是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线.

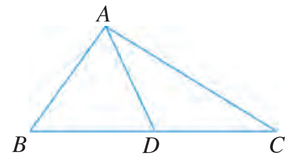


图 1-5

从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线作垂线，顶点和垂足之间的线段叫做**三角形的高线**（height）. 如图 1-6，$AD \perp BC$ 于点 D，AD 就是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高线.

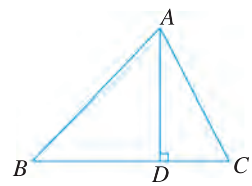
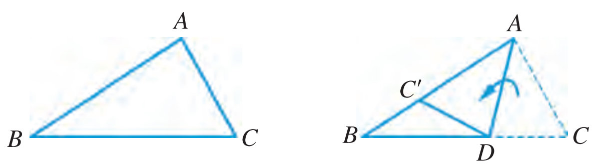


图 1-6

做一做 ZUOYIZUO

1. 任意剪一个三角形，用折叠的方法（如图），画出这个三角形的三条角平分线. 你发现了什么？

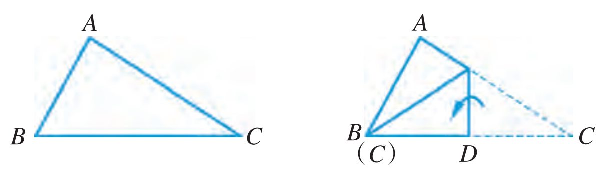
（请与你的同伴交流）



（第 1 题）

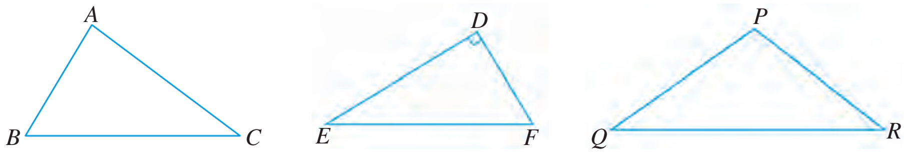
2. 任意剪一个三角形，用折叠的方法（如图），找出三条边的中点，画出三条中线. 你发现了什么？

（请与你的同伴交流）



（第 2 题）

3. （1）用三角尺分别作出锐角三角形 ABC，直角三角形 DEF 和钝角三角形 PQR 的各边上的高线.



（第 3 题）

（2）观察你所作的图形，比较三个三角形中三条高线的位置，与三角形的类型有什么关系？

例2 如图 1-7，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\triangle ABC$ 的高线，AE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 已知 $\angle BAC=80^\circ$，$\angle C=40^\circ$. 求 $\angle DAE$ 的大小.

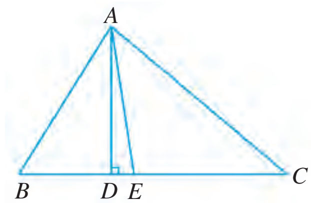


图 1-7

解 $\because$ AE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，且 $\angle BAC=80^\circ$，

$\therefore$ $\angle EAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC=40^\circ$.

$\because$ AD 是 $\triangle ABC$ 的高线，

$\therefore$ $\angle ADC=90^\circ$.

根据“三角形三个内角的和等于180°”，知

$\angle DAC+\angle ADC+\angle C=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle DAC=180^\circ-\angle ADC-\angle C$

$=180^\circ-90^\circ-40^\circ=50^\circ$.

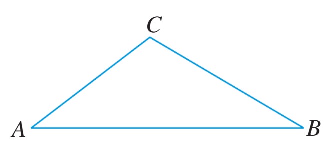
$\therefore$ $\angle DAE=\angle DAC-\angle EAC=50^\circ-40^\circ=10^\circ$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 如图，已知 $\triangle ABC$.

（1）用刻度尺画 BC 边上的中线.

（2）用量角器画以点 C 为一个端点的 $\triangle ABC$ 的角平分线.

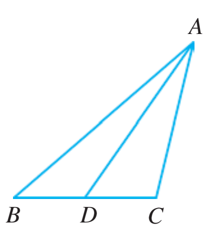


（第 1 题）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线.

（1）$\triangle ABC$，$\triangle ADC$ 有没有共同的高线？如果有，作出这条高线.

（2）$\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的面积相等吗？请说明理由.



（第 2 题）

探究活动 TANJIUHUODONG

如图 1-8，点 D,E,F 分别是△ABC 的三条边的中点. 设△ABC 的面积为 S, 求△DEF 的面积.

你可以这样考虑:

(1) 连结 AE. △AEC 的面积是多少?

(2) 由第(1)题,你能求出△ECF 的面积吗? △ADF 和△DBE 的面积呢?

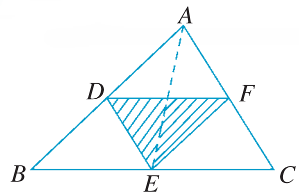
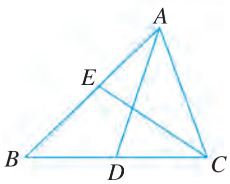


图 1-8

作业题 ZUOYETI



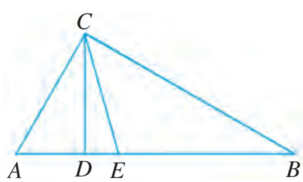
(第 1 题)

A **1.** 如图,AD,CE 分别是△ABC 的中线和角平分线,则:

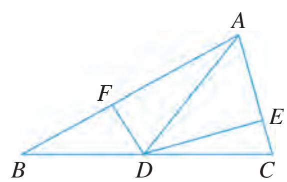
$BD=$______$=\frac{1}{2}$______;

$\angle ACE=$______$=\frac{1}{2}$______.

2. 如图,在△ABC 中,$\angle ACB=90°$,CD 是斜边上的高线,CE 是△ABC 的角平分线,且$\angle CEB=105°$. 求$\angle ECB$,$\angle ECD$ 的大小.

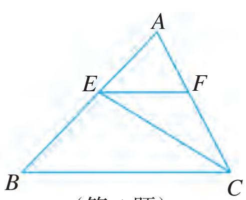


(第 2 题)



(第 3 题)

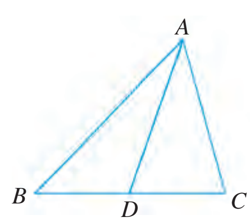
3. 如图,AD 是△ABC 的中线,$DE\perp AC$,$DF\perp AB$,E,F 分别是垂足. 已知 $AB=2AC$,求 DE 与 DF 的长度之比.



(第 4 题)

B **4.** 如图，CE 是△ABC 的角平分线,$EF\parallel BC$,交 AC 于点 F. 已知$\angle AFE=64°$,求$\angle FEC$ 的度数.

C **5.** 如图,在△ABC 中,AD 是 BC 边上的中线. 已知 $AB=7$ cm,$AC=5$ cm. 求△ABD 和△ACD 的周长的差.



(第 5 题)

1·2 定义与命题

“鸟是动物.”“鸟是动物吗?”这两个句子在叙述上有什么区别?

1

人们在进行各种沟通、交流时常需要应用许多名称和术语. 为了不产生歧义,对这些名称和术语的含义必须有明确的规定. 例如,商店降低商品的定价出售商品叫做打折;物体单位面积受到的压力叫做压强;在同一个平面内,不相交的两条直线叫做平行线. 一般地,能清楚地规定某一名称或术语的意义的句子叫做该名称或术语的**定义**(definition).

做一做 ZUOYIZUO

说出下列数学名词的定义:

(1) 无理数.　　(2) 直角三角形.

(3) 角平分线.　　(4) 抽样调查.

比较下列句子在表述形式上,哪些对事情作了判断,哪些没有对事情作出判断.

(1) 对顶角相等.　　(2) 画一个角等于已知角.

(3) 两直线平行,同位角相等.　　(4) a,b 两条直线平行吗?

(5) 鸟是动物.　　(6) 已知 $a^2=4$,求 a 的值.

(7) 若 $a^2=b^2$,则 $a=b$.　　(8) 2008 年奥运会在北京举行.

一般地,判断某一件事情的句子叫做**命题**(statement). 上述句子(1)(3)(5)(7)(8)都对事件作出判断(不论正确与否),它们都是命题;句子(2)(4)(6)没有对事情作出判断,它们不是命题.

我们在数学上学习的命题一般由条件和结论两部分组成. 条件是已知事项,结论是由已知事项得到的事项. 这样的命题可以写成“如果……那

么……”的形式，其中以“如果”开始的部分是**条件**（condition），“那么”后面的部分是**结论**（conclusion）．如“两直线平行，同位角相等”可以改写成“如果两条直线平行，那么同位角相等”．

例1 指出下列命题的条件和结论，并改写成“如果……那么……”的形式．

（1）等底等高的两个三角形面积相等．

（2）对顶角相等．

（3）同位角相等，两直线平行．

解 （1）这个命题的条件是“两个三角形有一条边和这条边上的高线对应相等”，结论是“这两个三角形的面积相等”．可以改写成“如果两个三角形有一条边和这条边上的高线对应相等，那么这两个三角形的面积相等”．

（2）这个命题的条件是“两个角是对顶角”，结论是“这两个角相等”．可以改写成“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”．

（3）这个命题的条件是“两条直线被第三条直线所截得的同位角相等”，结论是“两直线平行”．可以改写成“如果两条直线被第三条直线所截得的同位角相等，那么这两条直线平行”．

课内练习 KENEILIANXI

1. 给下列各题中的图形命名，并给出名称的定义．

（1）（2）（3）

（第1题）

2. 下列句子中，哪些是命题？哪些不是命题？

（1）正数大于一切负数吗？

（2）两点之间线段最短．

（3）$\sqrt{2}$不是无理数．

（4）作一条直线和已知直线垂直．

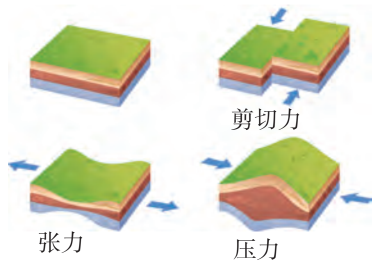
3. 指出下列命题的条件和结论，并改写成“如果……那么……”的形式.
（1）绝对值相等的两个数相等.
（2）直角三角形的两个锐角互余.

4. 写出 2 至 4 个数学上的命题，并写成“如果……那么……”的形式.
（请与你的同伴交流）

作业题 ZUOYETI

A 1. 阅读下面这段叙述：

地壳中存在三种不同的应力——剪切力、张力和压力. 亿万年来，剪切力、张力和压力一直在改变着岩石的形状和体积. 在地壳应力的作用下，有些岩石碎裂了，有些则像被太阳暴晒后变软的沥青一样，慢慢弯曲.



（第 1 题）

要读懂这段叙述，你认为哪些名称和术语需给出定义？

2. 写出四个数学名词的定义.

3. 下列句子中，哪些是命题？哪些不是命题？
（1）将 27 开立方.
（2）任意三角形的三条中线相交于一点吗？
（3）锐角小于直角.
（4）$|a|<0$（a 为实数）.

4. 指出下列命题的条件和结论，并改写成“如果……那么……”的形式.
（1）内错角相等，两直线平行.
（2）正方形的四条边相等.

B 5. 把下列命题改写成“如果……那么……”的形式.
（1）同角的余角相等.
（2）同号两数相乘，积为正数.

6. 观察下列整式的次数和项数，找出它们的共同特征，给以名称，并作出定义.

x^2-2x-1，$2x^2+3x+1$，$x^2-2xy+2y^2$，$4a^2-4ab+b^2$.

分别说出下列命题的条件和结论.

(1) 三角形的两边之和大于第三边.

(2) 三角形三个内角的和等于 180°.

(3) 两点确定一条直线.

(4) 对于任何实数 x, $x^2<0$.

上述命题中,哪些正确? 哪些不正确?

正确的命题称为**真命题**(true statement);不正确的命题称为**假命题**(false statement). 要判定一个命题是真命题,常常通过推理的方式,即根据已知事实来推断未知事实;也有一些命题是人们经过长期实践,公认为正确的. 例如,上述四个命题中,命题(1)(2)通过推理可以判定是正确的,所以是真命题;命题(3)则是人们经过长期实践后,公认为正确的命题,也是真命题. 因为对于任何实数 x,都有 $x^2\geqslant 0$,所以命题(4)是不正确的,是一个假命题.

例2 判断下列命题的真假,并说明理由.

(1) 三角形一条边的两个顶点到这条边上的中线所在直线的距离相等.

(2) 一组对边平行,另一组对边相等的四边形是平行四边形.

(3) $\sqrt{a^2}=a$ (a 为实数).

解 (1) 是真命题. 理由如下:

如图 1-9,在 $\triangle ABC$ 中,AD 是 BC 边上的中线,$BE\perp AD$,$CF\perp AD$.

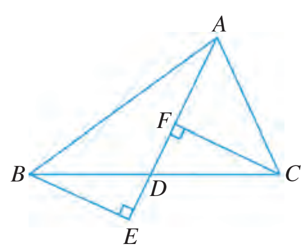


图 1-9

$\because$ $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的面积相等(为什么?),

而 $\triangle ABD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AD\cdot BE$,$\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AD\cdot CF$,

$\therefore$ $\frac{1}{2}AD\cdot BE=\frac{1}{2}AD\cdot CF$,

$\therefore$ $BE=CF$. 所以这个命题是真命题.

（2）是假命题. 理由如下：

如图 1-10，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=DC$. 但四边形 $ABCD$ 不是平行四边形，所以这个命题是假命题.

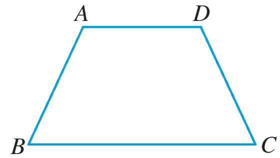


图 1-10

（3）是假命题. 理由如下：

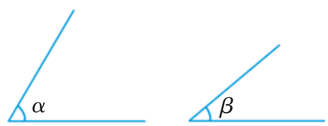
取 $a=-2$，则 $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2\neq-2$，也就是 $\sqrt{a^2}\neq a$，所以这个命题是假命题.

要说明一个命题是假命题，通常可以通过举反例的方法. 命题的反例是具备命题的条件，但不具备命题的结论的实例. 例如，上例第(2)题中的梯形，第(3)题中的“$a=-2$”.

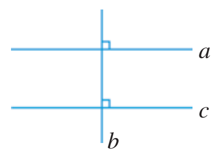
做一做 ZUOYIZUO

判断下列命题的真假，并说明理由.

（1）如图，已知 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$，则 $\angle\alpha>\angle\beta$.



（第(1)题）



（第(3)题）

（2）两点之间线段最短.

（3）如图，若 $a\perp b$，$c\perp b$，则 $a\parallel c$.

（4）会飞的动物是鸟.

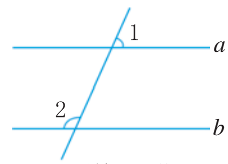
本书挑选一部分人们经过长期实践后公认为正确的命题，作为判断其他命题的依据，这些命题称为基本事实. 例如，前面我们已经学习过的基本事实有：“两点之间线段最短”，“两点确定一条直线”，“经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行”等.

用推理的方法判断为正确的命题叫做**定理**(theorem). 定理也可以作为判断其他命题真假的依据. 例如，前面我们已经学过的“对顶角相等”，“三角形任何两边的和大于第三边”，“两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行”等都是定理.

课内练习 KENEILIANXI

1. 列举两个命题，要求其中一个是真命题，另一个是假命题. 你是用什么方法来判断它们的真假的?

2. 如图，若$\angle 1+\angle 2=180°$，则直线 $a/\!/b$. 用推理的方法说明它是真命题.



（第 2 题）

作业题 ZUOYETI

A

1. 下列命题中，哪些是真命题? 哪些是假命题? 请说明理由.

（1） 同角的补角相等.

（2） 一条直线截另外两条直线所得到的同位角相等.

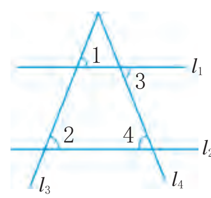
（3） 有公共顶点且相等的两个角是对顶角.

（4） 两个无理数的和仍是无理数.

2. 命题“$x=3$ 是方程$\dfrac{x-3}{x^2-3}=0$ 的解”是真命题还是假命题? 请说明理由.

3. 写出三个命题，要求其中两个是真命题，一个是假命题.

4. 如图，若$\angle 1=\angle 2$，则$\angle 3=\angle 4$. 用推理的方法说明它是真命题.



（第 4 题）

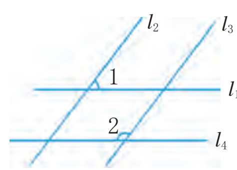
B

5. 判断下列命题的真假，并说明理由.

（1） 若 $x^2-x=0$，则 $x=0$.

（2） 三角形的三条高线相交于三角形内一点.

6. 如图，若直线 $l_1/\!/l_4$，直线 $l_2/\!/l_3$，则$\angle 1+\angle 2=180°$. 用推理的方法说明它是真命题.



（第 6 题）

1·3 证　明

你认为线段 AB 和线段 CD 的长度相等吗？量量看.

1

合作学习

通过观察，先猜想结论，再动手验证：

1. 如图 1-11，一组直线 a,b,c,d 是否都互相平行？

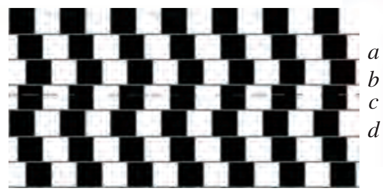


图 1-11

2. 当 $n=0,1,2,3,4$ 时，代数式 n^2-3n+7 的值分别是 7，5，5，7，11，它们都是质数，那么，命题“对于自然数 n，代数式 n^2-3n+7 的值都是质数”是真命题吗？

要判定一个命题是真命题，往往需要从命题的条件出发，根据已知的定义、基本事实、定理（包括推论），一步一步推得结论成立. 这样的推理过程叫做**证明**（proof）.

例1　已知：如图 1-12，$DE/\!/BC$，$\angle 1=\angle E$.

求证：BE 平分 $\angle ABC$.

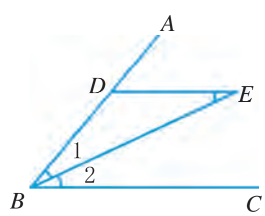


图 1-12

证明　$\because$　$DE/\!/BC$（已知），

$\therefore$　$\angle 2=\angle E$（两直线平行，内错角相等）.

$\because$　$\angle 1=\angle E$（已知），

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$　BE 平分 $\angle ABC$（角平分线的定义）.

例2　已知：如图 1-13，$AB\parallel CD$，EP，FP 分别平分 $\angle BEF$，$\angle DFE$.
求证：$\angle PEF+\angle PFE=90^\circ$.

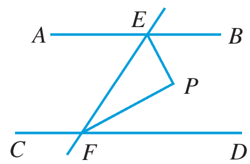


图 1-13

证明　$\because$　EP，FP 分别平分 $\angle BEF$，$\angle DFE$（已知），

$\therefore$　$\angle PEF=\dfrac{1}{2}\angle BEF$，

$\angle PFE=\dfrac{1}{2}\angle DFE$（角平分线的定义）.

$\because$　$AB\parallel CD$（已知），

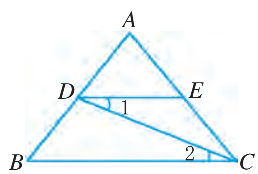
$\therefore$　$\angle BEF+\angle DFE=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补）.

$\therefore$　$\angle PEF+\angle PFE=\dfrac{1}{2}\angle BEF+\dfrac{1}{2}\angle DFE$

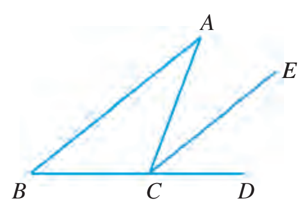
$$=\frac{1}{2}(\angle BEF+\angle DFE)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ.$$

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 上的点，且 $\angle 1=\angle 2$.
求证：$\angle B=\angle ADE$.



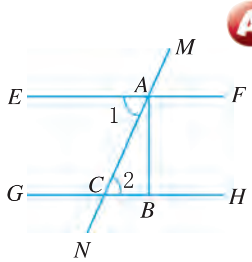
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$\angle ACD=2\angle B$，CE 平分 $\angle ACD$. 求证：$CE\parallel AB$.

作业题 ZUOYETI



（第 1 题）

A **1.** 已知：如图，直线 EF，GH 被直线 MN 所截，$AB\perp GH$，B 为垂足，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$AB\perp EF$（填空）.

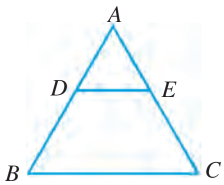
证明：$\because$　$\angle 1=\angle 2$（　　　　　），

$\therefore$　$EF\parallel$ ________（　　　　　　　　　　　　　　　），

$\therefore$　$\angle FAB+\angle HBA=$ ________（　　　　　　　　　　　　　）.

$\because$　$AB\perp GH$（已知），

$\therefore$　$\angle HBA=90^\circ$（　　　　　　　）.


（第 2 题）

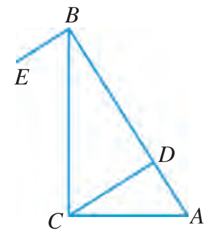
∴　$\angle FAB=180^\circ-\angle HBA=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，

∴　$AB\perp EF$(　　　　　　　).

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$. D,E分别是AB,AC上的点，且$\angle ADE=\angle AED$. 求证：$DE/\!/BC$.

B **3.** 已知：如图，$BC\perp AC$于点C，$CD\perp AB$于点D，$\angle EBC=\angle A$. 求证：$BE/\!/CD$.

4. 命题“若n是自然数，则代数式$(3n+1)(3n+2)+1$的值是3的倍数”是真命题还是假命题？如果你认为是假命题，请说明理由；如果认为是真命题，给出证明.


（第 3 题）

2

例3　证明命题“三角形三个内角的和等于180°”是真命题.

已知：如图 1-14，$\angle BAC,\angle B,\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角.

求证：$\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$.

证明　如图 1-14，过点A作直线$MN/\!/BC$，则

$\angle B=\angle MAB$（两直线平行，内错角相等）.

同理，$\angle C=\angle NAC$.

∴　$\angle BAC+\angle B+\angle C$

$=\angle BAC+\angle MAB+\angle NAC=180^\circ$.

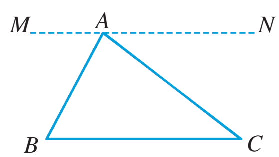


图 1-14

如图 1-15，$\angle ACD$是由$\triangle ABC$的一条边BC的延长线和另一条相邻的边CA组成的角，这样的角叫做该三角形的**外角**(exterior angle).

由$\angle ACD+\angle ACB=180^\circ$，

$\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，

得$\angle ACD=\angle A+\angle B$.

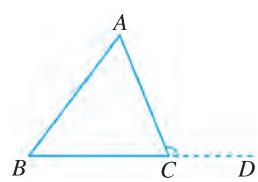


图 1-15

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

这是由三角形的内角和定理直接推理得到的一个推论. 推论也可以作为推理的依据.

注意

证明过程中的每一步推理都要有依据,依据作为推理的理由,可以写在每一步后的括号内.

证明几何命题时,表述格式一般是:

(1) 按题意画出图形.

(2) 分清命题的条件和结论,结合图形,在“已知”中写出条件,在“求证”中写出结论.

(3) 在“证明”中写出推理过程.

在解决几何问题时,有时需要添加辅助线. 添辅助线的过程要写入证明中. 辅助线通常画成虚线.

例4 已知:如图 1-16, $\angle B+\angle D=\angle BCD$. 求证: $AB\parallel DE$.

分析 如图 1-16,延长 BC,交 DE 于点 F. 根据平行线的判定定理,只要证明 $\angle B=\angle CFD$,或 $\angle B+\angle BFE=180°$,就能证明 $AB\parallel DE$.

证明 如图 1-16,延长 BC,交 DE 于点 F.

$\because$ $\angle B+\angle D=\angle BCD$(已知),

又 $\because$ $\angle BCD=\angle D+\angle CFD$(三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和),

$\therefore$ $\angle B+\angle D=\angle D+\angle CFD$,

$\therefore$ $\angle B=\angle CFD$.

$\therefore$ $AB\parallel DE$(内错角相等,两直线平行).

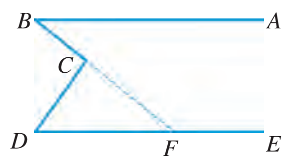
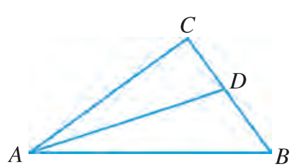


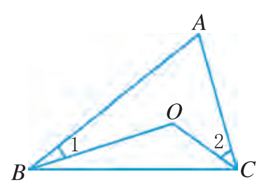
图 1-16

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知:如图,在$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, $\angle B=54°$, $\angle ADC=72°$.
求证: AD 平分$\angle BAC$.



(第 1 题)



(第 2 题)

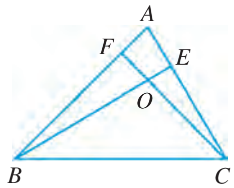
2. 已知:如图, O 为$\triangle ABC$ 内任意一点. 求证: $\angle BOC=\angle 1+\angle 2+\angle A$.

作业题 ZUOYETI

A

1. 已知：如图，$\triangle ABC$ 的两条高线 BE，CF 相交于点 O.

求证：$\angle BOC=180^\circ-\angle A$（填空）.



（第 1 题）

证明：$\because$ BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的两条高线（　　　　），

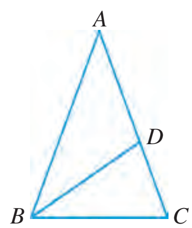
$\therefore$ $\angle OEC=\angle BFC=90^\circ$（　　　　　　　　）.

$\because$ $\angle ACF+\angle A=\angle BFC=90^\circ$（　　　　　　　　　　　　　　　　），

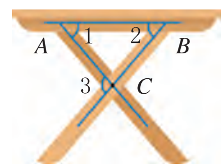
$\therefore$ $\angle ACF=90^\circ-\angle A$.

$\therefore$ $\angle BOC=\angle OEC+\angle ACF=90^\circ+90^\circ-\angle A=180^\circ-\angle A$.

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$\angle BDC=75^\circ$，$\angle A=40^\circ$. 求证：$\angle ABC=\angle C$.



（第 2 题）



（第 3 题）

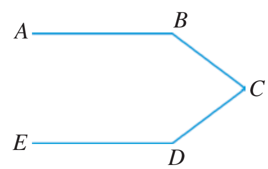
3. 一张小凳子的结构如图所示，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=100^\circ$. 求 $\angle 1$ 的度数.

B

4. 证明命题“三角形不共顶点的三个外角的和等于360°”是真命题.

5. 已知：如图，$\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$.

求证：$AB/\!/DE$.



（第 5 题）

费马和他的猜想

费马

费马是17世纪法国数学家.大约1637年,费马阅读丢番图的《算术》时,在命题:“$x^2+y^2=z^2$有无穷多组正整数解”的旁边写道:“要将一个立方数分成两个立方数的和,或一个四次幂分成两个四次幂的和,或更一般地,将一个高于二次的幂分成两个同次幂的和,都是不可能的.对此,我确信已发现一种美妙的证法,可惜这里空白太小,写不下.”这段话里隐含的一个命题是:方程$x^n+y^n=z^n$ $(n>2)$没有正整数解.

怀尔斯

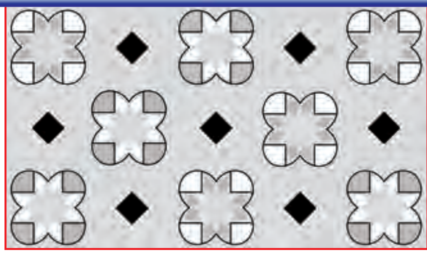
这个命题被称为费马大定理,又叫做费马最后定理.人们将这个命题叫做“定理”,并不是真的相信费马已经证明了它.恰恰相反,真正的证明经历了许多数学家(包括一些著名数学家,如欧拉、高斯、柯西等)及数学爱好者三个多世纪的不懈努力.一直到1995年,英国数学家安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)经过8年奋战,用长达130页的篇幅完整地证明了费马大定理.在冲击这个数论世纪难题的过程中,无论是不完全的证明还是最终完整的证明,都给数学界带来很大影响.其间产生了很多的数学结果,甚至数学分支.

费马有许多有趣的猜想,这些猜想几乎都已被证明正确.不过费马也有过失误.1640年,他验证了当$n=0,1,2,3,4$时,$2^{2^n}+1$的值都是质数,于是费马断言:对于所有的自然数n,$2^{2^n}+1$的值都是质数.这却是一个错误的命题.1732年,瑞士数学家欧拉发现,当$n=5$时,这个猜想就不成立.更有意思的是,当$n\geq5$时,在$2^{2^n}+1$的值中,再也找不到一个新的质数.有人甚至给出了一个新的猜想:当$n\geq5$时,$2^{2^n}+1$的值全都是合数.

2001年法国发行的费马和费马大定理纪念邮票及其首日邮戳.

要证明一个数学猜想是否为真,不仅需要对数学的兴趣和毅力,还需要掌握足够的数学知识和方法,以及不懈探索和创新的精神.愿你从小就努力学习,打下良好的知识基础,培养对科学的兴趣.

1·4 全等三角形



在这幅精美的图画中，你能找到哪些形状和大小都相同的图案？

观察图 1-17 中的各对图形，你发现了什么？如果把每一对中的两个图形叠在一起，它们能重合吗？

（1）

（2）

（3）

（4）

图 1-17

能够重合的两个图形称为**全等图形**（congruent figures）.

做一做 ZUOYIZUO

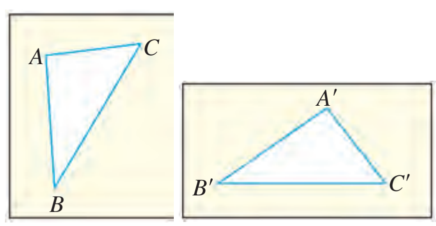
1. 下面各对图形是不是全等图形？为什么？

（1）边长都是10 cm的两个正方形.

（2）如图所示的两件衣服.

（第 1(2)题）

2. 如图，画在透明纸上的$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是全等图形吗？你是怎么判断的？



（第 2 题）

能够重合的两个三角形叫做**全等三角形**(congruent triangles).

两个全等三角形重合时，能互相重合的顶点叫做全等三角形的**对应顶点**，互相重合的边叫做全等三角形的**对应边**，互相重合的角叫做全等三角形的**对应角**. 如上面“做一做”第 2 题中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 全等，A 和 A'，B 和 B'，C 和 C' 分别是对应顶点；BC 和 $B'C'$，CA 和 $C'A'$，AB 和 $A'B'$ 分别是对应边，$\angle A$ 和 $\angle A'$，$\angle B$ 和 $\angle B'$，$\angle C$ 和 $\angle C'$ 分别是对应角.

注 意

用符号“≌”表示两个三角形全等时，通常把对应顶点的字母写在对应位置上.

“全等”可用符号“≌”来表示，如 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 全等，记做“$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$”，读做“三角形 ABC 全等于三角形 $A'B'C'$”.

例1 如图 1-18，$\triangle AOC$ 与 $\triangle BOD$ 全等. 用符号“≌”表示这两个三角形全等. 已知 $\angle A$ 与 $\angle B$ 是对应角，写出其余的对应角和各对对应边.

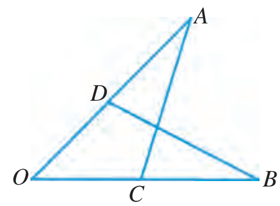


图 1-18

解 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

因为 $\angle A$ 与 $\angle B$ 是对应角，所以其余的对应角是：

$\angle AOC$ 与 $\angle BOD$，$\angle ACO$ 与 $\angle BDO$；

对应边是：OA 与 OB，OC 与 OD，AC 与 BD.

由全等三角形的定义可以得到下面的性质：

全等三角形的对应边相等，对应角相等.

例2 如图1-19，AD 平分 $\angle BAC$，$AB=AC$. $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 全等吗？BD 与 CD 相等吗？$\angle B$ 与 $\angle C$ 呢？先判断，并说明理由.

解 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$，$BD=CD$，

$\angle B=\angle C$.

理由如下：

由 AD 平分 $\angle BAC$，知 $\angle 1=\angle 2$.

因此，将图形(图1-19)沿 AD 对折时，射线 AC 与射线 AB 重合.

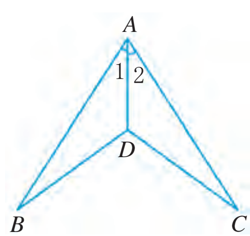


图1-19

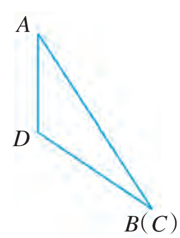


图1-20

$\because$ $AB=AC$，

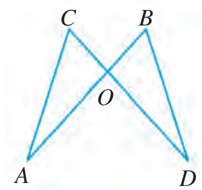
$\therefore$ 点 C 与点 B 重合，也就是 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABD$ 重合(图1-20)，

∴　$\triangle ABD \cong \triangle ACD$（全等三角形的定义）.

∴　$BD=CD$（全等三角形的对应边相等），

$\angle B=\angle C$（根据什么？）.

课内练习 KENEILIANXI

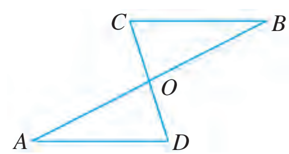


（第 2 题）

1. 半径相等的两个圆是全等图形吗？你是怎样知道的？

2. 如图，已知$\triangle AOC \cong \triangle DOB$. 说出它们的对应边和对应角.

作业题 ZUOYETI



（第 1 题）

A **1.** 如图，$\triangle OAD$ 与$\triangle OBC$ 全等，$\angle A$ 与$\angle B$ 是对应角. 找出其余的对应角和各对对应边，并用符号表示这两个三角形全等.

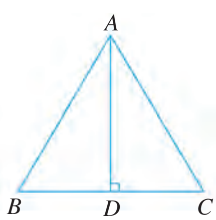

（第 2(2)题）

2. 判断下列说法是否正确，并简要说明理由.

（1）长和宽分别相等的长方形都是全等图形.

（2）一面中华人民共和国国旗上，四个小五角星都全等.

（3）两个全等三角形的面积相等.



（第 3 题）

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于点 D，$BD=CD$. 完成下面说明$\angle B=\angle C$ 的理由的过程（填空）.

解：　∵　$AD\perp BC$（已知），

∴　$\angle ADB=$________$=\text{Rt}\angle$（垂直的定义）.

当把图形沿 AD 对折时，射线 DB 与 DC________.

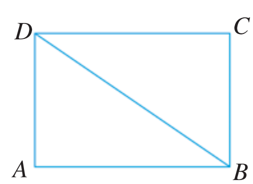
∵　$BD=CD$（________），

∴　点 B 与点________重合，

∴　$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$__________，

∴　$\triangle ABD$________$\triangle ACD$（全等三角形的定义），

∴　$\angle B=\angle C$（______________________________）.



（第 4 题）

B **4.** 如图，BD 是长方形 $ABCD$ 的一条对角线.

（1）$\triangle ABD$ 与$\triangle CDB$ 全等吗？你是怎样知道的？

（2）如果你认为$\triangle ABD$ 与$\triangle CDB$ 全等，请用符号表示，并说出它们的对应边和对应角.

1·5 三角形全等的判定

钱塘江大桥由著名桥梁工程师茅以升设计，建成于1937年，是我国第一座铁路、公路两用双层桥. 桥上有许多全等的三角形结构.

1

合作学习

按照下面的方法，用刻度尺和圆规在一张透明纸上画$\triangle DEF$，使其三边长分别为1.3 cm，1.9 cm和2.5 cm.

画法 如图1-21.

1. 画线段$EF=1.3$ cm.

2. 分别以点E，F为圆心，2.5 cm，1.9 cm长为半径画两条圆弧，交于点D(或D').

3. 连结DE，DF(或$D'E$，$D'F$).

$\triangle DEF$(或$\triangle D'EF$)即所求作的三角形.

把你画的三角形与其他同学所画的三角形进行比较，它们能互相重合吗?

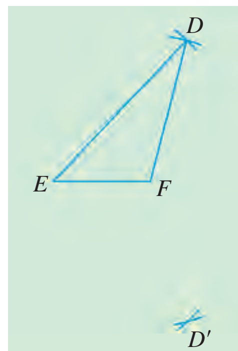


图1-21

一般地，我们有如下基本事实：

三边对应相等的两个三角形全等(简写成“**边边边**”或“SSS[1]”).

让我们动手做下面的实验：

如图1-22，把两根木条的一端用螺栓固定在一起，木条可以自由转动. 在转动过程中，连结另两个端点所成的三角形的形状、大小随之改变. 如果把另两个端点用螺栓固定在第三根木条上(图1-23)，那么构成的三角形的形状、大小就完全确定.

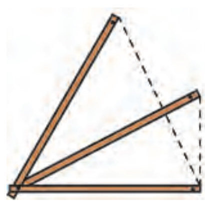


图1-22

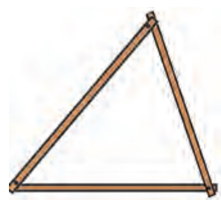


图1-23

[1] “S”是英文单词Side(边)的第一个字母.

从上述实验可以看出，当三角形的三条边长确定时，三角形的形状、大小完全被确定，这个性质叫做三角形的稳定性，这是三角形特有的性质.

三角形的稳定性在生产和日常生活中有广泛的应用. 例如，房屋的人字架、大桥的钢梁、起重机的支架(图 1-24)等，都采用三角形结构，以起到稳固的作用.

图 1-24

例1 已知：如图 1-25，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=CB$. 求证：$\angle A=\angle C$.

证明 在$\triangle ABD$ 和$\triangle CDB$ 中，

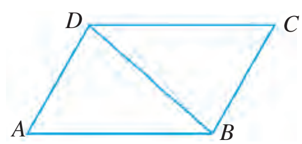


图 1-25

$$\because \begin{cases} AB=CD\ (\text{已知}), \\ AD=CB\ (\text{已知}), \\ BD=DB\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (SSS).

$\therefore$ $\angle A=\angle C$ (根据什么?).

例2 已知$\angle BAC$(图 1-26)，用直尺和圆规作$\angle BAC$ 的平分线 AD，并说出该作法正确的理由.

作法 如图 1-27.

1. 以点 A 为圆心，适当长为半径作圆弧，与角的两边分别交于 E，F 两点.

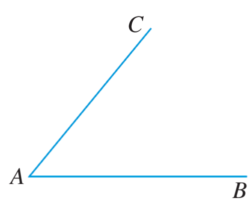


图 1-26

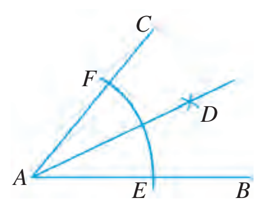


图 1-27

2. 分别以 E，F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 长为半径作圆弧，两条圆弧交于$\angle BAC$ 内一点 D.

3. 过点 A，D 作射线 AD.

射线 AD 就是所求作的$\angle BAC$ 的平分线.

事实上，如图 1-28，连结 DE，DF.

由作法可得 $\triangle ADF \cong \triangle ADE$（为什么？），

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$（全等三角形的对应角相等），

即 AD 平分 $\angle BAC$.

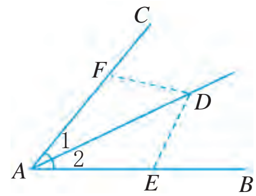
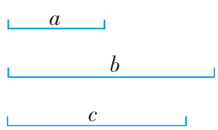


图 1-28

课内练习 KENEILIANXI



（第 1 题）

1. 如图，已知线段 a，b，c. 用直尺和圆规作 $\triangle ABC$，使 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$.

2. 如图，点 B，E，C，F 在同一条直线上，且 $AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 将下面证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 的过程补充完整.

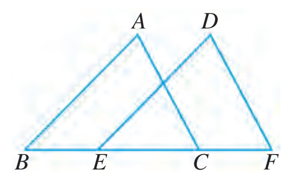
证明：$\because\ BE=CF(\qquad\qquad)$，

$\therefore\ BE+EC=CF+EC$，即 $BC=EF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\because \begin{cases} AB=\underline{\qquad}(\qquad\qquad), \\ \underline{\qquad}=DF(\qquad\qquad), \\ BC=\underline{\qquad}, \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle DEF(\qquad\qquad)$.



（第 2 题）

作业题 ZUOYETI

A

1. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是 BC 边上的中线. 求证：$AD \perp BC$（填空）.

证明：在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

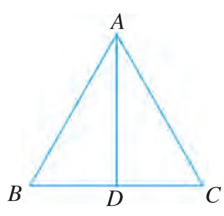
$$\because \begin{cases} BD=CD(\qquad\qquad\qquad), \\ AB=\underline{\qquad\quad}（已知）, \\ \underline{\qquad\quad}=\underline{\qquad\quad}（公共边）, \end{cases}$$

$\therefore\ \underline{\qquad\qquad} \cong \underline{\qquad\qquad}(\qquad\qquad)$.

$\therefore\ \angle ADB=\underline{\qquad\qquad}$（全等三角形的对应角相等）.

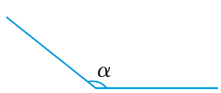
$\therefore\ \angle ADB=\dfrac{1}{2}\angle BDC=90^\circ$（平角的定义），

$\therefore\ AD \perp BC$（垂直的定义）.



（第 1 题）

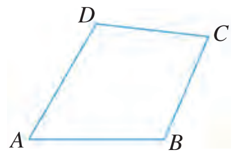
2. 已知 $\angle\alpha$（如图），用直尺和圆规作 $\angle\alpha$ 的平分线.



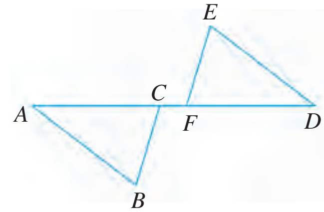
（第 2 题）

3. 举出两个应用三角形稳定性的实际例子.

B **4.** 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$CB=CD$. 你能通过添加辅助线,把它分成两个全等三角形吗? 若能,画出辅助线,并给出证明.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 已知:如图,$AB=DE$,$BC=EF$,$AF=DC$. 求证:$BC/\!/EF$.

2

如图 1-29,把两根木条的一端用螺栓固定在一起,木条可自由转动,因此连结另两端所成的三角形不能唯一确定, 这就是说,如果两个三角形只有两条边对应相等,那么这两个三角形不一定全等. 例如,图 1-29 中,$\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C$ 不是全等三角形.

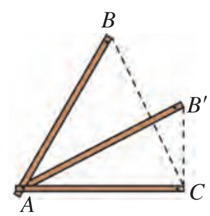


图 1-29

如果固定两木条之间的夹角(即 $\angle BAC$)的大小,那么 $\triangle ABC$ 的形状和大小也随之被确定.

如图 1-30, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle B=\angle B'$, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$. 因为 $\angle B=\angle B'$,当把它们叠在一起时,可以使射线 BA 与 $B'A'$ 重合,射线 BC 与 $B'C'$ 重合. 又因为 $AB=A'B'$,$BC=B'C'$,所以点 A 与点 A' 重合,点 C 与点 C' 重合, 所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 重合, 所以 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

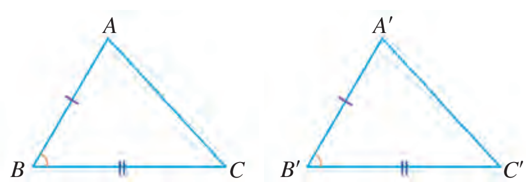


图 1-30

我们有如下基本事实:

两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(简写成"**边角边**"或"**SAS**[1]").

[1] "A"是英文单词 Angle(角)的第一个字母.

例3 已知：如图 1-31，AC 与 BD 相交于点 O，且 $OA=OC$，$OB=OD$.

求证：$\triangle AOB \cong \triangle COD$.

证明 在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

$$\because \begin{cases} OA=OC \text{（已知）}, \\ \angle AOB=\angle COD \text{（对顶角相等）}, \\ OB=OD \text{（已知）}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AOB \cong \triangle COD$（SAS）.

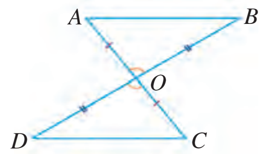
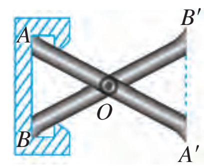


图 1-31

做一做 ZUOYIZUO

如图，把两根钢条 AA'，BB' 的中点连在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的卡钳. 说明卡钳的工作原理.



垂直于一条线段，并且平分这条线段的直线叫做这条线段的**垂直平分线**，简称**中垂线**. 如图 1-32，直线 $l \perp AB$ 于点 D，且 $AD=BD$，直线 l 就是线段 AB 的垂直平分线.

在直线 l 上任意取一点 P，用圆规比较点 P 到点 A，B 的距离. 你发现了什么？

（请与你的同伴交流）

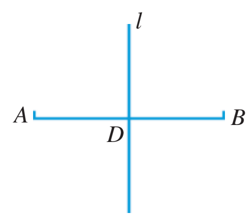


图 1-32

关于线段的垂直平分线，有如下的性质定理：

线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

下面给出证明.

已知：如图 1-33，直线 $l \perp AB$ 于点 O，且 $OA=OB$. C 是直线 l 上的任意一点.

求证：$CA=CB$.

证明 已知 $OA=OB$，当点 C 与点 O 为同一点，即重合时，显然 $CA=CB$.

当点 C 与点 O 不重合时，

$\because$ 直线 $l \perp AB$（已知），

$\therefore$ $\angle COA=\angle COB=90°$（垂直的定义）.

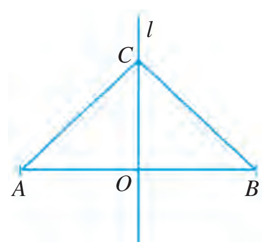


图 1-33

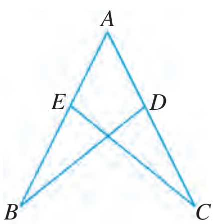
在$\triangle CAO$与$\triangle CBO$中,

$$\because \begin{cases} OA=OB\text{(已知)}, \\ \angle COA=\angle COB, \\ OC=OC\text{(公共边)}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle CAO \cong \triangle CBO$($SAS$).

$\therefore$ $CA=CB$(全等三角形的对应边相等).

课内练习 KENEILIANXI



(第1题)

1. 已知:如图,$AB=AC$,点D,E分别在AC,AB上,且$AD=AE$.

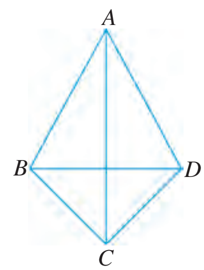
求证:$BD=CE$(填空).

证明:在$\triangle ABD$和________中,

$$\because \begin{cases} AD=\_\_\_\_\_\_\text{(已知)}, \\ \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\text{(公共角)}, \\ AB=AC\text{(\qquad)}, \end{cases}$$

$\therefore$ ________$\cong$________ (   ),

$\therefore$ $BD=CE$ (   ).



(第2题)

2. 已知:如图,AC是线段BD的垂直平分线.

求证:$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

3. 如果两个三角形有两边和一个角对应相等,那么这样的两个三角形一定全等吗? 请说明理由.

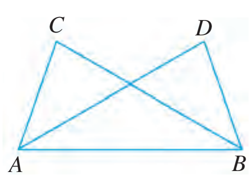
作业题 ZUOYETI

A **1.** 在$\triangle ABC$中,$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$,$AC=2\,\mathrm{cm}$,$BC=2.5\,\mathrm{cm}$. 用三角尺作$\triangle ABC$.

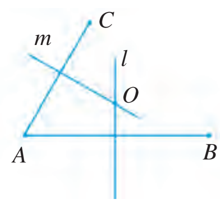
2. 已知:如图,$AC=BD$,$\angle CAB=\angle DBA$. 求证:

(1) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$.

(2) $BC=AD$,$\angle C=\angle D$.



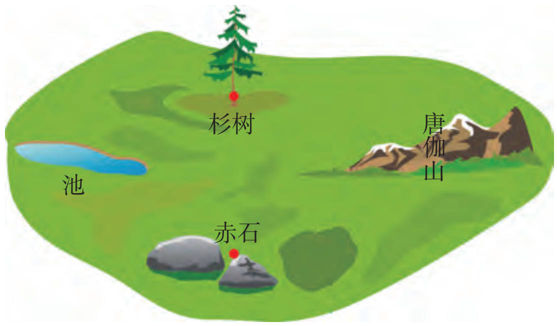
(第2题)



(第3题)

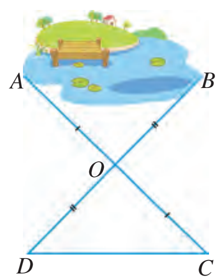
3. 已知:如图,直线l和直线m分别是线段AB和线段AC的垂直平分线,O为交点. 求证:点O到点A,B,C的距离相等.

B **4.** 有一段关于古代藏宝图的记载(如图):“从赤石向一棵杉树笔直走去,恰好在其连线中点处向右转 90°前进,到达唐伽山山脚的一个洞穴,宝物就在洞穴中.”怎样根据这段记载找到藏宝洞穴的位置?在图上标出藏宝洞穴的位置.



(第 4 题)

5. 为了测出池塘两端 A,B 的距离,小红在地面上选择了点 O,D,C,使 $OA=OC$,$OB=OD$,且点 A,O,C 和点 B,O,D 分别都在一条直线上.小红认为只要量出 D,C 的距离,就能知道 A,B 的距离.你认为正确吗?请说明理由.



(第 5 题)

3

下面我们继续探索判定两个三角形全等的方法.

合作学习

有两个角和它们的夹边对应相等的两个三角形一定全等吗?用量角器和刻度尺画 $\triangle ABC$,使 $BC=3\text{ cm}$,$\angle B=40°$,$\angle C=60°$.将你画的三角形与其他同学画的三角形比较,你发现了什么?

一般地，我们有如下基本事实：

两个角及其夹边对应相等的两个三角形全等（简写成“**角边角**”或“*ASA*”）.

如图 1-34，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$BC=B'C'$，则$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

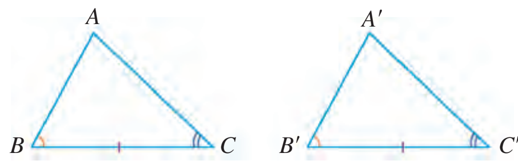


图 1-34

例4　已知：如图 1-35，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle E$，$AC=AE$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADE$.

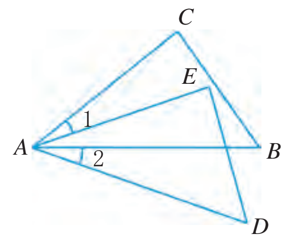


图 1-35

证明　$\because$　$\angle 1=\angle 2$（已知），

$\therefore$　$\angle 1+\angle BAE=\angle 2+\angle BAE$，

即$\angle BAC=\angle DAE$.

在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中，

$$\because \begin{cases}\angle BAC=\angle DAE,\\ AC=AE\text{（已知）},\\ \angle C=\angle E\text{（已知）},\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ABC\cong\triangle ADE$（ASA）.

例5　已知：如图 1-36，点 B，F，E，C 在同一条直线上，$AB\parallel CD$，且$AB=CD$，$\angle A=\angle D$. 求证：$AE=DF$.

分析　要证明 $AE=DF$，可以通过证明$\triangle ABE\cong\triangle DCF$来实现.

证明　$\because$　$AB\parallel CD$（已知），

$\therefore$　$\angle B=\angle C$（两直线平行，内错角相等）.

在$\triangle ABE$和$\triangle DCF$中，

$$\because \begin{cases}\angle A=\angle D\text{（已知）},\\ AB=DC\text{（已知）},\\ \angle B=\angle C,\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ABE\cong\triangle DCF$（ASA）.

$\therefore$　$AE=DF$（全等三角形的对应边相等）.

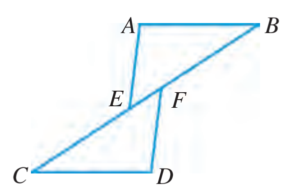
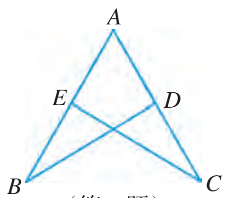


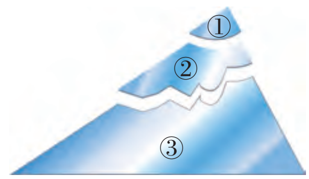
图 1-36

课内练习 KENEILIANXI



（第 2 题）

1. 一块三角形玻璃被摔成三片（如图）. 只需带上其中的一片，玻璃店的师傅就能重新配一块与原来相同的三角形玻璃. 你知道应带哪一片碎玻璃吗？请说明理由.



（第 1 题）

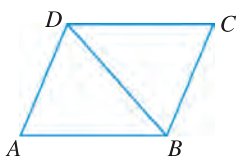
2. 已知：如图，点 D，E 分别在 AC，AB 上，$\angle B=\angle C$，$AB=AC$. 求证：$AE=AD$.

作业题 ZUOYETI

A 1. 根据所给条件，下列各题中的两个三角形一定全等吗？若不一定，请画出两个符合所给条件，但不全等的三角形.

（1）$\triangle ABC$ 和 $\triangle MNP$ 中，$\angle A=\angle M$，$AB=MN$.

（2）$\triangle RST$ 和 $\triangle XYZ$ 中，$\angle R=\angle X$，$\angle S=\angle Y$，$\angle T=\angle Z$.

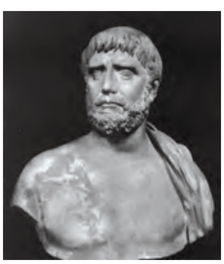


（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB\parallel CD$，$AD\parallel CB$. 求证：$\triangle ABD\cong\triangle CDB$.

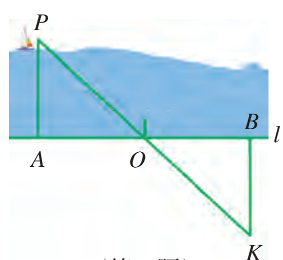
3. 阅读下面一段文字：

泰勒斯（Thales，约公元前625～前547年）是古希腊哲学家. 相传“两个角及其夹边对应相等的两个三角形全等”就是由泰勒斯首先提出的. 泰勒斯利用这个判定三角形全等的依据求出了岸上一点到海中一艘船的距离.


泰勒斯

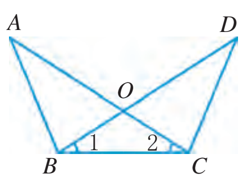
如图，A 是观察点，船 P 在 A 的正前方. 过 A 作 AP 的垂线 l，在垂线 l 上截取任意长 AB，O 是 AB 的中点. 观测者从点 B 沿垂直于 AB 的 BK 方向走，直到点 K、船 P 和点 O 在一条直线上，那么 BK 的距离即为船离岸的距离.

请给出证明.



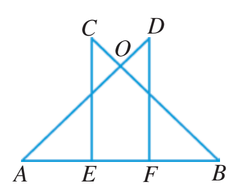
（第 3 题）

B 4. 已知：如图，AC 与 DB 相交于点 O，$\angle 1=\angle 2$，$\angle ABC=\angle DCB$. 求证：$AB=DC$.



（第 4 题）

5. 已知：如图，A，E，F，B 在同一条直线上，$CE\perp AB$，$DF\perp AB$，$AE=BF$，$\angle A=\angle B$. 求证：$CE=DF$.



（第 5 题）

用来判定两个三角形全等还有以下定理:

两角及其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等(简写成"**角角边**"或"AAS").

下面给出证明.

已知:如图 1-37,在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,$\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$,$BC=B'C'$.求证:$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

证明 $\because$ $\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$(已知),

$\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'=180°$(根据什么?),

$\therefore$ $\angle C=\angle C'$.

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,

$$\because\begin{cases}\angle B=\angle B'(\text{已知}),\\ BC=B'C'(\text{已知}),\\ \angle C=\angle C',\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'(ASA)$.

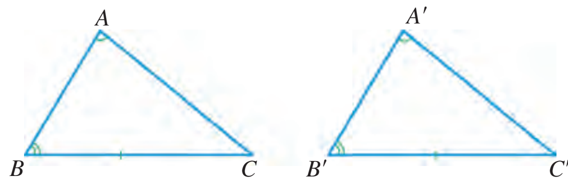


图 1-37

例6 已知:如图1-38,P是$\angle BAC$的平分线上的一点,$PB\perp AB$于点B,$PC\perp AC$于点C.求证:$PB=PC$.

证明 $\because$ $PB\perp AB$, $PC\perp AC$(已知),

$\therefore$ $\angle ABP=\angle ACP=\text{Rt}\angle$(垂线的定义).

在$\triangle APB$和$\triangle APC$中,

$$\because\begin{cases}\angle PAB=\angle PAC\ (\text{角平分线的定义}),\\ \angle ABP=\angle ACP,\\ AP=AP\ (\text{公共边}),\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle APB\cong\triangle APC$ (AAS).

$\therefore$ $PB=PC$(根据什么?).

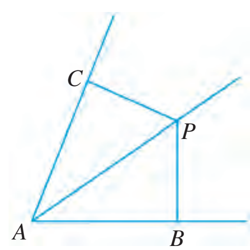


图 1-38

由例 6 可得角平分线的性质定理:

角平分线上的点到角两边的距离相等.

例7 已知：如图 1-39，$AB /\!/ CD$，PB 和 PC 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle DCB$，AD 过点 P，且与 AB 垂直. 求证：$PA = PD$.

分析 由 $AB /\!/ CD$，$AD \perp AB$，可得 $AD \perp CD$，则 PA，PD 的长分别是点 P 到 AB，CD 的距离. 根据角平分线的性质定理知，它们与点 P 到 BC 的距离相等. 因此，可先作出点 P 到 BC 的垂线段.

证明 如图 1-39，作 $PE \perp BC$ 于点 E.

$\because$ $AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore$ $\angle BAD + \angle CDA = 180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

$\because$ $AD \perp AB$（已知），

$\therefore$ $\angle BAD = 90°$（垂直的定义）.

$\therefore$ $\angle CDA = 180° - \angle BAD = 180° - 90° = 90°$.

$\therefore$ $AD \perp CD$（垂直的定义）.

$\because$ PB 平分 $\angle ABC$（已知），

$\therefore$ $PA = PE$（角平分线上的点到角两边的距离相等）.

同理，$PD = PE$.

$\therefore$ $PA = PE = PD$.

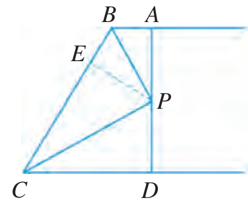
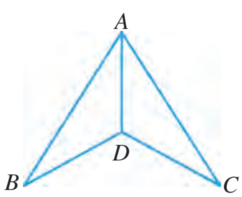


图 1-39

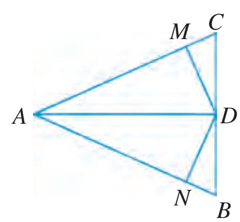
课内练习 KENEILIANXI



（第 1 题）

1. 已知：如图，AD 平分 $\angle BAC$，$\angle B = \angle C$.
求证：$BD = CD$.

2. 已知：如图，AD 垂直平分 BC，D 为垂足. $DM \perp AC$，$DN \perp AB$，M，N 分别为垂足. 求证：$DM = DN$.



（第 2 题）

探究活动 TANJIUHUODONG

如图 1-40，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，B，E，C，F 在同一条直线上. 下面给出四个论断：

①$AB = DE$；　　②$AC = DF$；

③$\angle ABC = \angle DEF$；　④$BE = CF$.

任选三个作为已知条件，余下一个作为结论，可得到几个命题？其中真命题有几个？分别给出证明.

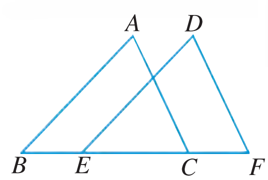
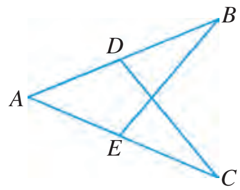


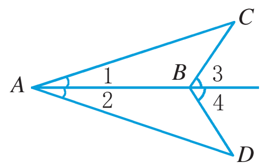
图 1-40

作业题 ZUOYETI

A 1. 已知：如图，$\angle B=\angle C$，$AD=AE$. 求证：$CD=BE$.



（第 1 题）

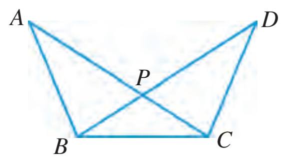


（第 2 题）

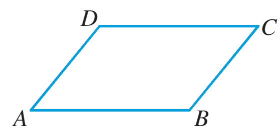
2. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证：$AC=AD$.

3. 证明：三角形的两条角平分线的交点到各边的距离相等.

B 4. 已知：如图，$\triangle ABC\cong\triangle DCB$. 求证：$AP=DP$，$BP=CP$.



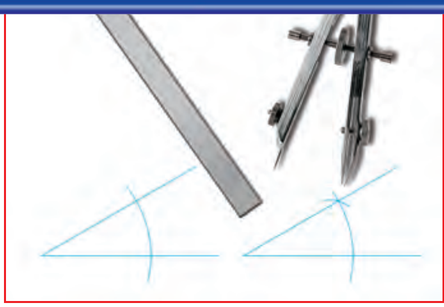
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 已知：如图，$AB/\!/CD$，$\angle A=\angle C$. 求证：$AD=BC$.

1·6 尺规作图



据传为了显示谁的逻辑思维能力更强，古希腊人限制了几何作图的工具，结果一些普通的画图题让数学家苦苦思索了两千多年. 尺规作图特有的魅力，使无数人沉湎其中.

我们已经学习过用直尺和圆规作一条线段等于已知线段及作一个角的平分线. 在几何作图中，我们把用没有刻度的直尺和圆规作图，简称**尺规作图**

(ruler and compass construction). 本节我们将继续学习用直尺和圆规作一个角等于已知角、作一条线段的垂直平分线等基本尺规作图[1],以及用基本尺规作图作三角形.

例1 已知$\angle AOB$(图 1-41),求作$\angle A'O'B'$,使$\angle A'O'B'=\angle AOB$.

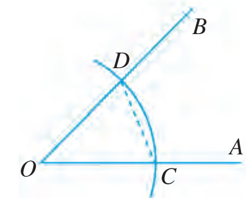


图 1-41

作法 1. 以点 O 为圆心,适当长为半径作弧,分别交 OA,OB 于点 C,D(图 1-41).

2. 作一条射线 $O'A'$. 以点 O'为圆心,OC 长为半径作弧 l,交 $O'A'$于点 C'(图 1-42).

3. 以点 C'为圆心,CD 长为半径作弧,交弧 l 于点 D'.

4. 过点 O',D'作射线 $O'B'$.

$\angle A'O'B'$就是所求作的角.

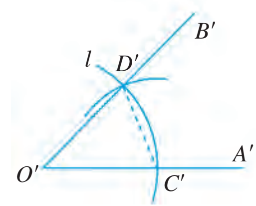


图 1-42

事实上,如图 1-41 和图 1-42,连结 CD,$C'D'$.

在$\triangle OCD$与$\triangle O'C'D'$中,

$$\because \begin{cases} OC=O'C' \text{ (作法)}, \\ OD=O'D' \text{ (作法)}, \\ CD=C'D' \text{ (作法)}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle OCD\cong\triangle O'C'D'$ (SSS).

$\therefore$ $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

例2 已知线段 AB,用直尺和圆规作线段 AB 的垂直平分线.

分析 要作线段 AB 的垂直平分线,只需找出线段 AB 的垂直平分线上的两个点,这由线段垂直平分线上的点的性质不难找出.

作法 如图 1-43.

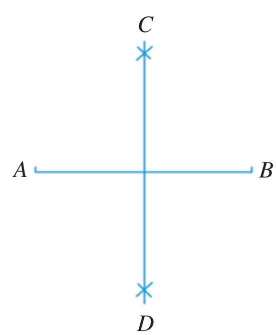


图 1-43

[1] 本套教科书涉及的基本尺规作图包括:作一条线段等于已知线段;作一个角等于已知角;作一个角的平分线;作一条线段的垂直平分线;过一点作已知直线的垂线.

1. 分别以点 A,B 为圆心,大于线段 AB 长度一半的长为半径作弧,相交于点 C,D.

2. 过点 C,D 作直线 CD.

直线 CD 就是线段 AB 的垂直平分线.

想一想

你能根据作法证明直线 CD 是线段 AB 的垂直平分线吗?

下面以例说明怎样用直尺和圆规作适合某种条件的三角形.

例3 已知 $\angle\alpha$, $\angle\beta$ 和线段 a(图 1-44), 用直尺和圆规作 $\triangle ABC$,使 $\angle A=\angle\alpha$, $\angle B=\angle\beta$, $AB=a$.

作法 如图 1-45.

1. 作一条线段 $AB=a$.

2. 分别以 A,B 为顶点,在 AB 的同侧作 $\angle DAB=\angle\alpha$, $\angle EBA=\angle\beta$, DA 与 EB 相交于点 C.

$\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.

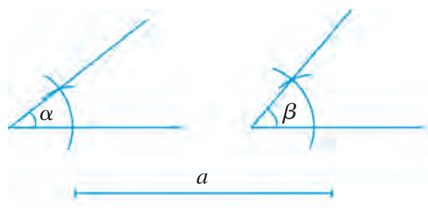


图 1-44

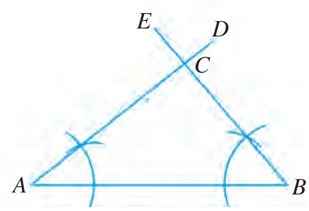


图 1-45

课内练习 KENEILIANXI

1. 完成下面的尺规作图.

(1) 如图, 已知 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$, 用直尺和圆规作 $\angle ABC$, 使 $\angle ABC=\angle\alpha+\angle\beta$.

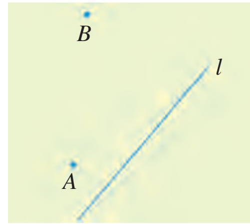
(第 1(1)题)

(第 1(2)题)

(2) 如图,已知线段 a,c 和 $\angle\alpha$,用直尺和圆规作 $\triangle ABC$,使 $\angle ABC=\angle\alpha$, $AB=c$, $BC=a$.

2. 我们会用三角尺过已知直线外一点作已知直线的垂线. 你能用直尺和圆规完成这一作图吗? 若能,说出你的作法.

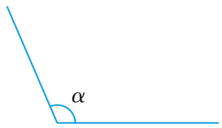
3. 如图，直线 l 表示一条公路，点 A，B 表示两个村庄. 现要在公路 l 上建一个加油站，并使加油站到两个村庄 A，B 的距离相等. 加油站应建在何处？在图上标出加油站的位置，并说明理由.



（第 3 题）

作业题 ZUOYETI

A 1. 已知$\angle\alpha$（如图），用直尺和圆规作$\angle A=\angle\alpha$.

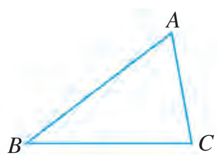


（第 1 题）

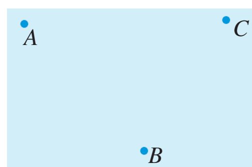
（第 2 题）

2. 已知线段 AB（如图），用直尺和圆规平分线段 AB.

3. 已知$\triangle ABC$（如图），用三种不同的方法作$\triangle PRS$，使$\triangle PRS\cong\triangle ABC$. 你认为哪一种作法比较简便？



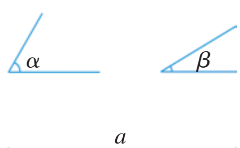
（第 3 题）



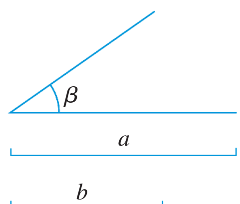
（第 4 题）

4. 有 A，B，C 三农户准备一起挖一口井，使它到三农户家的距离相等. 这口井应挖在何处？在图中标出井的位置，并说明理由.

B 5. 如图，已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$ 和线段 a. 求作$\triangle ABC$，使$\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$，$BC=a$.



（第 5 题）



（第 6 题）

C 6. 已知$\angle\beta$和线段 a，b（如图）. 用直尺和圆规作$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle\beta$，$BC=a$，$AC=b$. 这样的三角形能作几个？

小结

XIAOJIE

填空.

1. 由不在同一条直线上的三条线段__________所组成的图形叫做三角形.

2. 三角形三个内角的和等于______.

三角形任何两边的和______第三边.

三角形的外角等于与它不相邻的两个______的和.

3. 能够______的两个图形称为全等图形,能够重合的两个三角形叫做______.全等三角形的_____边相等,_____角相等.

4. 关于三角形全等的基本事实:

________对应相等的两个三角形全等(简写成"________"或"SSS");两边及其________对应相等的两个三角形全等(简写成"边角边"或"________");两个角及其__________对应相等的两个三角形全等(简写成"________"或"ASA").

两个三角形全等的判定定理:两角及其中一个角的________对应相等的两个三角形全等(简写成"角角边"或"______").

5. 线段垂直平分线的性质定理:线段垂直平分线上的点到线段________的距离相等.

角平分线的性质定理:角平分线上的点到角两边的________相等.

6. 能清楚地规定某一名称或术语的意义的句子叫做该名称或术语的______.判断某一件事情的句子叫做_______.正确的命题称为______,__________的命题称为假命题.

7. 用______的方法判断为正确的命题叫做定理.定理可以作为判断其他命题真假的依据.

8. 要判定一个命题是真命题,往往需要从命题的条件出发,根据已知的定义、基本事实、定理(包括推论),一步一步地推得结论成立,这样的推理过程叫做______.

要说明一个命题是假命题,通常可以通过______的方法.命题的反例是具备命题的条件,但不具备命题的______的实例.

9. 我们把用没有________的直尺和圆规作图,称为尺规作图.

填表.

技能内容	学会程度		
	学会	基本学会	不会
判定两个三角形全等			
判定线段相等,角相等			
证明一个命题是真命题			
举反例判断一个命题是错误的			
基本尺规作图			
应用基本尺规作图作三角形			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 1.1节 1.3节

● 理解三角形的有关概念，会用符号和字母表示三角形. 会对三角形进行分类.

● 掌握“三角形任何两边的和大于第三边”的性质.

● 掌握三角形的内角和外角的性质，会用这些性质解决有关角度的大小比较和计算的一些简单问题.

1. 下列各组数不可能是一个三角形的边长的是(　　)

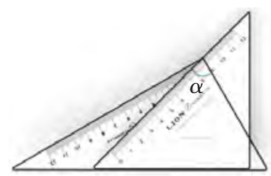
（A）5，12，13.　　（B）5，7，7.

（C）5，7，12.　　（D）101，102，103.

2. 一幅三角板，按如图所示叠放在一起，则图中$\angle\alpha$的度数是(　　)

（A）75°.　　（B）65°.

（C）60°.　　（D）55°.



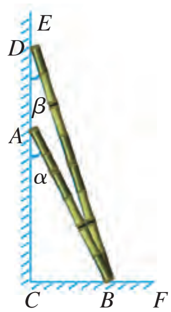
（第 2 题）

3. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$是哪一类三角形：

（1）有一个角是直角.

（2）有一个外角是锐角.

（3）三个内角的度数之比为 3∶4∶5.



（第 4 题）

4. 如图，两根竹竿 AB 和 BD 斜靠在墙 CE 上，量得$\angle CAB$，$\angle CDB$的度数分别为α，β. 求$\angle DBF$和$\angle ABD$的度数.

目标B 1.1节

● 理解三角形的中线、角平分线和高线的概念.

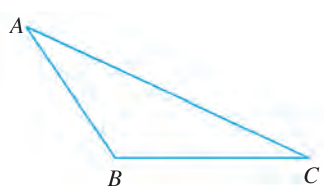
● 会用量角器、三角尺等工具画三角形的中线、角平分线和高线.

5. 已知$\triangle ABC$（如图）.

（1）用刻度尺画 AC 边上的中线.

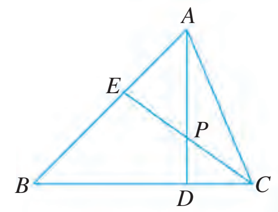
（2）用量角器画$\angle B$的平分线.

（3）用三角尺画 BC 边上的高线.



（第 5 题）

6. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的高线，CE是一条角平分线，它们相交于点P. 已知$\angle APE=55^\circ$，$\angle AEP=80^\circ$. 求$\triangle ABC$的各个内角的度数.



（第 6 题）

目标C 1.2 节

●了解定义、命题、基本事实、定理、推论的意义.

●会区分命题的条件和结论.

●会在简单情况下判别一个命题的真假.

●了解反例的作用，知道利用反例可以判断一个命题是错误的.

7. 阅读下文，并从中摘出定义和命题：

在大气中，水蒸气、二氧化碳和其他一些气体的作用与玻璃窗类似. 这些气体允许太阳光到达地面，但是阻止热量从地球表面逃逸. 这种保持地球表面热能的作用，称为温室效应.如果没有温室效应，地球就会变冷，平均温度大约将下降33℃.

8. 下列语句中，哪些是命题？ 哪些不是命题？

（1） 角平分线上的点到角两边的距离相等.

（2） 生活在水里的动物是鱼.

（3） 作两条相交直线.

（4） $\angle\alpha$和$\angle\beta$相等吗？

（5） 全等三角形的对应边相等.

（6） 三个角对应相等的两个三角形全等.

（7） 画线段$AB=2$ cm.

9. 下列说法正确的是（　　）

（A）命题一定是正确的.

（B） 不正确的判断就不是命题.

（C） 定理都是真命题.

（D） 基本事实不一定是真命题.

10. 下列各命题是真命题还是假命题？ 请说明理由.

（1） 两个锐角的和是锐角.

（2） 等角的余角相等.

（3） 在同一平面内，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

（4） 对于不为零的实数c，关于x的方程$x+\dfrac{c}{x}=c+1$的根是c.

目标D 1.3节

●知道证明的意义和证明的必要性，知道证明要合乎逻辑，知道证明的过程可以有不同的表达形式，学会综合法证明的格式.

11. 先观察猜想结论，再动手验证.

（1）如图，圆 M 和圆 N 哪个大？

（2）如图，l，m 两条线是否为直线？

（第 11 题）

12. 观察下面的等式是否成立：

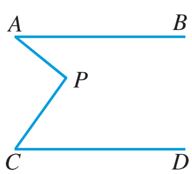
$$1\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}.$$

你获得怎样的猜想？你将用什么方法来判断你的猜想是否正确？



（第 13 题）

13. 已知：如图，$AB/\!/CD$.

求证：$\angle A+\angle C=\angle APC$.

14. 求证命题“两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么内错角相等”.

15. 判断下列命题的真假，并给出证明.

（1）若 $a>b$，则 $a^2>b^2$.

（2）三角形一条边上的中点到另两边的距离相等.

目标E 1.4节 1.5节

●了解全等图形的概念.

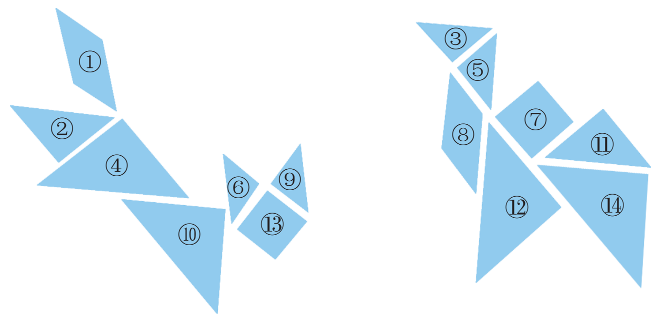
●理解全等三角形的概念，能识别全等三角形中的对应边和对应角.

●掌握基本事实：三边对应相等的两个三角形全等；两边及其夹角对应相等的两个三角形全等；两个角及其夹边对应相等的两个三角形全等.

●掌握定理：两角及其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等.

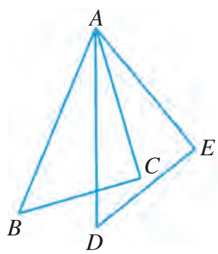
●掌握性质：全等三角形的对应边相等，对应角相等.

16. 下列图形由七巧板拼成，找出这些拼板中的全等图形，用它们的编号表示出来.



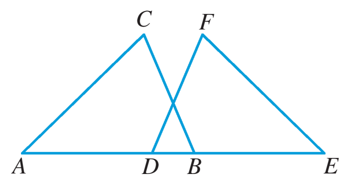
（第 16 题）

17. 已知：如图，$\angle BAD=\angle CAE$，$AB=AD$，$AC=AE$.
求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADE$.



（第 17 题）

18. 已知：如图，点 A，D，B，E 在同一条直线上，$AC=EF$，$AD=BE$，$BC=DF$. 求证：$\angle ADF=\angle EBC$.

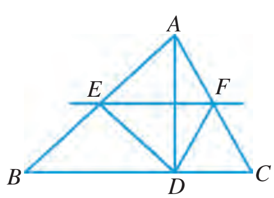


（第 18 题）

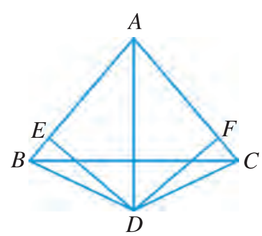
目标F
1.5 节 1.6 节

- 理解线段垂直平分线的概念. 掌握线段垂直平分线的性质定理.
- 掌握角平分线的性质定理.
- 了解尺规作图. 能用尺规完成以下基本作图：作一个角等于已知角，作一条线段的垂直平分线，作一个角的平分线.
- 会利用基本尺规作图作三角形.

19. 已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的高线，AD 的垂直平分线分别交 AB，AC 于点 E，F. 求证：$\angle B=\dfrac{1}{2}\angle AED$.



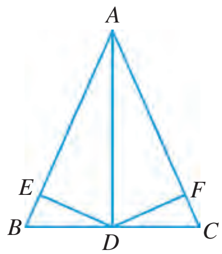
（第 19 题）



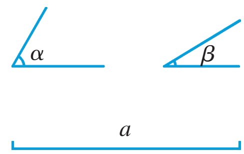
（第 20 题）

20. 已知：如图，AD 是BC 的垂直平分线，$DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F. 求证：$DE=DF$.

21. 已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，$BE = CF$. 求证：AD 是 BC 的中垂线.



（第 21 题）



（第 22 题）

22. 如图，已知 $\angle\alpha$，$\angle\beta$，线段 a. 完成下面的尺规作图：

（1）$\angle\alpha - \angle\beta$.

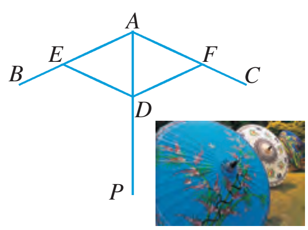
（2）$\triangle ABC$，使 $\angle A = \angle\alpha$，$\angle B = \angle\beta$，$AB = a$.

（3）线段 a 的垂直平分线.

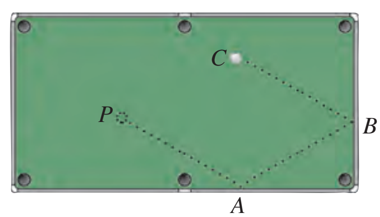
目标G

●会运用三角形以及相关知识解决简单的实际问题.

23. 我国纸伞的制作工艺十分巧妙. 如图，伞不管是张开还是收拢，伞柄 AP 始终平分同一平面内两条伞骨所成的角 $\angle BAC$，且 $AE = AF$，$DE = DF$，从而保证伞圈 D 能沿着伞柄滑动. 你能证明点 D 必定在 AP 上吗？



（第 23 题）



（第 24 题）

24. 台球运动中，如果母球 P 击中桌边点 A，经桌边反弹击中相邻的另一条桌边，再次反弹，那么母球 P 经过的路线 BC 与 PA 平行吗？证明你的判断.

第 2 章

特殊三角形

目录 CONTENTS<<

等腰三角形和直角三角形这两种特殊三角形有许多有趣的性质，这些性质使得它们有着宽泛的应用领域，特别是在建筑物的设计中. 本章将学习等腰三角形和直角三角形的性质和判定，勾股定理，直角三角形全等的判定，图形的轴对称，逆命题和逆定理，以及它们的一些简单应用.

2·1 图形的轴对称

北京故宫建成于1420年，整个宫殿建筑布局沿中轴线向东西两侧展开，呈现轴对称的结构。由于轴对称给人以美感，它被广泛应用于建筑设计上。

小学里我们已经学过，如果把一个图形沿着一条直线折叠后，直线两侧的部分能够互相重合，那么这个图形叫做**轴对称图形**(axial symmetric figure)，这条直线叫做**对称轴**(axis of symmetry)。例如，长方形是有两条对称轴的轴对称图形，如图2-1；正方形是有四条对称轴的轴对称图形，如图2-2；圆也是轴对称图形，任何过圆心的直线都是它的对称轴，如图2-3。

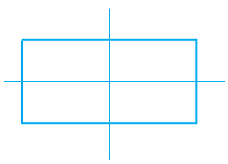


图 2-1

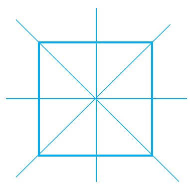


图 2-2

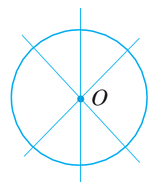
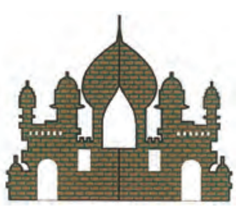


图 2-3

合作学习

1. 下列图形是轴对称图形吗？你是怎样判别的？

①



②

③

④

图 2-4

对于以上各轴对称图形，你能找出对称轴吗？有哪些方法？

2. 如图 2-5，AD 平分$\angle BAC$，$AB=AC$.

(1) 四边形 $ABDC$ 是轴对称图形吗？如果你认

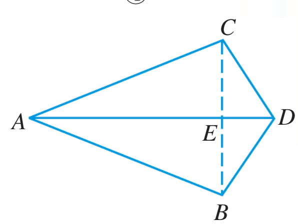


图 2-5

为是，说出它的对称轴. 哪一个点与点 B 对称?

（2）如图 2-5，连结 BC，交 AD 于点 E. 把四边形 $ABDC$ 沿 AD 对折，BE 与 CE 重合吗? $\angle AEB$ 与 $\angle AEC$ 呢? 由此你得到什么结论?

轴对称图形有下面的性质：

对称轴垂直平分连结两个对称点的线段.

例1 如图 2-6，已知 $\triangle ABC$ 和直线 m. 以直线 m 为对称轴，求作以点 A,B,C 的对称点 A',B',C' 为顶点的 $\triangle A'B'C'$.

分析 如图 2-7，根据“对称轴垂直平分连结两个对称点的线段”的性质，直线 m 垂直平分线段 AA'，所以只要过点 A 作直线 m 的垂线段 AP，延长 AP 至 A'，使 $A'P=AP$，则 A' 便是点 A 的对称点. 类似地，可以作出点 B，C 的对称点 B',C'.

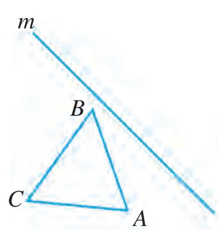


图 2-6

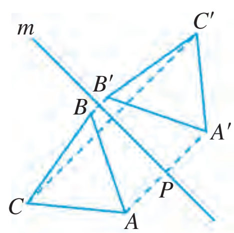


图 2-7

解 如图 2-7.

1. 作 $AP\perp m$，延长 AP 至 A'，使 $A'P=AP$.
2. 按上述方法作出点 B 的对称点 B'，点 C 的对称点 C'.
3. 依次连结 $A'B',B'C',C'A'$.

$\triangle A'B'C'$ 就是所求作的三角形.

如果把图 2-7 沿直线 m 折叠，那么 $\triangle A'B'C'$ 就和 $\triangle ABC$ 重合，这时我们说 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 关于直线 m 成轴对称.

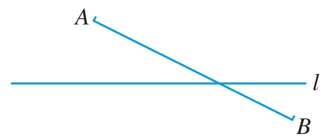
一般地，由一个图形变为另一个图形，并使这两个图形沿某一条直线折叠后能够互相重合，这样的图形改变叫做图形的**轴对称**（line symmetry），这条直线叫做**对称轴**.

图形的轴对称有下面的性质:

成轴对称的两个图形是全等图形.

做一做 ZUOYIZUO

1. 如图，已知线段 AB 和直线 l. 以直线 l 为对称轴，作与线段 AB 成轴对称的图形.



（第 1 题）

2. 如图,已知直角三角形 ABC.

（1）以直角边 AC 所在的直线为对称轴,作出与直角三角形 ABC 成轴对称的图形.

（2）第(1)题作出的图形和原图形组成一个等腰三角形吗？请说明理由.

（第 2 题）

例 2 如图 2-8,直线 l 表示草原上的一条河流. 一骑马少年从 A 地出发,去河边让马饮水,然后返回位于 B 地的家中. 他沿怎样的路线行走,能使路程最短?作出这条最短路线.

分析 如图 2-8,设 P 是直线上任意一点,连结 AP,BP. 以直线 l 为对称轴,作与线段 AP 成轴对称的线段 $A'P$,则 $AP+BP=A'P+BP$. 显然,当点 A',P,B 同在一直线上时,$A'P+BP$ 最短,即路程最短.

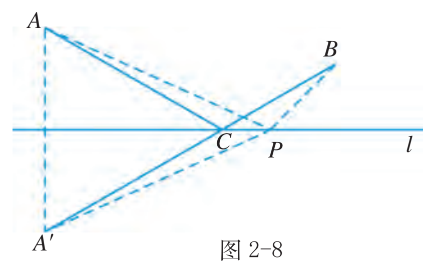


图 2-8

解 如图 2-8,作点 A 关于直线 l 的对称点 A',连结 $A'B$,交直线 l 于点 C,连结 AC. 骑马少年沿折线 $A-C-B$ 的路线行走时路程最短.

下面给出证明:

设 P 是直线 l 上任意一点,连结 AP,$A'P$.

由作图知,直线 l 垂直平分 AA',

则 $AC=A'C$,$AP=A'P$ (线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等).

$\therefore \quad AP+BP=A'P+BP\geqslant A'B$,

$A'B=A'C+BC=AC+BC$,

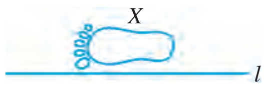
即 $AP+BP\geqslant AC+BC$,

所以沿折线 $A-C-B$ 的路线行走时路程最短.

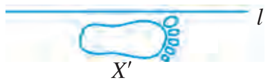
课内练习 KENEILIANXI

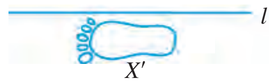
1. 线段、角是轴对称图形吗？如果你认为是轴对称图形，分别说出它们的对称轴.

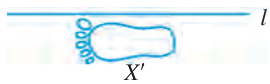
2. 如图，已知图形 X 和直线 l. 以直线 l 为对称轴，图形 X 的轴对称图形是(　　)

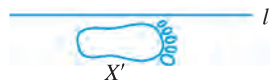


（第 2 题）

(A) 

(B) 

(C) 

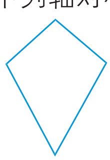
(D) 

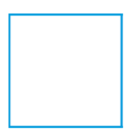
3. 这是一幅印度著名建筑泰姬陵的图片. 从这幅图片中，你观察到哪些图形成轴对称？

（第 3 题）

作业题 ZUOYETI

A **1.** 作出下列轴对称图形的所有对称轴.

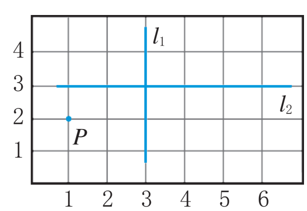
(1) 

(2) 

(3) 

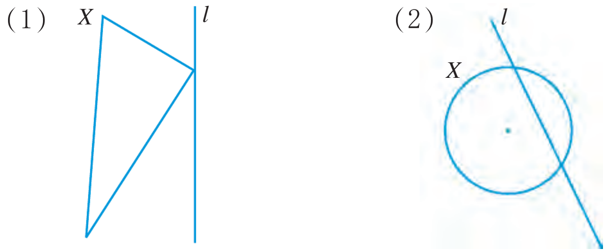
（第 1 题）

2. 如图，以直线 l_1 为对称轴，作点 P 的对称点 P_1；以直线 l_2 为对称轴，作点 P 的对称点 P_2.



（第 2 题）

3. 如图,以直线l 为对称轴,作与所给图形 X 成轴对称的图形.



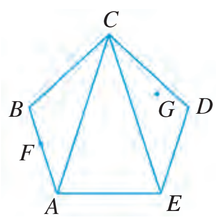
(第 3 题)

4. 如图,五边形 $AEDCB$ 是轴对称图形,作出它的对称轴,并解答下列问题:

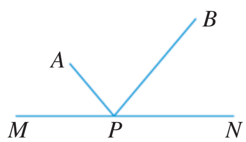
(1) 连结 BD,则对称轴和线段 BD 有怎样的位置关系?

(2) 原图中有哪些相等的角? 哪些全等的三角形?

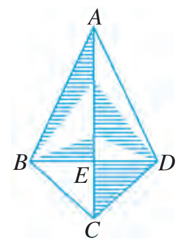
(3) 分别作出点 F,G 关于所作对称轴对称的点.



(第 4 题)



(第 5 题)



(第 6 题)

B **5.** 如图,P 为直线 MN 上一点,$\angle APM=\angle BPN$.

(1) 以 MN 为对称轴,作与线段 BP 成轴对称的线段 $B'P$.

(2) 点 A,P,B'是否在同一直线上? 请说明理由.

6. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AC\perp BD$ 于点 E,$BE=DE$. 若 $AC=30\text{ cm}$,$BD=20\text{ cm}$,求阴影部分的面积.

设计题 SHEJITI

本节开头介绍的我国古建筑故宫精致地反映了轴对称的设计思想. 事实上,我们在生产、生活中可以发现很多体现轴对称的实际例子. 请以 4～5 人为一组,收集 5～10 个这样的例子(可以是照片或实物等). 你可以从你的周围生活环境、报刊书籍或互联网上进行收集. 先在小组内交流,然后在全班作书面或口头报告,展示收集到的实例.

2·2 等腰三角形

等腰三角形的应用在人们的生活中随处可见，如埃及金字塔的四个面都呈等腰三角形的形状.

在小学我们已经学过，有两边相等的三角形叫做**等腰三角形**(isosceles triangle). 如图 2-9，在△ABC 中，$AB=AC$，△ABC 是等腰三角形.

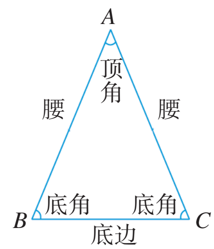
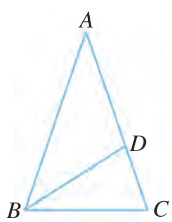


图 2-9

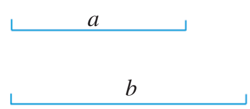
做一做 ZUOYIZUO



(第 1 题)

1. 如图，点 D 在 AC 上，$AB=AC$，$AD=BD$. 你能在图中找到几个等腰三角形？分别说出每个等腰三角形的腰、底边和顶角.

2. 已知线段 a，b(如图). 用直尺和圆规作等腰三角形 ABC，使 $AB=AC=b$，$BC=a$.



(第 2 题)

例1 求证：等腰三角形两腰上的中线相等.

已知：如图 2-10，在△ABC 中，$AB=AC$，CD，BE 分别是腰 AB，AC 上的中线.

求证：$BE=CD$.

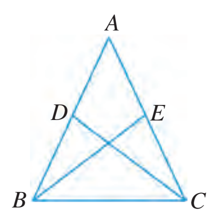


图 2-10

证明 ∵ CD，BE 分别是 AB，AC 上的中线(已知)，

∴ $AD=\frac{1}{2}AB$，$AE=\frac{1}{2}AC$(三角形中线的定义).

∵ $AB=AC$(已知)，

∴ $AD=AE$.

又∵ $\angle A=\angle A$(公共角)，

∴ $\triangle ABE \cong \triangle ACD$($SAS$).

∴ $BE=CD$(全等三角形的对应边相等).

合作学习

在透明纸上任意画一个等腰三角形 ABC，画出它的顶角平分线 AD（图 2-11），然后沿着 AD 所在的直线把 $\triangle ABC$ 对折（图 2-12）. 你发现了什么？由此你得出什么结论？

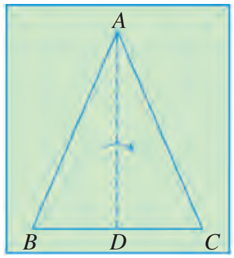


图 2-11

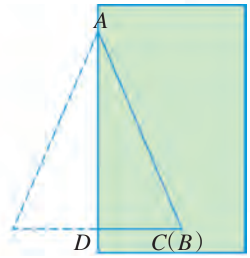


图 2-12

当我们沿着等腰三角形 ABC（图 2-11）的顶角平分线 AD 所在的直线把$\triangle ABC$ 对折时，因为$\angle BAD=\angle CAD$，所以射线 AB 与 AC 重合. 又因为 $AB=AC$，所以点 B 与点 C 重合，即直线 AD 两侧的图形能够完全重合. 因此，我们有下面的结论：等腰三角形是轴对称图形，顶角平分线所在的直线是它的对称轴.

我们知道，三条边都相等的三角形叫做**等边三角形**(equilateral triangle). 如图 2-13，$AB=BC=AC$，$\triangle ABC$ 是一个等边三角形. 等边三角形是一类特殊的等腰三角形. 想一想，等边三角形有几条对称轴？

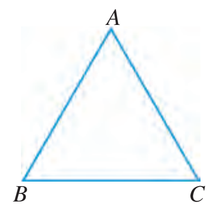


图 2-13

例2 如图 2-14，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D，E 分别是 AB，AC 上的点，且 $AD=AE$. AP 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 点 D，E 关于 AP 对称吗？DE 与 BC 有怎样的位置关系？请说明你的判断.

解 点 D 和点 E 关于 AP 对称，且 $DE/\!/BC$. 理由如下：

因为 AP 是 $\angle BAC$ 的平分线，$AB=AC$，$AD=AE$，所以等腰三角形 ABC 和等腰三角形 ADE 都是以直线 AP 为对称轴的轴对称图形，点 B 和点 C，点 D 和点 E 都关于 AP 对称. 根据"对称轴垂直平分连结两个对称点的线段"，知 $AP\perp DE$，$AP\perp BC$，所以 $DE/\!/BC$.

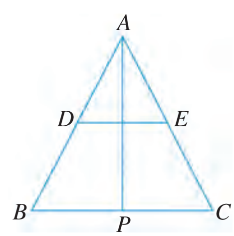


图 2-14

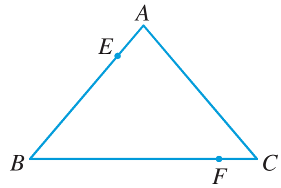
课内练习 KENEILIANXI

1. 已知等腰三角形的两条边长分别为1 cm,3 cm. 求第三条边长.

2. 如图,在等腰三角形 ABC 中,$AB=AC$.

(1) 作出$\triangle ABC$ 的对称轴 AD.

(2) 分别作出点 E,F 关于 AD 的对称点.



(第 2 题)

作业题 ZUOYETI

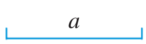
A

1. 若等腰三角形的两边长分别是 4 和 6,则它的周长是(　　)

(A) 14.　　(B) 15.

(C) 16.　　(D) 14 或 16.

2. 作一个等腰三角形,使它的腰长为 3 cm,底边长为 2 cm.



(第 3 题)

3. 已知线段 a (如图),用直尺和圆规作等边三角形 ABC,使它的边长为 a. 然后作出它的所有对称轴.

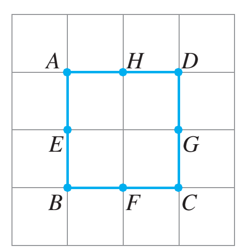
B

4. 等腰三角形一腰上的中线将这个等腰三角形的周长分成 15 cm 和 6 cm 两部分. 求等腰三角形的底边长.

5. 求证:等腰三角形两腰上的高线长相等.

C

6. 在如图所示的 4×4 方格图中,点 A,B,C,D,E,F,G,H 均在小方格的顶点上. 以其中三个点为顶点,能构成多少个等腰三角形?



(第 6 题)

2·3 等腰三角形的性质定理

将一把三角尺和一个重锤如图放置，就能检查一根横梁是否水平.你知道为什么吗?

1

任意画一个等腰三角形，通过折叠、测量等方式，探索它的内角之间有什么关系. 你发现了什么?

（请与你的同伴交流）

等腰三角形性质定理 1　**等腰三角形的两个底角相等**. 这个定理也可以说成**在同一个三角形中，等边对等角**.

下面给出证明.

已知：如图 2-15，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

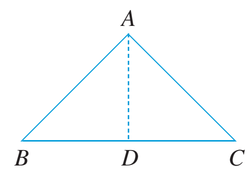


图 2-15

证明　如图 2-15，作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\because \begin{cases} AB=AC\text{（已知）}, \\ \angle BAD=\angle CAD\text{（角平分线的定义）}, \\ AD=AD\text{（公共边）}, \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle ACD\ (SAS)$.

$\therefore\ \angle B=\angle C$（全等三角形的对应角相等）.

想一想

你能根据等腰三角形的轴对称性证明上述定理吗?

例1　求等边三角形 ABC 三个内角的度数.

解　如图 2-16，在 $\triangle ABC$ 中，

$\because\ AB=AC$（已知），

$\therefore\ \angle B=\angle C$（等腰三角形的两个底角相等）.

同理，$\angle A=\angle B$.

$\because\ \angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore\ \angle A=\angle B=\angle C=\dfrac{1}{3}\times180°=60°$.

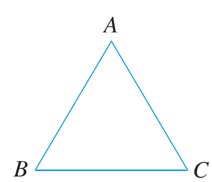


图 2-16

由“等腰三角形的两个底角相等”，可以得到以下推论：

等边三角形的各个内角都等于 60°.

例2　求证：等腰三角形两底角的平分线相等.

已知：如图 2-17，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BD 和 CE 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线.

求证：$BD=CE$.

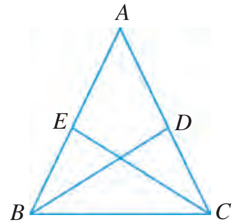


图 2-17

分析　要证明 $BD=CE$，只需证明 $\triangle BCE \cong \triangle CBD$（或 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$）. 因为 BC 是 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CBD$ 的公共边，所以只需证明 $\angle ABC=\angle ACB$，$\angle BCE=\angle CBD$. 这可由已知 $AB=AC$，BD 和 CE 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线得到.

上述从所求出发的分析思路可以简明地表示成图 2-18.

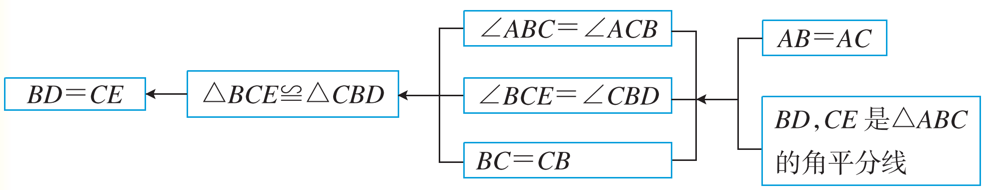


图 2-18

证明　如图 2-17.

$\because$ $AB=AC$（已知），

$\therefore$ $\angle ABC=\angle ACB$（等腰三角形的两个底角相等）.

$\because$ BD，CE 分别是 $\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线，

$\therefore$ $\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle BCE=\frac{1}{2}\angle ACB$（角平分线的定义），

$\therefore$ $\angle CBD=\angle BCE$.

又 $\because$ $BC=CB$（公共边），

$\therefore$ $\triangle BCE \cong \triangle CBD$（ASA）.

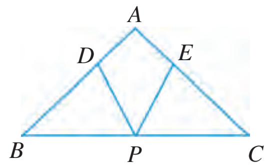
$\therefore$ $BD=CE$（全等三角形的对应边相等）.

课内练习 KENEILIANXI

（第 1 题）

1. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle ACD=100°$，则$\angle A=$_______度.

2. 已知：如图，在△ABC 中，$AB=AC$，P 为 BC 的中点，D，E 分别为 AB，AC 上的点，且 $AD=AE$. 求证：$PD=PE$.

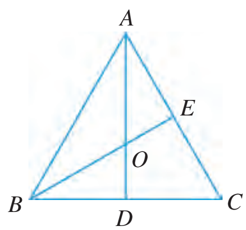


（第 2 题）

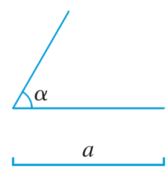
作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知等腰三角形的顶角是底角的 2 倍，求这个三角形各个内角的度数.

2. 如图，AD，BE 是等边三角形 ABC 的两条角平分线，AD，BE 相交于点 O. 求$\angle AOB$ 的度数.



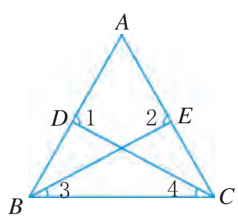
（第 2 题）



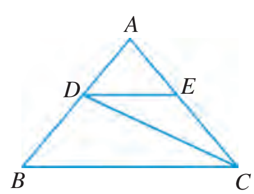
（第 3 题）

3. 如图，已知$\angle \alpha$ 和线段 a. 用直尺和圆规作△ABC，使 $AB=AC=a$，$\angle B=\angle \alpha$.

B **4.** 已知：如图，在△ABC 中，D，E 分别是 AB，AC 边上的点，且 $AD=AE$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\angle 3=\angle 4$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，CD 是$\angle ACB$ 的平分线，$DE/\!/BC$，交 AC 于点 E，且$\angle CDE=25°$. 求$\angle A$，$\angle B$ 的度数.

合作学习

如图 2-19，在△ABC 中，$AB=AC$，AD 是角平分线. 在图中找出所有相等的线段和相等的角. 由此你发现了等腰三角形还有哪些性质?

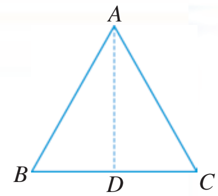


图 2-19

ICT 用“几何画板”软件探索等腰三角形底边上的高线、中线、角平分线三线合一的性质.

如图 2-20，在“几何画板”软件中画直线 MN 及△ABC，使点 A，B 在直线 MN 上，点 C 在直线 MN 外，再画△ABC 的高线 CD，中线 CE 和角平分线 CF.

测量 AC，BC 的长度. 拖动点 C，观察 AC，BC 的长度关系及点 D，F，E 三点的位置变化. 当 AC，BC 的长度相等时，D，F，E 三点的位置如何? 由此你发现了什么?

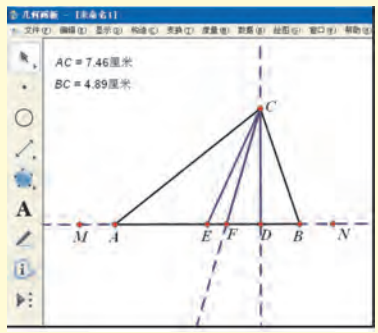


图 2-20

等腰三角形性质定理 2 **等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线和高线互相重合**，简称**等腰三角形三线合一**.

请你自己写出证明过程.

例3 已知：如图 2-21，AD 平分 $\angle BAC$，$\angle ADB=\angle ADC$.

求证：$AD\perp BC$.

证明 如图 2-21，延长 AD，交 BC 于点 E.

$\because$ AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle BAD=\angle CAD$（角平分线的定义）.

而 $AD=AD$（公共边），

$\angle ADB=\angle ADC$（已知），

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$（$ASA$）.

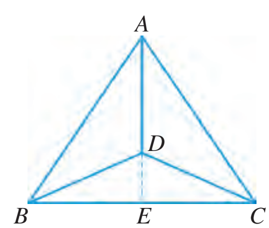


图 2-21

∴　$AB=AC$（全等三角形的对应边相等）.
∴　$\triangle ABC$ 是等腰三角形（等腰三角形的定义）.
∵　AE 是等腰三角形 ABC 顶角的平分线，
∴　$AE\perp BC$（等腰三角形三线合一），
即 $AD\perp BC$.

例4　已知线段 a，h（图 2-22），用直尺和圆规作等腰三角形 ABC，使底边 $BC=a$，底边 BC 边上的高线长为 h.

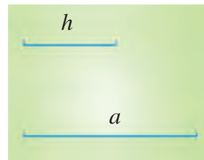


图 2-22

分析　要作出等腰三角形 ABC，关键是作出顶点 A. 设底边 BC 上的高线为 AD，根据"等腰三角形三线合一"的性质，AD 也是底边 BC 上的中线. 因此，只要作 BC 的垂直平分线 l，然后在 l 上截取 $DA=h$，连结 AB，AC，就得到所求作的等腰三角形.

作法　如图 2-23.

1. 作线段 $BC=a$.
2. 作线段 BC 的垂直平分线 l，交 BC 于点 D.
3. 在直线 l 上截取 $DA=h$，连结 AB，AC.

$\triangle ABC$ 就是所求作的等腰三角形.

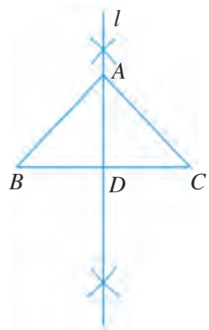
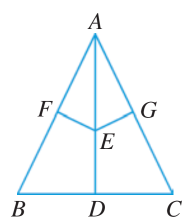


图 2-23

课内练习 KENEILIANXI

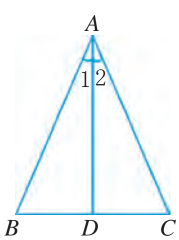
1. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$ 于点 D. E 为 AD 上的一点，$EF\perp AB$，$EG\perp AC$，F，G 分别为垂足. 求证：$EF=EG$.



（第 1 题）

2. 解答本节节前语中的问题.

作业题 ZUOYETI



（第 1 题）

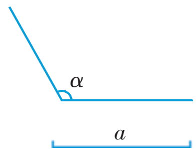
A 1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 上.

（1）若 $\angle 1=\angle 2$，则 AD____________.

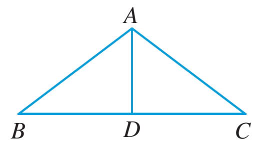
（2）若 $AD\perp BC$，则 AD____________.

（3）若 $BD=CD$，则 AD____________.

2. 已知$\angle\alpha$和线段a(如图),用直尺和圆规作等腰三角形ABC,使顶角$\angle BAC=\angle\alpha$,角平分线$AD=a$.



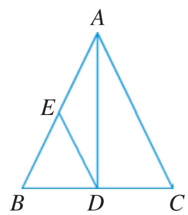
(第 2 题)



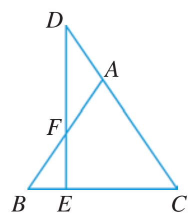
(第 3 题)

3. 如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$AD\perp BC$于D. 若$AB=5$,$BD=4$,求$\triangle ABC$的周长.

B **4.** 已知:如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,AD是BC边上的中线,E是AB上一点,且$DE=AE$. 求证:$DE\parallel AC$.



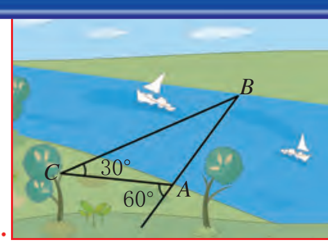
(第 4 题)



(第 5 题)

5. 已知:如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D为CA延长线上一点,$DE\perp BC$,交AB于点F. 求证:$\angle D=\angle AFD$.

2·4 等腰三角形的判定定理



如图所示,量出AC的长,就可算出河的宽度AB. 你知道为什么吗?

根据等腰三角形的定义,如果一个三角形的两条边相等,那么就可判定这个三角形是等腰三角形. 除此之外,还有其他判定方法吗?

合作学习

在纸上任意画线段 BC，分别以点 B 和点 C 为顶点，以 BC 为一边，在 BC 的同侧画两个相等的角，两角的另一边相交于点 A. 量一量，线段 AB 与 AC 相等吗？其他同学的结果与你的相同吗？你发现了什么规律？

等腰三角形的判定定理：

如果一个三角形有两个角相等，那么这个三角形是等腰三角形.

下面我们给出证明.

已知：如图 2-24，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

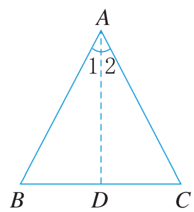


图 2-24

证明　如图 2-24，作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle 1=\angle 2 \ (\text{角平分线的定义}), \\ \angle B=\angle C \ (\text{已知}), \\ AD=AD \ (\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ABD \cong \triangle ACD$（$AAS$），

$\therefore$　$AB=AC$（全等三角形的对应边相等），

$\therefore$　$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

上述判定定理可以简单地说成：**在同一个三角形中，等角对等边.**

例　一次数学实践活动的内容是测量河宽，如图 2-25，即测量点 A，B 之间的距离. 同学们想出了许多方法，其中小聪的方法是：从点 A 出发，沿着与直线 AB 成 $60°$ 角的 AC 方向前进至 C，在 C 处测得 $\angle C=30°$. 量出 AC 的长，它就是河的宽度（即点 A，B 之间的距离）. 这个方法正确吗？请说明理由.

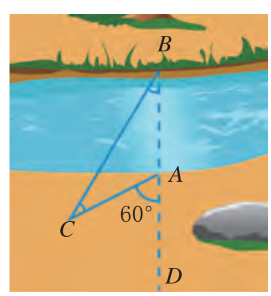


图 2-25

解　这一方法正确. 理由如下：

$\because$　$\angle CAD=\angle B+\angle C$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

$\therefore$　$\angle B=\angle CAD-\angle C=60°-30°=30°$，

$\therefore$　$\angle B=\angle C$，

$\therefore$　$AB=AC$（在同一个三角形中，等角对等边）.

等边三角形的判定定理：

三个角都相等的三角形是等边三角形.（请你自己给出证明）

有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形.

下面给出证明.

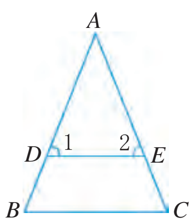
因为已知 60°的角可能是等腰三角形的底角，也可能是顶角，所以分两种情形：

（1）若 60°的角是等腰三角形的底角，则另一个底角也等于 60°，所以顶角为 $180°-2\times60°=60°$，可得这个等腰三角形的三个角都相等，所以这个等腰三角形是等边三角形.

（2）若 60°的角是等腰三角形的顶角，则它的两个底角都等于 $\frac{180°-60°}{2}=60°$，可得这个等腰三角形的三个角都相等，所以这个三角形是等边三角形.

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知一个三角形的两个角的度数分别为 43°，94°，这个三角形是不是等腰三角形？请说明理由.



（第 2 题）

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 上的点，$DE /\!/ BC$，$\angle 1=\angle 2$．求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

探究活动 TANJIUHUODONG

如图 2-26，有甲、乙两个三角形. 甲三角形的内角分别为 10°，20°，150°；乙三角形的内角分别为 80°，25°，75°. 你能把每一个三角形分成两个等腰三角形吗？画一画，并标出各角的度数.

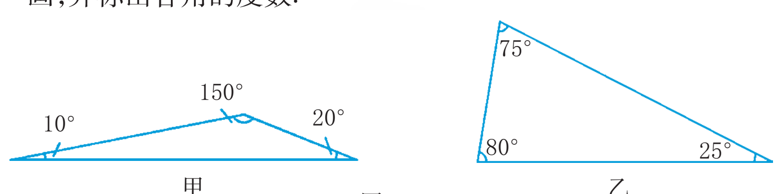
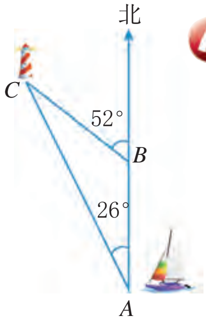


图 2-26

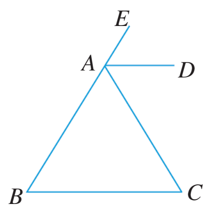
作业题 ZUOYETI



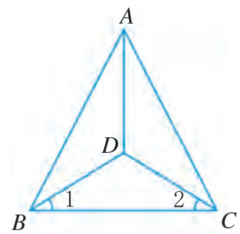
（第 1 题）

A **1.** 如图，上午 8 时，一艘船从 A 处出发，以 15 海里 / 时的速度向正北方向航行，9 时 45 分到达 B 处．从 A 处测得灯塔 C 在北偏西 26°方向，从 B 处测得灯塔 C 在北偏西 52°方向．求 B 处到灯塔 C 的距离．

2. 如图，AD 平分$\triangle ABC$ 的外角$\angle EAC$，$AD /\!/ BC$，则$\triangle ABC$ 是等腰三角形吗？证明你的判断．



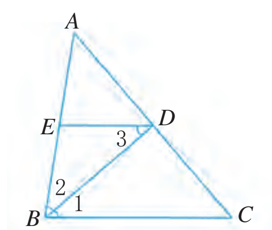
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，则$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 全等吗？证明你的判断．

B **4.** 如图，BD 是等腰三角形 ABC 的底边 AC 上的高线，$DE /\!/ BC$，交 AB 于点 E．判断$\triangle BDE$ 是不是等腰三角形，并证明你的判断．



（第 4 题）


（第 5 题）

5. 飞机螺旋桨三个叶片的长度相等，每两个叶片（中心线）所成的角为 120°．如果用线段把每两个叶片的外端连结起来，那么所得的三角形是正三角形吗？请说明理由．

C **6.** 把一张顶角为 36°的等腰三角形纸片剪两刀，分成三张小纸片，使每张小纸片都是等腰三角形．你能办到吗？请画示意图说明剪法．

2·5 逆命题和逆定理

考虑两个命题:“飞机是会飞的交通工具.”“会飞的交通工具是飞机.”这两个命题有什么不同? 它们都是真命题吗?

请你仔细阅读表 2-1 中的四个命题,填写并思考:命题(1)和命题(2),命题(3)和命题(4)的条件和结论有什么关系?

表 2-1

命　题	条件	结论	命题真假
(1) 两直线平行,同位角相等.			
(2) 同位角相等,两直线平行.			
(3) 如果 $a=b$,那么 $a^2=b^2$.			
(4) 如果 $a^2=b^2$,那么 $a=b$.			

在两个命题中,如果第一个命题的条件是第二个命题的结论,而第一个命题的结论是第二个命题的条件,那么这两个命题叫做**互逆命题**. 如果把其中一个命题叫做**原命题**(original statement),那么另一个命题叫做它的**逆命题**(converse statement). 例如,表 2-1 中,命题(1)与命题(2),命题(3)与命题(4)都是互逆命题.

每个命题都有它的逆命题,但每个真命题的逆命题不一定是真命题. 例如,表 2-1 中,命题(3)是真命题,而它的逆命题(4)是假命题. 如果一个定理的逆命题能被证明是真命题,那么就叫它是原定理的**逆定理**(converse theorem),这两个定理叫做**互逆定理**.

做一做 ZUOYIZUO

磁悬浮列车

1. 说出下列命题的逆命题,并判定逆命题的真假.

(1) 长方形有两条对称轴.

(2) 磁悬浮列车是一种高速行驶时不接触地面的交通工具.

2. 说出两对互逆的定理.

例1 说出定理"线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等"的逆命题，并证明这个逆命题是真命题.

解 这个定理的逆命题是：**到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上**. 下面给出证明.

已知：AB 是一条线段，P 是一点，且 $PA=PB$.

求证：点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

分析 要证明点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，可以过点 P 作 AB 的垂线，然后证明它恰好平分线段 AB.

证明 （1）当点 P 在线段 AB 上时，结论显然成立.

（2）当点 P 不在线段 AB 上时，如图 2-27，作 $PC\perp AB$ 于点 O.

$\because$ $PA=PB$，$PO\perp AB$，

$\therefore$ $OA=OB$（根据什么？），

$\therefore$ PC 是 AB 的垂直平分线.

$\therefore$ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

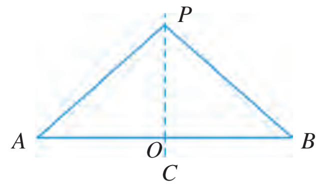


图 2-27

可见，线段垂直平分线性质定理的逆命题是真命题，我们把它叫做线段垂直平分线性质定理的逆定理.

例2 说出命题"两个全等三角形的面积相等"的逆命题，判断这个逆命题的真假，并说明理由.

解 逆命题是"如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形全等." 这个逆命题是假命题. 举反例如下：

如图 2-28，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABE$ 中，CD，EF 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABE$ 的 AB 边上的高线，且 $CD=EF$，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABE$ 的面积相等，但显然它们不全等. 所以这个逆命题是假命题.

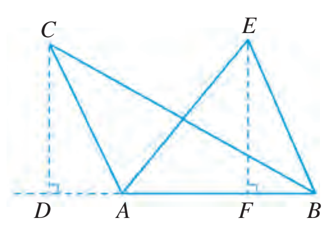


图 2-28

课内练习 KENEILIANXI

1. 写出下列各命题的逆命题,并判断原命题和逆命题的真假.

（1）同位角相等.

（2）如果 $|a|=|b|$,那么 $a=b$.

（3）等边三角形的三个角都是 60°.

2. 下列定理中,哪些有逆定理?如果有逆定理,说出它的逆定理.

（1）等腰三角形的两个底角相等.

（2）内错角相等,两直线平行.

（3）对顶角相等.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 下列说法对吗?请说明理由.

（1）每个定理都有逆定理.

（2）每个命题都有逆命题.

（3）假命题没有逆命题.

（4）真命题的逆命题是真命题.

2. 写出下列命题的逆命题,并判断其真假.

（1）等边三角形有一个角等于 60°.

（2）等腰三角形两腰上的高线长相等.

3. 下列定理中,哪些有逆定理?如果有逆定理,写出它的逆定理.

（1）同旁内角互补,两直线平行.

（2）三角形的两边之和大于第三边.

B **4.** 写出定理"等腰三角形底边上的高线与中线互相重合"的逆命题,并证明这个逆命题是真命题.

5. 求证:三角形三条边的垂直平分线相交于一点.

2·6 直角三角形

这个图案是由七巧板拼成的.你能从图中找出多少个直角三角形?

1

我们知道,有一个角是直角的三角形叫做**直角三角形**(right triangle),直角三角形可以用符号"Rt△"表示,如图2-29的三角形可记为Rt△ABC.

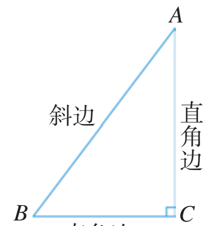


图 2-29

在现实生活中,我们常常会接触到各种各样的直角三角形,如广告牌的支架、电线杆的固定装置、楼梯的侧面(图2-30)等.

图 2-30

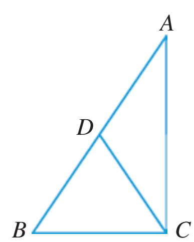
因为"三角形三个内角的和等于180°",直角三角形两个锐角的和为$180°-90°=90°$,所以直角三角形有以下性质定理:

直角三角形的两个锐角互余.

做一做 ZUOYIZUO

1. 已知直角三角形两个锐角的度数之比为3∶2,求这两个锐角的度数.

2. 已知:如图,D是Rt△ABC斜边AB上的一点,$BD=CD$.求证:$AD=CD$.
从本题中,你发现直角三角形斜边上的中线有什么性质?



(第2题)

直角三角形还有以下性质定理：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

例1 如图 2-31，一名滑雪运动员沿着倾斜角为 30° 的斜坡，从 A 滑行至 B，已知 $AB=200$ m. 问这名滑雪运动员的高度下降了多少米？

图 2-31

分析 如图 2-31，作 $AC\perp BC$ 于点 C，这样问题就归结为求直角边 AC 的长. 由“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，已知 $AB=200$ m，可得斜边上的中线等于 100 m. 添上这条中线后，就构成含已知线段和所求线段的新三角形 ADC，由此就能找到未知量和已知量之间的关系.

解 如图 2-32，作 Rt$\triangle ABC$ 的斜边上的中线 CD，

则 $CD=AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 200=100$(m)（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

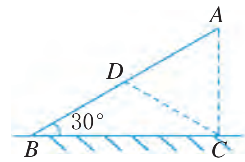


图 2-32

$\because$ $\angle B=30^\circ$，

$\therefore$ $\angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-30^\circ=60^\circ$（直角三角形的两个锐角互余）.

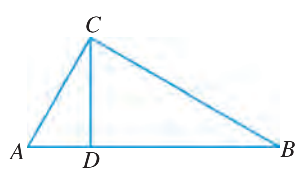
$\therefore$ $\triangle ADC$ 是等边三角形（为什么？）.

$\therefore$ $AC=AD=100$(m).

答：这名滑雪运动员的高度下降了 100 m.

课内练习 KENEILIANXI

1. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC\perp BC$，$CD\perp AB$. 找出全部互余的角.



（第 1 题）

2. 已知在 Rt$\triangle ABC$ 中，斜边上的中线 $CD=5$ cm，求斜边 AB 的长.

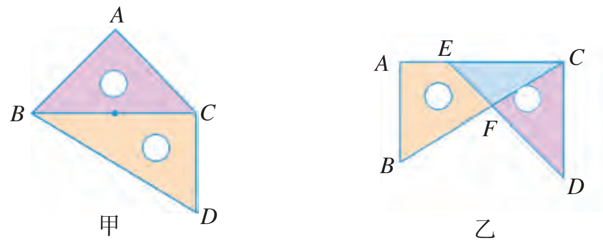
作业题 ZUOYETI

A **1.** 在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$\angle B=3\angle C$. 求$\angle B$，$\angle C$的度数.

2. 用一副三角尺拼出甲、乙两个图形，求：

（1）图甲中，$\angle ABD$的度数.

（2）图乙中，$\angle DCF$，$\angle CFD$，$\angle AEF$的度数.

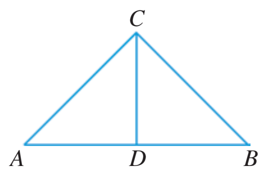


（第 2 题）

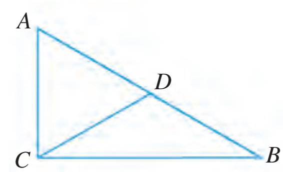
3. 已知：如图，$\triangle ABC$是等腰三角形，$AC\perp BC$，$CD\perp AB$.

（1）求$\angle A$，$\angle B$的度数.

（2）求证：$AD=CD=BD$.



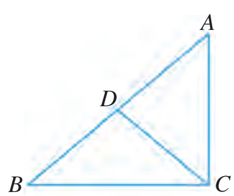
（第 3 题）



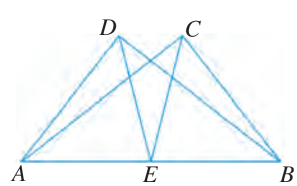
（第 4 题）

4. 如图，在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，$AB=1.5$. D为斜边AB的中点，连结CD. 求AC，CD的长.

B **5.** 如图，在 Rt$\triangle ABC$中，CD是斜边AB上的中线，$\angle CDA=80°$. 求$\angle A$，$\angle B$的度数.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，已知$AD\perp BD$，$AC\perp BC$，E为AB的中点. 试判断DE与CE是否相等，并给出证明.

2

说出定理“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题．这个逆命题正确吗？你是怎样判定的？

直角三角形的判定定理：

有两个角互余的三角形是直角三角形.

事实上，根据“三角形三个内角的和等于 180°”，当一个三角形中有两个角互余时，它的第三个角就等于 90°，所以这个三角形是直角三角形.

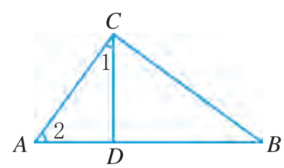
做一做 ZUOYIZUO

根据下列条件判断△ABC 是不是直角三角形，并说明理由.

(1) 有一个外角为 90°.

(2) $\angle A=36°$，$\angle B=54°$.

(3) 如图，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互余，$\angle B=\angle 1$.



（第(3)题）

例2 已知：如图 2-33，CD 是△ABC 的 AB 边上的中线，$CD=\frac{1}{2}AB$.

求证：△ABC 是直角三角形.

证明 ∵ CD 是 AB 边上的中线（已知），

∴ $AD=BD=\frac{1}{2}AB$（三角形中线的定义）.

∵ $CD=\frac{1}{2}AB$（已知），

∴ $CD=AD$.

∴ $\angle A=\angle ACD$（在同一个三角形中，等边对等角）.

同理，$\angle B=\angle BCD$.

∵ $\angle A+\angle B+\angle ACD+\angle BCD=180°$（为什么？），

∴ $\angle A+\angle B=\angle ACD+\angle BCD=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

∴ △ABC 是直角三角形（有两个角互余的三角形是直角三角形）.

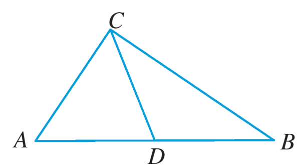
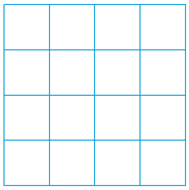


图 2-33

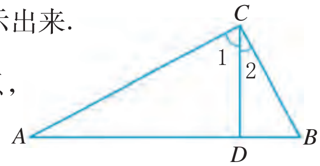
课内练习 KENEILIANXI



（第 1 题）

1. 在如图的方格纸上画三个互不全等的直角三角形，使其顶点都在格点上，并用符号“Rt△”和字母将它们表示出来.

2. 已知：如图，在△ABC 中，D 是 AB 上一点，$\angle 1=\angle B$，$\angle A=\angle 2$.
求证：△ABC 是直角三角形.



（第 2 题）

作业题 ZUOYETI

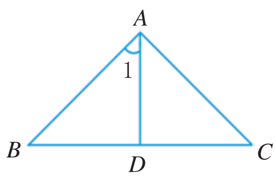
A **1.** 根据下列条件判断△ABC 是不是直角三角形，并说明理由.

（1）$\angle B=50°$，$\angle C=40°$.

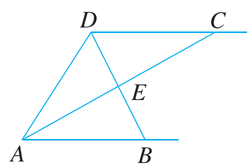
（2）$\angle B=\angle C=45°$.

（3）$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数比为 $5:3:2$.

2. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$ 于点 D，$\angle 1=\angle C$. 求$\angle B$，$\angle C$，$\angle BAC$ 的度数.



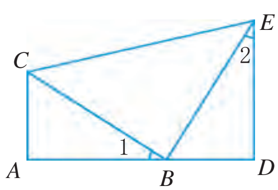
（第 2 题）



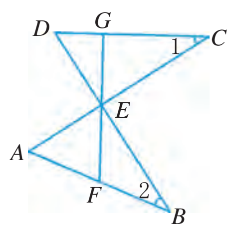
（第 3 题）

3. 如图，$AB\parallel CD$，AC 平分$\angle BAD$，BD 平分$\angle ADC$，AC 和BD 交于点 E. 写出图中所有的直角三角形（不要求证明）.

B **4.** 已知：如图，A，B，D 同在一条直线上，$\angle A=\angle D=\text{Rt}\angle$，$AC=BD$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：△$BEC$ 是等腰直角三角形.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 已知：如图，$BD\perp AC$，E 为垂足，△ABE 的中线 FE 的延长线交 CD 于点 G，$\angle 1=\angle 2$. 求证：△CGE 是直角三角形.

2·7 探索勾股定理

如图是在北京召开的第 24 届国际数学家大会（ICM—2002）的会标. 它的设计思路可追溯到 3 世纪中国数学家赵爽所使用的弦图. 用弦图证明勾股定理在数学史上有着重要的地位.

1

合作学习

（1）剪四个全等的直角三角形纸片（图 2-34），把它们按图 2-35 放入一个边长为 c 的正方形中. 这样我们就拼成了一个形如图 2-35 的图形.

（2）设剪出的直角三角形纸片的两条直角边长分别为 a，b，斜边长为 c. 分别计算图 2-35 中的阴影部分的面积和大、小两个正方形的面积.

（3）比较图 2-35 中阴影部分和大、小两个正方形的面积，你发现了什么？

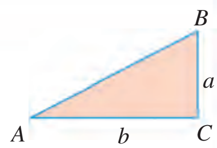


图 2-34

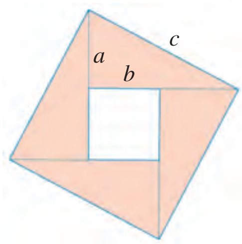


图 2-35

一般地，直角三角形的三条边长有下面的关系：

直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

如果 a，b 为直角三角形的两条直角边的长，c 为斜边的长，则

$$a^2+b^2=c^2.$$

我国早在三千多年前就知道直角三角形的这个性质. 古人称直角三角形的直角边中较短的一边为勾，较长的一边为股，斜边为弦，因此这一性质也称为**勾股定理**.

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系，是数学中最著名的定理之一，在图形研究和生活、生产实践中有广泛的应用.

例1 已知在$\triangle ABC$中，$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$.

（1）若$a=1$，$b=2$，求c.

（2）若$a=15$，$c=17$，求b.

解 （1）根据勾股定理，得 $c^2=a^2+b^2=1^2+2^2=5$.

$\because$ $c>0$， $\therefore$ $c=\sqrt{5}$.

（2）根据勾股定理，得 $b^2=c^2-a^2=17^2-15^2=64$.

$\because$ $b>0$， $\therefore$ $b=8$.

例2 图 2-36 是一个长方形零件图．根据所给的尺寸（单位：mm），求两孔中心A，B之间的距离.

分析 解决问题的关键是构造出含所求线段的直角三角形，然后用勾股定理求解.

解 过A作铅垂线，过B作水平线，两线交于点C，则$\angle ACB=90°$，

$AC=90-40=50(\mathrm{mm})$，

$BC=160-40=120(\mathrm{mm})$.

由勾股定理，得

$AB^2=AC^2+BC^2=50^2+120^2=16\,900(\mathrm{mm}^2)$.

$\because$ $AB>0$，

$\therefore$ $AB=130(\mathrm{mm})$.

答：两孔中心A，B之间的距离为130 mm.

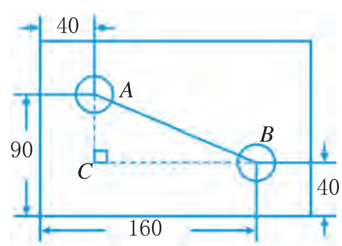


图 2-36

课内练习 KENEILIANXI

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$.

（1）如果$a=\dfrac{4}{5}$，$b=\dfrac{3}{5}$，求c.

（2）如果$a=12$，$c=13$，求b.

（3）如果$c=34$，$a:b=8:15$，求a，b.

2. 用刻度尺和圆规作一条线段，使它的长度为$\sqrt{3}$ cm.

3. 利用作直角三角形，在数轴上表示点$\sqrt{13}$.

作业题 ZUOYETI

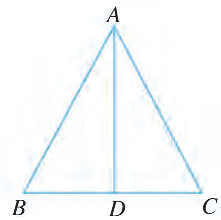
A **1.** 在$\triangle ABC$中，$\angle C=\text{Rt}\angle$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$.

（1）若$a=9$，$b=12$，求c.

（2）若$a=9$，$c=41$，求b.

（3）若$c=10$，$b=7$，求a.

2. 用刻度尺和圆规作一条线段，使它的长度为$\sqrt{10}$ cm.



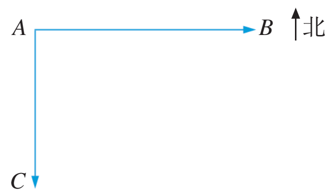
（第 3 题）

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$AB=17$，$BC=16$. 求：

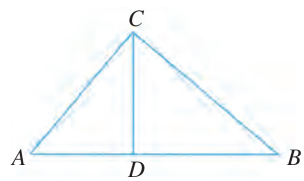
（1）BC边上的中线AD的长.

（2）$\triangle ABC$的面积.

4. 如图，甲船以 15 千米/时的速度从港口A向正南方向航行，乙船以 20 千米/时的速度，同时从港口A向正东方向航行. 行驶 2 小时后，两船相距多远?



（第 4 题）



（第 5 题）

B **5.** 一个屋架的形状如图. 已知$AC=10$ m，$BC=12$ m，$AC\perp BC$，$CD\perp AB$于点D. 求立柱CD的长和点D的位置（结果精确到 0.1 m）.


（第 6 题）

6. 在《九章算术》中记载了一道有趣的数学题：“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺. 引葭赴岸，适与岸齐. 问水深、葭长各几何?”这道题的意思是说：有一个边长为 1 丈的正方形水池，在池的正中央长着一根芦苇，芦苇露出水面 1 尺. 若将芦苇拉到池边中点处，芦苇的顶端恰好与水面齐平. 问水有多深? 芦苇有多长（1 丈=10 尺）? 请你解决这个问题.

设计题 SHEJITI

勾股定理是数学中一个非常重要的定理，它的证明方法有四百多种，目前还找不到一个定理的证明方法之多能超过勾股定理！

中国古代数学家很早就发现了勾股定理，而最早对勾股定理进行证明的是三国时期的赵爽，他创制了一幅"勾股圆方图"，创造性地证明了勾股定理.

勾股定理在西方文献中也称为毕达哥拉斯定理，其有据可查的证明见于欧几里得的《原本》.

以 4～5 人为一组，查阅有关资料，写一篇关于勾股定理证明的数学小论文.

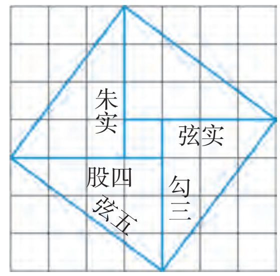


图 2-37

2

你能说出勾股定理的逆命题吗？试试看. 下面我们一起来探索这个逆命题.

合作学习

(1) 作三个三角形，使其边长分别为 3 cm，4 cm，5 cm；1.5 cm，2 cm，2.5 cm；5 cm，12 cm，13 cm.

(2) 算一算较短两条边的平方和与最长一条边的平方是否相等.

(3) 量一量所作每一个三角形最大边所对角的度数.

由此你得到怎样的猜想？用命题的形式表述你的猜想.

一般地，我们有下面勾股定理的逆定理：

如果三角形中两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形.

证明略.

例3 根据下列条件,分别判断以 a,b,c 为边的三角形是不是直角三角形.

(1) $a=7,b=24,c=25$.

(2) $a=\dfrac{2}{3},b=1,c=\dfrac{2}{3}$.

解 (1) $\because$ $7^2+24^2=25^2$,

$\therefore$ 以 7,24,25 为边的三角形是直角三角形.

(2) $\because$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}\neq 1^2$,

也就是较小两边的平方和不等于较大边的平方,

$\therefore$ a,b,c 中任何两边的平方和都不等于第三边的平方,

$\therefore$ 以$\dfrac{2}{3},1,\dfrac{2}{3}$为边的三角形不是直角三角形.

例4 已知△ABC 的三条边长分别为 a,b,c,且 $a=m^2-n^2,b=2mn,c=m^2+n^2$ ($m>n,m,n$ 是正整数). △ABC 是直角三角形吗? 请证明你的判断.

解 △ABC 是直角三角形. 证明如下:

$\because$ $a=m^2-n^2,b=2mn,c=m^2+n^2$ ($m>n,m,n$ 是正整数),

$\therefore$ $a^2+b^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$

$=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$

$=m^4+2m^2n^2+n^4$

$=(m^2+n^2)^2=c^2$.

$\therefore$ △ABC 是直角三角形(勾股定理的逆定理).

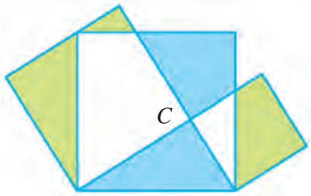
课内练习 KENEILIANXI

1. 根据下列条件,判断以 a,b,c为边的三角形是不是直角三角形.

(1) $a=20,b=21,c=29$.

(2) $a=5,b=7,c=8$.

(3) $a=\sqrt{7},b=\sqrt{3},c=2$.



(第 2 题)

2. 如图,以△ABC的每一条边为边作三个正方形. 已知这三个正方形构成的图形中,绿色部分的面积与蓝色部分的面积相等,则△ABC 是直角三角形吗?请证明你的判断.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 根据下列条件，分别判断以a,b,c为边的三角形是不是直角三角形.

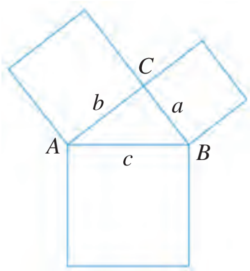
（1）$a=7, b=8, c=10$.

（2）$a=35, b=12, c=37$.

（3）$a=\sqrt{41}, b=4, c=5$.

（4）$a=3n, b=4n, c=5n$（n为正整数）.

（5）$a:b:c=5:12:13$.



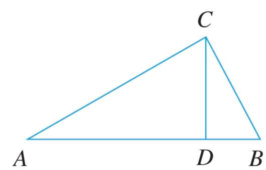
（第 2 题）

2. 已知：如图，最大正方形的面积等于较小两个正方形面积的和.
求证：这三个正方形的边构成的$\triangle ABC$是直角三角形.

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=4, BC=2, BD=1$，$CD=\sqrt{3}$. 判断下列结论是否正确，并说明理由.

（1）$CD\perp AB$.

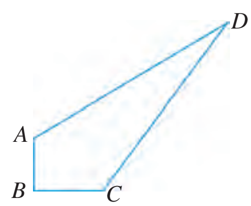
（2）$AC\perp BC$.



（第 3 题）

B **4.** 如图，在四边形$ABCD$中，$AB=3, BC=4$，$CD=12, AD=13$，$\angle B=90°$. 求四边形$ABCD$的面积.

5. 请利用本节例 4，说出三个互不全等的直角三角形的边长，且要求它们的边长均为正整数.



（第 4 题）

阅读材料 YUEDUCAILIAO

从勾股定理到图形面积关系的拓展

我们知道，勾股定理反映了直角三角形三条边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$. 而a^2，b^2，c^2又可以看成是以a,b,c为边长的正方形的面积，因此，勾股定理也可以表

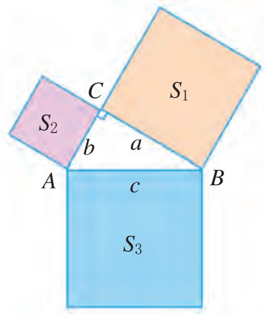


图 2-38

述为：分别以直角三角形两条直角边为边长的两个正方形的面积之和，等于以斜边为边长的正方形的面积. 如图 2-38，$S_1+S_2=S_3$.

如果以直角三角形的三条边 a,b,c 为边，向形外分别作正三角形（图 2-39），那么是否存在 $S_1+S_2=S_3$ 呢？

根据正三角形的性质和勾股定理，不难求得正三角形 BCD 的高线长为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

于是 $S_1=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

同理，$S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

$\therefore\quad S_1+S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$.

$\because\quad a^2+b^2=c^2$,

$\therefore\quad S_1+S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2=S_3$.

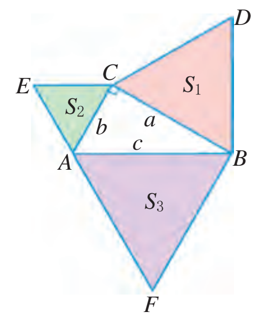


图 2-39

这说明，分别以直角三角形的三条边 a,b,c 为边向形外作正三角形，也存在 $S_1+S_2=S_3$.

类似地，上述结果是否适合其他图形？

例如，图 2-40 是分别以直角三角形的三边为直径作三个半圆，则 $S_1+S_2=S_3$ 成立吗？

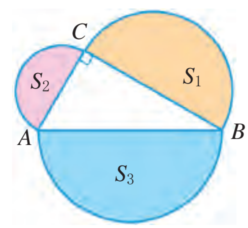


图 2-40

再画几个类似的图试一试，结论成立吗？由此，我们可以发现一个有趣的结论. 其实，在欧几里得时代，人们就已经知道了勾股定理的一些拓展. 例如，《原本》第六卷命题 31 就曾介绍："在一个直角三角形中，在斜边上所画的任何图形的面积，等于在两条直角边上所画的与其相似的图形的面积之和."

公元前约 400 年，古希腊的希波克拉底研究了他自己所画的形如图 2-41 的图形，得出如下结论："两个月牙形的面积之和，等于 $\triangle ABC$ 的面积，即 $S_1+S_2=S_3$."你能说明理由吗？

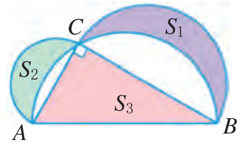
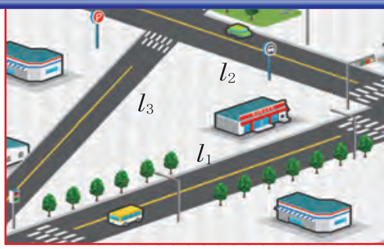


图 2-41

2·8 直角三角形全等的判定



l_1,l_2,l_3 三条道路两两相交，你能找出一点，使它到三条道路的距离都相等吗？

合作学习

（1）回顾：要判定两个三角形全等，我们已经有哪些方法？

（2）有两条边和一个角对应相等的两个三角形全等吗？如果这个角是直角呢？你可以通过作图、叠合等方法进行探索.

直角三角形全等还有下面的判定定理：

斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可以简写成“**斜边、直角边**”或“HL”）.

下面我们给出证明.

已知：如图 2-42，在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle A'C'B'$ 中，$\angle C=\angle C'=\mathrm{Rt}\angle$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

求证：$\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$.

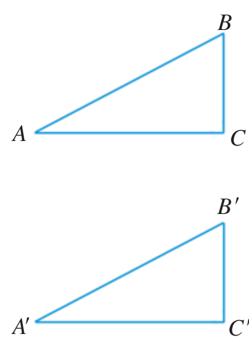


图 2-42

分析 因为 $AC=A'C'$，所以可考虑以 AC 为一边作一个直角三角形，使它和 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ 全等，然后只要证明所作的直角三角形和 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 全等.

证明 如图 2-43，延长 BC 至 D，使 $CD=B'C'$，连结 AD.

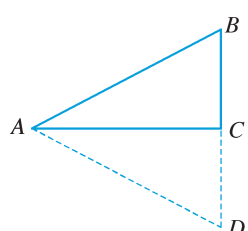


图 2-43

$\because$ $AC=A'C'$（已知），$\angle ACD=\mathrm{Rt}\angle=\angle C'$，

$\therefore$ $\triangle ADC\cong\triangle A'B'C'$（$SAS$），

$\therefore$ $AD=A'B'$（全等三角形的对应边相等）.

$\because$ $A'B'=AB$（已知），

$\therefore$ $AD=AB$.

又 $\because\ AC \perp BD$,

$\therefore\ BC=DC$（等腰三角形三线合一）.

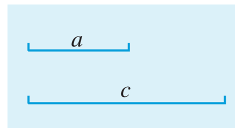
而 $AC=AC$（公共边）,

$\therefore\ \triangle ADC \cong \triangle ABC$（SSS）,

$\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

做一做 ZUOYIZUO

已知线段 a，c（如图），用直尺和圆规作 Rt$\triangle ABC$，使$\angle C=$Rt$\angle$，$BC=a$，$AB=c$.



例 已知：如图 2-44，P 是$\angle AOB$ 内一点，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，D，E 分别是垂足，且 $PD=PE$. 求证：点 P 在$\angle AOB$ 的平分线上.

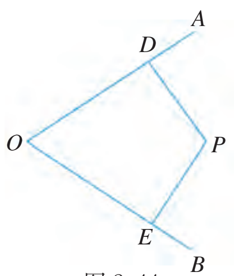


图 2-44

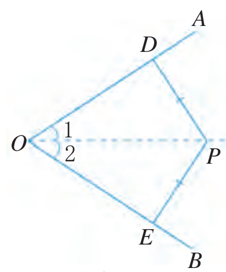


图 2-45

分析 如图 2-45，要证明点 P 在$\angle AOB$ 的平分线上，可以转化为证明射线 OP 平分$\angle AOB$.

证明 如图 2-45，作射线 OP.

$\because\ PD \perp OA$，$PE \perp OB$（已知），

$\therefore\ \angle PDO=\angle PEO=Rt\angle$.

又 $\because\ OP=OP$（公共边），$PD=PE$（已知），

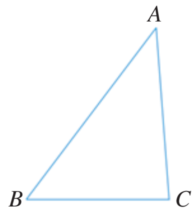
$\therefore$ Rt$\triangle PDO \cong$ Rt$\triangle PEO$（HL）.

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$，即点 P 在$\angle AOB$ 的平分线上（角平分线的定义）.

由此，我们可得到角平分线性质定理的逆定理：

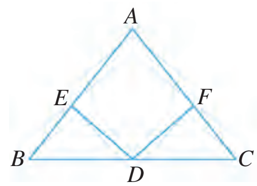
角的内部，到角两边距离相等的点，在这个角的平分线上.

课内练习 KENEILIANXI



（第 2 题）

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，D是BC的中点，$DE\perp AB$于点E，$DF\perp AC$于点F，且$DE=DF$. 求证：$AB=AC$.



（第 1 题）

2. 已知$\triangle ABC$（如图），用直尺和圆规作一点P，使它到三边的距离都相等（只要求作出图形，并保留作图痕迹）.

作业题 ZUOYETI

A 1. 具有下列条件的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$（其中$\angle C=\angle C'=\mathrm{Rt}\angle$）是否全等？如果全等，写出理由.

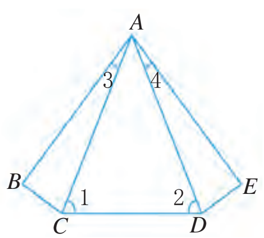
（1）$AC=A'C'$，$\angle A=\angle A'$.

（2）$AC=A'C'$，$BC=B'C'$.

（3）$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

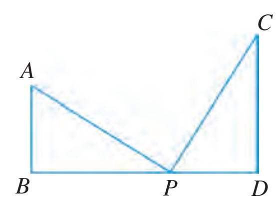
（4）$AB=A'B'$，$\angle B=\angle B'$.

（5）$AC=A'C'$，$AB=A'B'$.



（第 3 题）

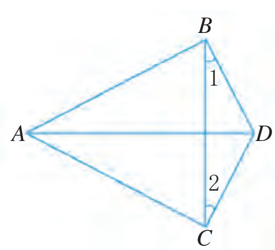
2. 已知：如图，$AB\perp BD$于点B，$CD\perp BD$于点D，P是BD上一点，且$AP=PC$，$AP\perp PC$. 求证：$\triangle ABP\cong\triangle PDC$.



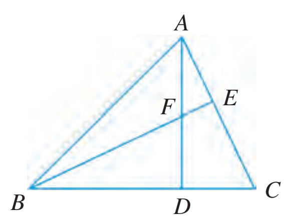
（第 2 题）

3. 已知：如图，$\angle B=\angle E=\mathrm{Rt}\angle$，$AB=AE$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\angle 3=\angle 4$.

B 4. 已知：如图，$\angle ABD=\angle ACD=90°$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$AD$平分$\angle BAC$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于点D，E为AC上一点，且$BF=AC$，$DF=DC$. 求证：$BE\perp AC$.

小结

XIAOJIE

填空.

1. 轴对称图形的对称轴 ________ 连结两个对称点的线段.

成轴对称的两个图形是______图形.

2. ____________的三角形叫做等腰三角形.

等腰三角形是轴对称图形，顶角__________________是它的对称轴.

3. 等腰三角形的性质定理：等腰三角形的两个________相等；等腰三角形的顶角平分线、_______和 _______互相重合.

4. 等腰三角形的判定定理：如果一个三角形有__________角相等，那么这个三角形是等腰三角形.

5. 三边都相等的三角形叫做______. 等边三角形的内角都等于 _______度. 各条 ______所在的直线都是它的对称轴.

6. 等边三角形的判定定理：三个_____都相等的三角形是等边三角形；有一个角是 60°的 _____________是等边三角形.

7. 两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的______，而第一个命题的结论是第二个命题的________，那么这两个命题叫做互逆命题. 如果把其中一个命题叫做原命题，那么另一个命题叫做它的___________.

如果一个定理的逆命题经过证明是正确的，那么就叫它是原定理的__________.

8. ______________的三角形叫做直角三角形，记做 ________.

9. 直角三角形的性质定理：直角三角形的两个锐角 ______；直角三角形 ______________ 等于斜边的一半.

10. 直角三角形的判定定理：有两个角 _________的三角形是直角三角形.

11. 勾股定理：直角三角形两条直角边的 _______等于 _______的平方.

勾股定理的逆定理：如果三角形中两边的 _______等于第三边的 ______，那么这个三角形是直角三角形.

12. 直角三角形全等的判定定理(HL)：_________和 ___________对应相等的两个直角三角形全等.

13. 线段垂直平分线的性质定理的逆定理：到线段两端 _______相等的点在线段的垂直平分线上.

角平分线性质定理的逆定理：角的内部，到角两边 _________相等的点，在这个角的平分线上.

填表.

技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
运用等腰三角形、直角三角形的性质，进行论证和计算			
等腰三角形和直角三角形的判定			
判定两个直角三角形全等			
作经轴对称所得的图形			

目标与评定

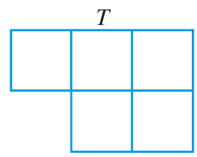
MUBIAOYUPINGDING

目标A 2.1 节 2.2 节

- 了解轴对称图形及图形的轴对称的概念，并探索图形的轴对称的性质.
- 能画出简单平面图形关于给定对称轴的对称图形.
- 了解等腰三角形的概念.
- 探索等腰三角形的轴对称性.

1. 如图所示的“天平”是轴对称图形吗？如果是，作出它的对称轴.

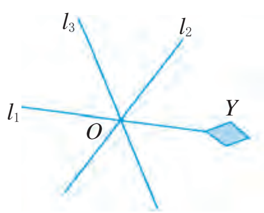
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 在图形 T 上补一个小正方形，使它成为一个轴对称图形，并画出对称轴. 你有几种方法？

3. 如图，直线 l_1，l_2，l_3 相交于一点 O，每两条直线之间所成的锐角均为 $60°$.



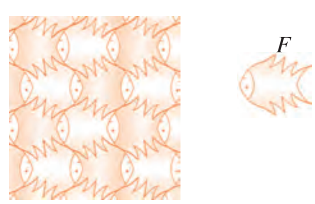
（第 3 题）

（1）先以直线 l_2 为对称轴，作与图形 Y 成轴对称的图形 Y'，再以直线 l_1 为对称轴，作与图形 Y' 成轴对称的图形 Y''.

（2）以直线 l_3 为对称轴，作与图形 Y 成轴对称的图形. 你发现了什么？

（3）设计一组图形的轴对称，使图形 Y 最终回到原来的位置，并描述这个过程.

4. 如图是一幅镶嵌图. 该镶嵌图可以由图形 F 经多次平移和轴对称得到吗？如果你认为可以，简要地描述平移和轴对称过程；否则，说明理由.

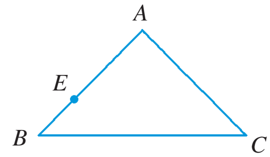


（第 4 题）

5. 如图所示的图案是一个轴对称图形（不考虑颜色），直线 l 是它的一条对称轴. 已知圆的半径为 r，求绿色部分的面积.

（第 5 题）

6. 如图，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$. 先作出它的对称轴，然后作点 E 的对称点.



（第 6 题）

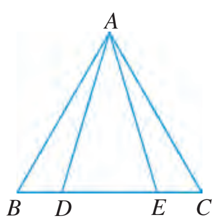
7. 已知等腰三角形的一边长为 3，另一边长为 6，求它的周长.

8. 用两块同样大小的含 30°角的直角三角尺拼出等腰三角形. 你有多少种不同的方法? 分别画出示意图，并说明理由.

目标B
2.3 节 2.4 节
2.5 节

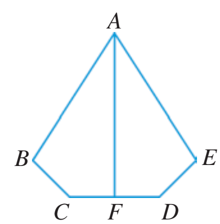
- 掌握等腰三角形的性质定理和判定定理.
- 探索等边三角形的性质定理和判定定理.
- 结合具体例子，了解逆命题的概念，会识别两个互逆命题，并知道原命题成立，其逆命题不一定成立.
- 掌握线段垂直平分线性质定理的逆定理：到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上.

9. 已知等腰三角形一个内角的度数为 54°，求其余各个内角的度数.



（第 10 题）

10. 已知：如图，B,D,E,C 在同一直线上，$AB=AC$，$AD=AE$. 求证：$BD=CE$.



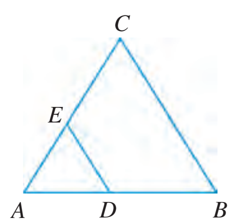
（第 11 题）

11. 已知：如图，$AB=AE$，$\angle B=\angle E$，$BC=ED$，$CF=DF$. 求证：$AF\perp CD$.

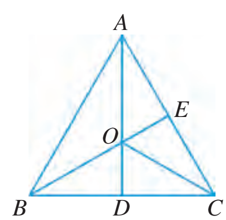
12. 求证：有两条高线相等的三角形必有两个内角相等.

13. 已知：$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线.求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，D,E 分别在 AB,AC 上，且 $DE/\!/BC$. 判断 $\triangle ADE$ 是不是等腰三角形，并给出证明.



（第 14 题）



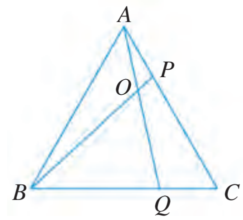
（第 15 题）

15. 已知：如图，O 为等边三角形 ABC 的两条角平分线的交点. 求证：

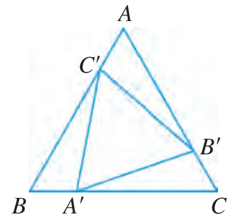
（1）OC 平分 $\angle ACB$.

（2）$OA=OB=OC$.

16. 如图,在等边三角形 ABC 的 AC,BC 边上各取一点 P,Q,使 $AP=CQ$,AQ,BP 相交于点 O. 求 $\angle BOQ$ 的度数.



(第 16 题)



(第 17 题)

17. 已知:如图,点 A',B',C' 分别在等边三角形 ABC 的三边上,且 $AC'=BA'=CB'$. 求证:$\triangle A'B'C'$ 是等边三角形.

18. 说出下列命题的逆命题,并判断原命题和逆命题的真假.

(1) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

(2) 直角三角形只有两个锐角.

(3) 有一条边和这条边上的中线对应相等的两个三角形全等.

目标C 2.6 节 2.7 节 2.8 节

- 了解直角三角形的概念.
- 探索并掌握直角三角形的性质定理: 直角三角形的两个锐角互余; 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.
- 掌握直角三角形的判定定理:有两个角互余的三角形是直角三角形.
- 探索勾股定理及其逆定理.
- 探索并掌握判定直角三角形全等的"斜边、直角边"定理.
- 掌握角平分线性质定理的逆定理:角的内部,到角两边距离相等的点在这个角的平分线上.

19. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$.

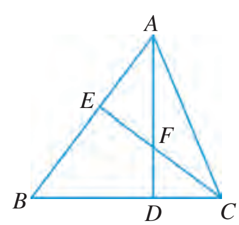
(1) 若 $AB=5$,$BC=3$,则 $AC=$______.

(2) 若 $BC=\sqrt{2}$,$AC=2$,则 $AB=$______.

20. 用刻度尺和圆规作一条长度为 $\sqrt{5}$ cm 的线段.

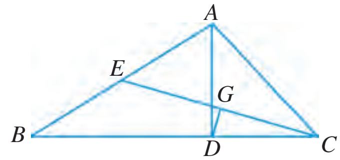
21. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$,$AB=5$,$BC=3$. 求斜边上的高线及中线的长.

22. 已知:如图,AD 是 $\triangle ABC$ 的高线,E 是 AB 上一点,CE 交 AD 于点 F,$\angle AFE=\angle B$. 求证:$CE\perp AB$.



(第 22 题)

23. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的高线，CE是AB边上的中线，$DG\perp CE$于G，$CD=AE$. 求证：$CG=EG$.



（第 23 题）

24. 已知$\triangle ABC$的三边$a=m-n\ (m>n>0)$，$b=2\sqrt{mn}$，$c=m+n$.

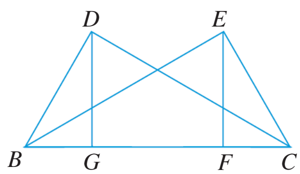
（1）求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

（2）利用第(1)题的结论，写出两个直角三角形的边长，要求它们的边长均为正整数.

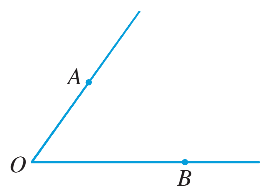
25. 如图，$CD=BE$，$DG\perp BC$，$EF\perp BC$，垂足分别为点G，F，且$DG=EF$. 判断下列结论是否正确，并给出证明.

（1）$BG=CF$.

（2）$BD=CE$.



（第 25 题）

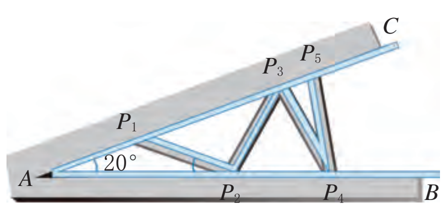


（第 26 题）

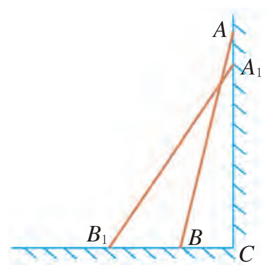
26. 已知$\angle O$及其边上两点A和B(如图). 用直尺和圆规作一点P，使点P到$\angle O$的两边距离相等，且到点A，B的距离也相等.

目标D ●初步学会综合运用等腰三角形和直角三角形的知识解决一些简单的实际问题.

27. 如图钢架中，$\angle A=20°$，焊上等长的钢条P_1P_2，P_2P_3，P_3P_4，P_4P_5…来加固钢架. 若$P_1A=P_1P_2$，问这样的钢条至多需要多少根?



（第 27 题）



（第 28 题）

28. 如图，一架 2.5米长的梯子AB斜靠在竖直的墙AC上，这时B到墙底端C的距离为 0.7 米. 如果梯子的顶端沿墙面下滑 0.4 米，那么点B将向外移动多少米?

第3章

一元一次不等式

目录 CONTENTS<<

某种礼花弹导火索的燃烧速度为0.02 m/s，点燃导火索的人需在礼花燃放前跑到10 m以外的安全区域. 如果人离开的速度为3 m/s，问导火索至少应多长?

本章将学习不等式及其基本性质，一元一次不等式和一元一次不等式组的有关知识. 通过本章的学习，我们将找到解决上述问题的方法.

3·1 认识不等式

水电站水库的水位 x(米)太低或太高时，都将影响发电机的正常运作. 如何刻画水位需满足的高度要求呢?

我们以前考虑的量与量之间的关系大多是相等关系. 在现实生活中，除了相等量的情况外，我们还经常遇到不等量的情况.

合作学习

下列问题中的数量关系能用等式表示吗? 若不能，应该用怎样的式子来表示?

(1) 图3-1是公路上对汽车的限速标志，表示汽车在该路段行驶的速度不得超过40 km/h. 用 v(km/h)表示汽车的速度，怎样表示 v 与40之间的关系?

图 3-1

(2) 据科学家测定，太阳表面的温度不低于6 000 ℃. 设太阳表面的温度为 t(℃)，怎样表示 t 与6 000之间的关系?

(3) 如图3-2，天平左盘放3个乒乓球，右盘放5 g砝码，天平倾斜. 设每个乒乓球的质量为 x(g)，怎样表示 x 与5之间的关系?

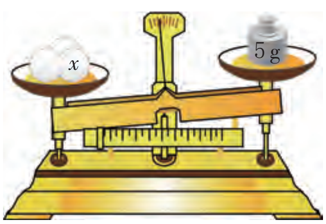


图 3-2

图 3-3

(4) 如图3-3，小聪与小慧玩跷跷板. 两人都不用力时，跷跷板左低、右高. 小聪的身体质量为 p(kg)，书包的质量为2 kg，小慧的身体质量为 q(kg)，怎样表示 p，q之间的关系?

(5) 要使代数式$\dfrac{x+3}{x-3}$有意义，x的值与3之间有什么关系?

像 $v \leqslant 40$，$t \geqslant 6\ 000$，$3x>5$，$q<p+2$，$x \neq 3$这样，用符号“<”（或“≤”），“>”（或“≥”），“≠”连接而成的数学式子，叫做**不等式**（inequality）. 这些用来连接的符号统称**不等号**（inequality symbol）.

例1 根据下列数量关系列不等式：

（1）a 是正数.

（2）y 的 2 倍与 6 的和比1 小.

（3）x^2 减去10不大于 10.

（4）设 a，b，c 为一个三角形的三条边长，两边之和大于第三边.

解 （1）$a>0$.

（2）$2y+6<1$.

（3）$x^2-10 \leqslant 10$.

（4）$a+b>c$，$a+c>b$，$b+c>a$.

做一做 ZUOYIZUO

解下列各题：

（1）已知$x_1=1$，$x_2=2$. 请在数轴上表示出x_1，x_2的位置.

（2）$x<1$表示怎样的数的全体？ $x \geqslant 2$ 表示怎样的数的全体？

$x<a$ 表示小于 a 的全体实数，在数轴上对应 a 左边的所有点，不包括 a 在内（如图 3-4）[1]；$x \geqslant a$ 表示大于或等于 a 的全体实数，在数轴上对应 a 右边的所有点，包括 a 在内（如图 3-5）；$b<x<a$（$b<a$）表示大于 b 而小于 a 的全体实数，在数轴上对应如图 3-6.

类似地，你能在数轴上分别标出与$x>a$，$x \leqslant a$ 和 $b \leqslant x<a$（$b<a$）对应的点吗？

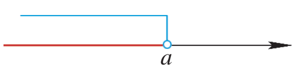


图 3-4

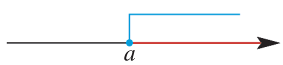


图 3-5

图 3-6

[1] 为了表示 a 为任意值，如图 3-4，图 3-5，图 3-6 这样的数轴中不标注原点和单位长度，下同.

例2 一座小水电站的水库水位在 12～20 m（包括 12 m，20 m）时，发电机能正常工作. 设水库水位为 x(m).

（1）用不等式表示发电机正常工作的水位范围，并把它表示在数轴上.

（2）当水位在下列位置时，发电机能正常工作吗？

① $x_1=8$； ② $x_2=10$； ③ $x_3=15$； ④ $x_4=19$.

用不等式和数轴给出解释.

解 （1）用不等式表示发电机能正常工作的水位范围是 $12 \leqslant x \leqslant 20$，在数轴上表示如图 3-7.

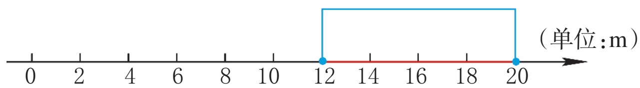


图 3-7

（2）把 $x_1=8$，$x_2=10$，$x_3=15$，$x_4=19$ 表示在数轴上，如图 3-8.

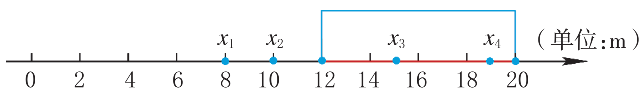


图 3-8

显然，x_3，x_4 满足不等式 $12 \leqslant x \leqslant 20$，而 x_1，x_2 不满足. 也就是说，当水位在 15 m，19 m 时，发电机能正常工作；当水位在 8 m，10 m 时，发电机不能正常工作.

课内练习 KENEILIANXI

1. 选择适当的不等号填空：

（1）2_____3.　　（2）$-\sqrt{8}$_____-3.

（3）$-a^2$_____0.　　（4）若 $x \neq y$，则 $-x$_____$-y$.

2. 根据下列数量关系列出不等式：

（1）x 的 4 倍小于 3.

（2）y 减去 1 不大于 2.

（3）x 的 2 倍与 1 的和大于 x.

（4）a 的一半不小于 -7.

3. 在数轴上表示下列不等式：

（1）$x>-3$.　　（2）$x \geqslant -\sqrt{2}$.　　（3）$x<1.5$.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 选择适当的不等号填空：

（1）8_____11.　　（2）$-\frac{10}{11}$_____$-\frac{9}{10}$.

（3）$-\sqrt{2}$_____$-\sqrt{3}$.　　（4）$(a-b)^2$_____0.

2. 用等式或不等式表示下列问题中的数量关系：

（1）某市身高不超过 1.2 m 的儿童可免费乘坐公共汽车. 记可以免费乘坐公共汽车的儿童的身高为 h(m).

（2）某农户今年的收入比去年多 1.5 万元. 记去年的收入为 p 万元，今年的收入为 q 万元.

3. 根据下列数量关系列不等式：

（1）x 的 7 倍减去 1 是正数.

（2）y 的$\frac{1}{3}$与$\frac{1}{3}$的和不大于 0.

（3）正数 a 与 1 的和的算术平方根大于 1.

（4）y 的 20%不小于 1 与 y 的和.

4. 在数轴上表示下列不等式：

（1）$x<4$.　　（2）$x\geqslant-3$.　　（3）$-2<x\leqslant4$.

B **5.** 实数 a，b 在数轴上的位置如图所示，选择适当的不等号填空.

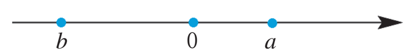
（1）a_____b.

（2）$|a|$_____$|b|$.

（3）$a+b$_____0.

（4）$a-b$_____0.

（5）ab_____0.



（第 5 题）

6. 在数轴上表示不等式 $-2\leqslant x<\sqrt{17}$ 和 x 的下列取值：-1，-2，-2.5，0，4，$4\frac{1}{2}$，并利用数轴说明，x 的这些取值中，哪些满足不等式 $-2\leqslant x<\sqrt{17}$，哪些不满足.

3·2 不等式的基本性质

对于节前图的问题，你认为 ac 是大于 bc，还是小于 bc？用几个具体的例子试试看.

合作学习

（1）已知 $a<b$ 和 $b<c$，在数轴上表示如图 3-9.

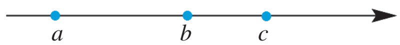


图 3-9

由数轴上 a 和 c 的位置关系，你能得出什么结论？你能举几个具体的例子说明吗？

（2）若 $a>b$，则 $a+c$ 与 $b+c$ 哪个较大？$a-c$ 与 $b-c$ 呢？请分别用数轴上点的位置关系和具体的例子加以说明.

不等式的基本性质 1　$a<b$，$b<c \Rightarrow a<c$. 这个性质也叫做不等式的传递性.

不等式的基本性质 2　**不等式的两边都加上（或减去）同一个数，所得到的不等式仍成立.**

$a>b \Rightarrow a+c>b+c$，$a-c>b-c$；

$a<b \Rightarrow a+c<b+c$，$a-c<b-c$.

做一做 ZUOYIZUO

选择适当的不等号填空：

（1）$\because$ 0_____1，

$\therefore$ a_____$a+1$（不等式的基本性质 2）.

（2）$\because$ $(a-1)^2$_____0，

$\therefore$ $(a-1)^2-2$_____-2（不等式的基本性质 2）.

现在让我们来考虑不等式的两边都乘(或都除以)同一个不为零的数的情况.

对于不等式 $2<3$,两边都乘 5(或除以 5),所得的不等式 $2\times5<3\times5$(或 $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$)仍成立吗?若两边都乘 -5(或除以 -5)呢? 再举几个例子试一试,你有什么结论?

不等式的基本性质 3　**不等式的两边都乘(或都除以)同一个正数,所得的不等式仍成立;不等式的两边都乘(或都除以)同一个负数,必须改变不等号的方向,所得的不等式成立.**

$$a>b,\text{且 } c>0 \Rightarrow ac>bc,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c};$$

$$a>b,\text{且 } c<0 \Rightarrow ac<bc,\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

例　已知 $a<0$,试比较 $2a$ 与 a 的大小.

分析　比较 $2a$ 与 a 的大小,可以利用不等式的基本性质,也可以利用数轴,直接得出 $2a$ 与 a 的大小.

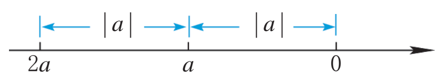


图 3-10

解法一　$\because$　$2>1$,$a<0$(已知),

$\therefore$　$2a<a$(不等式的基本性质 3).

解法二　在数轴上分别表示 $2a$ 和 a 的点($a<0$),如图 3-10.

$2a$ 位于 a 的左边,所以 $2a<a$.

想一想

还有其他比较 $2a$ 与 a 的大小的方法吗?

课内练习 KENEILIANXI

1. 填空:

(1) 若 $x+1>0$,两边都加上 -1,得________________
(依据:____________).

(2) 若 $2x>-6$,两边都除以 2,得________________
(依据:____________).

（3）若$-\frac{1}{3}x\leq\frac{1}{2}$，两边都乘$-3$，得____________________

（依据：________________）.

2. 选择适当的不等号填空：

（1）若 $a-b>0$，则 a______b.

（2）若 $a>-b$，则 $a+b$______0.

（3）若$-a<b$，则 a______$-b$.

（4）若$-a>-b$，则 $2-a$______$2-b$.

（5）若 $a>0$，且$(1-b)a<0$，则 b______1.

（6）若 $a<b$，$b<2a-1$，则 a______$2a-1$.

探究活动 TANJIUHUODONG

比较等式与不等式的基本性质.

例如，等式是否有与不等式的基本性质1类似的传递性？不等式是否有与等式的基本性质类似的移项法则？你可以用列表的方式进行对比.

（请与你的同伴交流）

作业题 ZUOYETI

A

1. 选择适当的不等号填空：

（1）若 $a>b$，则 b______a.

（2）若 $a>b$，且 $b>c$，则 a______c.

2. 按下列条件，写出仍能成立的不等式：

（1）$\sqrt{7}>\sqrt{5}$，两边都减去$\sqrt{5}$，得____________.

（2）$x+\frac{1}{2}<0$，两边都加上$\left(-\frac{1}{2}\right)$，得____________.

（3）$\frac{9m}{7}>\frac{4n}{3}$，两边都乘 21，得____________.

（4）$-0.9<-0.3$，两边都除以(-0.3)，得____________.

（5）$-\frac{8}{7}x\leq1$，两边都乘$\left(-\frac{7}{8}\right)$，得____________.

3. 某品牌计算机键盘的单价在 60 元至 70 元之间（包括 60 元和 70 元），买 3 个这样的键盘需要多少钱（用适当的不等式表示）？

4. 若 $x>y$，比较 $2-3x$ 与 $2-3y$ 的大小，并说明理由.

B **5.** 若 $x<y$，且 $(a-3)x>(a-3)y$，求 a 的取值范围.

6. 老王和小张在同一家公司工作. 老王每月的工资比小张高，但不到他的两倍. 新一年开始时，公司给他们同时加薪 10%，问加薪后老王的工资仍比小张的工资高，但低于两倍吗？请说明理由. 如果每人各加薪 200 元呢？

3·3 一元一次不等式

某种光盘的存储容量为 670 MB[1]. 若平均每个文件占用空间为 13 MB，这张光盘至多能存放多少个这样的文件？

1

观察下列不等式：

（1）$x>4$.　　（2）$3x>30$.

（3）$\frac{2x+1}{3}<\frac{x}{2}$.　　（4）$1.5x+12<0.5x+1$.

这些不等式有哪些共同的特征？请将它们与一元一次方程比较.

不等号的两边都是整式，而且只含有一个未知数，未知数的最高次数是一次，这样的不等式叫做**一元一次不等式**(linear inequality in one unknown). 能使不等式成立的未知数的值的全体叫做**不等式的解集**，简称为**不等式的解**. 例如，$3x>30$ 的解是 $x>10$，表示大于 10 的实数的全体，在数轴上表示如图 3-11.

> **想一想**
>
> 把 $x=10.1$ 代入不等式 $3x>30$，不等式成立吗？能否因此就说该不等式的解是 $x=10.1$？

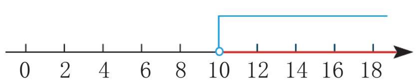


图 3-11

[1] MB 是计算机储存信息的容量单位，表示百万字节.

例1 解下列不等式，并把解表示在数轴上.

（1）$4x<10$.　　　　（2）$-\frac{3}{5}x\geqslant 1.2$.

分析 解不等式就是利用不等式的基本性质，把要求解的不等式变形成“$x>a$”（或“$x\geqslant a$”），“$x<a$”（或“$x\leqslant a$”）的形式.

解 （1）两边都除以 4，得 $x<\frac{5}{2}$.

不等式的解表示在数轴上如图 3-12 所示.

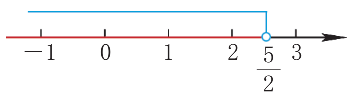


图 3-12

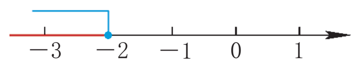


图 3-13

（2）两边都除以 $-\frac{3}{5}$，得 $x\leqslant -2$.

不等式的解表示在数轴上如图 3-13 所示.

例2 解不等式 $7x-2\leqslant 9x+3$，把解表示在数轴上，并求出不等式的负整数解.

解 先在不等式的两边都加上 $-9x$，再在不等式的两边都加上 2，得 $7x-9x\leqslant 3+2$.

合并同类项，得 $-2x\leqslant 5$.

两边都除以 -2，得 $x\geqslant -\frac{5}{2}$.

不等式的解表示在数轴上如图 3-14 所示. 不等式的负整数解是 $x=-1$ 和 $x=-2$.

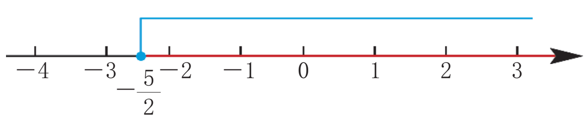


图 3-14

由例 2 可以看到，把不等式中的任何一项的符号改变后，从不等号的一边移到另一边，所得到的不等式仍成立（图 3-15）. 也就是说，在解不等式时，移项法则同样适用.

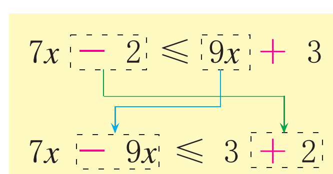


图 3-15

课内练习 KENEILIANXI

1. 解下列不等式，并把解表示在数轴上.

（1）$1-x>2$.

（2）$-\frac{1}{7}x\leqslant 1$.

（3）$6x-1>9x-4$.

2. 下列不等式的解法正确吗？如果不正确，请改正.

（1）$-2x<-4$.

解：两边都除以-2，得 $x<2$.

（2）$x+1>2x-3$.

解：移项，得 $4>x$，即 $x>4$.

3. 解不等式 $2.5x-4<\frac{1}{2}x-1$，把解表示在数轴上，并求出适合不等式的正整数解.

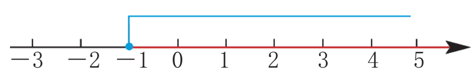
作业题 ZUOYETI

A **1.** 填空：

（1）不等式 $3x>1$ 的解是____________，不等式 $-x>3$ 的解是____________.

（2）不等式 $x+1\geqslant 3$ 的解是____________，不等式 $2<x-1$ 的解是____________.

（3）一个不等式的解在数轴上表示如图，则这个不等式的解是____________.



（第 1(3)题）

2. 解下列不等式，并把解表示在数轴上.

（1）$-\frac{1}{2}x<1$.

（2）$3x-1\geqslant 2x+4$.

（3）$5x-2>11x+3$.

3. 解不等式 $0.5x-3>-14-2.5x$，把解表示在数轴上，并求出适合不等式的最小负整数和最小正整数.

4. 解答节前语中的问题.

B 5. 写出两个解为 $x>8$ 的不等式.

6. 某批服装的进价为每件 200 元,商店标价每件 300 元出售. 现商店准备将这批服装降价出售，但要保证毛利润不低于 5%. 问售价最低可按标价的几折?

②

解一元一次不等式与解一元一次方程的步骤类似. 解一元一次不等式的一般步骤和根据如下：

	步　骤	根　据
1	去分母	不等式的基本性质3
2	去括号	单项式乘多项式法则
3	移项	不等式的基本性质2
4	合并同类项,得 $ax>b$,或 $ax<b$ $(a\neq 0)$	合并同类项法则
5	两边同除以a $\left(\text{或乘}\dfrac{1}{a}\right)$	不等式的基本性质3

注　意

当 $a<0$ 时，不等式中的不等号必须改变方向. 这是与解一元一次方程的不同之处.

例3　解不等式 $3(1-x)>2(1-2x)$.

解　去括号,得　$3-3x>2-4x$.

移项,得　$-3x+4x>2-3$.

合并同类项,得　$x>-1$.

例4　解不等式$\dfrac{1+x}{2}\leqslant\dfrac{1+2x}{3}+1$,并把解在数轴上表示出来.

解　去分母,得　$3(1+x)\leqslant 2(1+2x)+6$.

去括号,得　$3+3x\leqslant 2+4x+6$.

移项,得　$3x-4x\leqslant 2+6-3$.

合并同类项,得　$-x\leqslant 5$.

两边都除以-1,得　　　$x \geqslant -5$.

这个不等式的解表示在数轴上如图 3-16 所示.

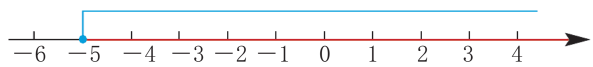


图 3-16

课内练习 KENEILIANXI

解下列不等式,并把解在数轴上表示出来.

(1) $5x-3<1-3x$.　　　　(2) $\frac{1}{3}y \geqslant 1-\frac{1}{2}y$.

(3) $3(1-3x)-2(4-2x) \leqslant 0$.　　　　(4) $\frac{2x-1}{4}-\frac{1+x}{6} \geqslant 1$.

(5) $\frac{1}{6}(2-m)-3 \geqslant \frac{m}{10}$.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 解下列不等式,并把解在数轴上表示出来.

(1) $3x-5<2(2+3x)$.

(2) $3(5-x)>2(x-2)-4$.

2. 解下列不等式,并把解在数轴上表示出来.

(1) $\frac{2+x}{2} \geqslant \frac{2x-1}{3}$.

(2) $x-\frac{x+2}{2}<\frac{2-x}{3}$.

3. 求适合不等式 $3(2+x)>2x$ 的最小负整数.

B **4.** 一次生活常识知识竞赛一共有 20 道题,答对一题得 5 分,不答得 0 分,答错扣 2 分. 小聪有 1 道题没答,竞赛成绩超过 80 分,则小聪至多答错了几道题?

5. 解下列不等式:

(1) $1-\frac{0.1x+1}{0.4}>\frac{1-0.15x}{0.5}$.

(2) $x(x-1) \leqslant (x+1)^2$.

3

合作学习

一部电梯的额定限载量为 1 000 千克. 两人要用电梯把一批重物从底层搬到顶层，这两人的身体质量分别为 60 千克和 80 千克，货物每箱的质量为 50 千克，问他们每次最多只能搬运重物多少箱？

建议讨论下列问题：

（1）选择哪一种数学模型？是列方程，还是列不等式？

（2）问题中有哪些相等的数量关系和不等的数量关系？

应用一元一次不等式可以刻画和解决很多实际生活中的有关数量不等关系的问题.

例5 有一家庭工厂投资 2 万元购进一台机器，生产某种商品. 这种商品每个的成本是 3 元，出售价是 5 元，应付的税款和其他费用是销售收入的 10%. 问至少需要生产、销售多少个这种商品，才能使所获利润（毛利润减去税款和其他费用）超过投资购买机器的费用？

分析 每生产、销售一个这种商品的利润是$(5-3-5\times10\%)$元，因此生产、销售 x 个这种商品的利润是$(5-3-5\times10\%)x$ 元. 问题中不等的数量关系是：

所获利润＞购买机器款.

利用这个不等关系就可以列出关于 x 的一元一次不等式.

解 设生产、销售这种商品 x 个，则所得利润为$(5-3-5\times10\%)x$ 元.

由题意，得 $(5-3-5\times10\%)x>20\,000$，

解得 $x>13\,333.\dot{3}$.

答：至少要生产、销售这种商品 13 334 个.

课内练习 KENEILIANXI

1. 在爆破时，如果导火索燃烧的速度是0.015 m/s，人跑开的速度是3 m/s，那么要使点导火索的施工人员在点火后能够跑到100 m以外(包括100 m)的安全地区，这根导火索的长度至少应取多少米?

2. 写出一个包含不等关系的实际问题，列出一元一次不等式，并求解.

作业题 ZUOYETI

A

1. 已知一种卡车每辆至多能载 3 吨货物. 现有 100 吨黄豆，若要一次运完这批黄豆，至少需要这种卡车多少辆?

2. 某企业向银行贷款 1 000 万元，一年后归还银行贷款的本利和超过1 040 万元. 问年利率在怎样的一个范围内?

3. 商店里一种 12 瓦(即 0.012 千瓦)节能灯的亮度相当于 60 瓦(即 0.06 千瓦)的白炽灯. 节能灯售价 20 元，白炽灯售价 5 元. 如果电价是 0.5 元/ 千瓦时，问节能灯使用多少时间后，总费用(售价加电费)比选用白炽灯的费用节省(电灯的用电量＝千瓦数×用电时数)?

B

4. A，B，C，D 四座小山的山脚到学校的路程分别是 9 km，11 km，13 km，15 km. 学校准备组织一次八年级学生登山活动，计划在上午 8 时出发，以平均每小时 4 km 的速度前进，登山和在山顶活动的时间为 1 小时，下山的时间为 30 分钟，再以平均每小时 3 km 的速度返回，在下午 4 时 30 分前赶回学校. 你认为学校可计划登哪几座山? 请说明理由.

3·4 一元一次不等式组

一个长方形足球训练场的长为 x(m),宽为 70 m. 如果它的周长大于 350 m,面积小于 7 560 m^2,你能确定 x 的取值范围吗?

在现实生活中，我们会遇到一个未知数需要同时满足若干个不等式的情况,如节前语的问题,我们可以列出两个不等式:

$$\begin{cases}2(x+70)>350,\\70x<7\,560.\end{cases}$$

一般地,由几个含同一未知数的一元一次不等式所组成的一组不等式,叫做**一元一次不等式组**. 例如,$\begin{cases}3x-2>1-2x,\\x\geqslant 0,\end{cases}$ $\begin{cases}3.5x<5x-2,\\\dfrac{1-x}{2}>\dfrac{x-3}{3}\end{cases}$ 都是一元一次不等式组.

组成不等式组的各个不等式的解的公共部分就是**不等式组的解**. 当它们没有公共部分时,我们称这个不等式组无解.

例1 解一元一次不等式组 $\begin{cases}3x+2>x, & ①\\\dfrac{1}{3}x\leqslant 2. & ②\end{cases}$

分析 根据一元一次不等式组的解的意义,我们只要分别求出①,②两个不等式的解,并把解表示在同一条数轴上,两个不等式的解的公共部分即为不等式组的解.

解 解不等式①,得 $x>-1$.

解不等式②,得 $x\leqslant 6$.

把①,②两个不等式的解表示在数轴上,如图 3-17.

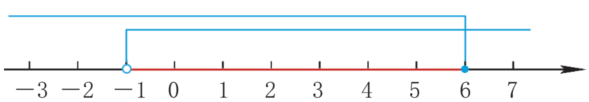


图 3-17

所以原不等式组的解是 $-1<x\leqslant 6$.

例2 解一元一次不等式组 $\begin{cases} 3-5x > x-2(2x-1), & ① \\ \dfrac{3x-2}{4} > 2.5-\dfrac{x}{2}. & ② \end{cases}$

解 解不等式①,去括号,得 $3-5x > x-4x+2$.

移项、整理,得 $-2x > -1$.

$\therefore \quad x < \dfrac{1}{2}$.

解不等式②,去分母,得 $3x-2 > 10-2x$.

移项、整理,得 $5x > 12$.

$\therefore \quad x > \dfrac{12}{5}$.

把①,②两个不等式的解表示在数轴上,如图 3-18.

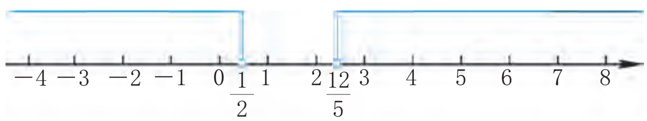


图 3-18

所以原不等式组无解.

课内练习 KENEILIANXI

1. 利用数轴,求出满足下列各组不等式的x值的公共部分.

(1) $\begin{cases} x > -3, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x > -2, \\ x > -1. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x < -\sqrt{10}, \\ x < -3. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x < -\dfrac{1}{2}, \\ x \geqslant 1.5. \end{cases}$

2. 解下列一元一次不等式组:

(1) $\begin{cases} 2x-1 > x+1, \\ x+8 < 4x-1. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x-2 > 3(x+1), \\ \dfrac{1}{2}x-1 \leqslant 7-\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$

3. 解答本节节前语中的问题,并判断这个足球训练场的尺寸是否符合国际足球比赛的要求(注:用于国际比赛的足球场的长在 100 m 到 110 m 之间,宽在 64 m 到 75 m 之间).

探究活动 TANJIUHUODONG

解由两个一元一次不等式组成的不等式组，在取各个不等式的解的公共部分时，有几种不同情况？

若$m<n$，你能说出下列四种情况下不等式组的解吗？借助数轴来寻找结果.

（1）$\begin{cases}x>m,\\x<n.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x>m,\\x>n.\end{cases}$ （3）$\begin{cases}x<m,\\x<n.\end{cases}$ （4）$\begin{cases}x<m,\\x>n.\end{cases}$

（请与你的同伴交流）

作业题 ZUOYETI

A **1.** 利用数轴，分别求出满足下列各组不等式的 x 值的公共部分.

（1）$\begin{cases}x>-2,\\x>1.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x<-1.5,\\x\leqslant-\sqrt{2}.\end{cases}$ （3）$\begin{cases}x\geqslant-3,\\x<1.\end{cases}$ （4）$\begin{cases}x\leqslant-\sqrt{3},\\x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$

2. 解下列一元一次不等式组：

（1）$\begin{cases}3x-2>4x,\\3-5x>3x-5.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}5x+5\geqslant3x-2,\\1-2x>3x.\end{cases}$

（3）$\begin{cases}2(1-3x)\leqslant4x+1,\\2x-1>3(1-3x).\end{cases}$ （4）$\begin{cases}\dfrac{1-5x}{2}\geqslant\dfrac{3x+1}{3}-1,\\3(x-1)\leqslant5(x+1)-2.\end{cases}$

3. 若不等式组$\begin{cases}x>-a,\\x\geqslant-b\end{cases}$的解为$x\geqslant-b$，则下列各式正确的是（　　）

（A）$a>b$. （B）$a<b$. （C）$b\leqslant a$. （D）$a\leqslant b$.

B **4.** 解下列一元一次不等式组：

（1）$\begin{cases}x-2(x-3)>4,\\\dfrac{x}{2}-(x+1)\leqslant2-x.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}6-5\left(x-\dfrac{1}{5}\right)>-7x,\\3x-\dfrac{10x-5}{5}\geqslant\dfrac{4-2x}{2}.\end{cases}$

5. 检测游泳池的水质，要求三次检验的 pH 的平均值不小于 7.2，且不大于 7.8. 前两次检验，pH 的读数分别是 7.4，7.9，那么第三次检验的 pH 应该为多少才能合格？

谁将获得最后一个小组出线名额

2010 年男篮世锦赛上，中国队与土耳其、俄罗斯、希腊、波多黎各、科特迪瓦同分在 C 组. 在小组赛阶段，土耳其、俄罗斯、希腊三队相继出线后，C 组就只剩下一个出线名额，此时，中国队以 83∶73 胜科特迪瓦队，76∶84 负波多黎各队. 最后一场比赛，科特迪瓦对波多黎各即将进行. 谁将获得 C 组最后一个出线名额？中国队能出线吗？

按照世锦赛规定，若波多黎各队胜（或平）科特迪瓦队，则波多黎各队无疑将获得 C 组的最后一个出线名额；若科特迪瓦队胜波多黎各队，则中国、波多黎各、科特迪瓦三队同积 6 分，那么将比较这三个队相互比赛的总得失分率的大小，总得失分率最高者获得小组出线名额.

在科特迪瓦队胜波多黎各队的情况下，两队的分差为多少时，中国队才能获得出线名额？我们可以运用一元一次不等式的知识来进行预测.假设在这场比赛中，波多黎各队得 a 分，科特迪瓦队与波多黎各队的分差为 x 分（$x>0$）.

由此，三队的总得失分率如下：

中国队的总得失分率为 $\dfrac{83+76}{73+84}=\dfrac{159}{157}$；

科特迪瓦队的总得失分率为 $\dfrac{a+x+73}{83+a}$；

波多黎各队的总得失分率为 $\dfrac{a+84}{a+x+76}$.

要使中国队出线，则必须有：

$$\frac{a+84}{a+x+76}<\frac{159}{157}，且\ \frac{a+x+73}{83+a}<\frac{159}{157}.$$

$\because \quad a+x+76>0, 83+a>0,$

由不等式的性质，得

$$\begin{cases} a+x+76>\dfrac{157}{159}(a+84), & ① \\ a+x+73<\dfrac{159}{157}(83+a). & ② \end{cases}$$

由①②，得 $\dfrac{1104-2a}{159}<x<\dfrac{1736+2a}{157}$.

也就是说，当波多黎各队得 a 分时，若得分差 x 在上述范围内，中国队出线. 例如，取 $a=75$，则当分差在 $7\leqslant x\leqslant 12$（x 是整数）时，中国队出线.

在科特迪瓦队与波多黎各队的比赛还剩 8 秒时，波多黎各队得 78 分，科特迪瓦队得 88 分，球权在波多黎各队，这时坐在电视机前观看比赛的一位球迷开始欢呼："中国队出线了！"你知道他是怎样判断的吗？

数学无处不在，数学就在我们的身边. 当你运用数学解决了生活中一个个疑难问题后，你一定能体会到数学的无穷魅力.

在你的日常生活中，有哪些事例可以用一元一次不等式的知识来解决？举出一个实际问题，并给出解决问题的具体过程.

小结

XIAOJIE

填空.

1．用符号“<”(或“≤”),“>”(或“≥”),“≠”连接而成的数学式子,叫做______________.这些用来连接的符号统称______________.

2. 不等式的基本性质1:若 $a<b$,____________,则 $a<c$,这个性质叫做______________.

不等式的基本性质2:不等式的两边都加上(或减去)同一个__________,所得的不等式仍成立.

不等式的基本性质3:不等式的两边都乘(或除以)同一个____________,所得的不等式仍成立;不等式的两边都乘(或除以)同一个负数,必须_______________,所得的不等式成立.

3. 不等式的两边都是整式,而且只含有______未知数,未知数的最高次数是______的不等式,叫做一元一次不等式. 能使不等式成立的未知数的值的全体叫做______________.

4. 解一元一次不等式的一般步骤:(1)_________. (2)_________. (3)_________. (4)_______________. (5)_______________.

5. 一般地,由几个_______________的一元一次不等式所组成的一组不等式,叫做一元一次不等式组. 组成不等式组的各个不等式的解的_________就是不等式组的解.

填表.

技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
用不等式表示不等量关系			
解简单的一元一次不等式(组),并用数轴表示不等式(组)的解			
应用一元一次不等式解决简单的实际问题			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 3.1节 3.2节

●能根据具体问题中的大小关系了解不等式的意义.

●会用数轴表示“$x>a$”“$x\leqslant a$”“$b<x<a$”这类简单不等式.

●会用不等式的基本性质进行简单的不等式变形.

1. 选用适当的不等号填空:

(1) $-\sqrt{10}$____$-\pi$.

(2) $-x^2$____0.

(3) $m-7$____$m+6$.

(4) $(m+1)^2$____$-2(m+1)^2$.

2. 用不等式表示:

(1) 0大于-3.

(2) x减去y不大于-4.

(3) a的-2倍与-1的和是非负数.

(4) a的$\frac{1}{2}$与b的平方的和为正数.

3. 按照下列条件,根据不等式的基本性质,写出成立的不等式.

(1) $x-y>1$,两边同加上y.

(2) $-\frac{1}{6}a-1>\frac{1}{2}b$,两边同乘$-6$.

(3) $-0.4>-0.8$,两边同除以-0.4.

(4) $6x-3>1-x$,两边同加上$x+3$,再同除以7.

4. 在数轴上表示下列不等式:

(1) $x<5$. (2) $x\geqslant -3$. (3) $-5<x\leqslant 1$.

目标B 3.3节 3.4节

●会解简单的一元一次不等式,并能在数轴上表示出解.

●会解由两个一元一次不等式组成的不等式组,并会用数轴确定解.

5. 解下列一元一次不等式,并把解在数轴上表示出来.

(1) $7-2x>6$. (2) $5x+3<3(2+x)$.

(3) $\frac{1}{3}(2x-1)\geqslant\frac{3}{5}x$. (4) $\frac{x+1}{2}\leqslant\frac{2-x}{6}+1$.

6. 利用数轴,解下列一元一次不等式组:

(1) $\begin{cases}2x+4<0,\\1-2x>0.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{3x+14}{4}>2x-9,\\4x+6\geqslant 3x+7.\end{cases}$

7. 求适合不等式组$\begin{cases}2x+1<3x+3,\\ \dfrac{2}{3}(x-1)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$的 x 的整数值.

目标C

● 能根据具体问题中的数量关系，列出一元一次不等式解决简单的应用问题.

8. 小聪用 100 元钱去购买笔记本和钢笔共 30 件. 已知每本笔记本 2 元,每支钢笔 5 元. 问小聪最多能买几支钢笔?

9. 两根木棒的长分别是 5 cm 和 7 cm. 要选择第三根木棒,将它们首尾相接钉成一个三角形. 若第三根木棒的长为偶数,则第三根木棒长的取值情况有几种?

10. 某业主贷款 2.2 万元购进一台机器,生产某种产品. 已知产品的成本是每个 5 元,售价是每个 8 元,应付的税款和其他费用是售价的 10%. 若每个月能生产、销售 2 000 个产品,问至少几个月后能赚回这台机器的贷款?

第 4 章

图形与坐标

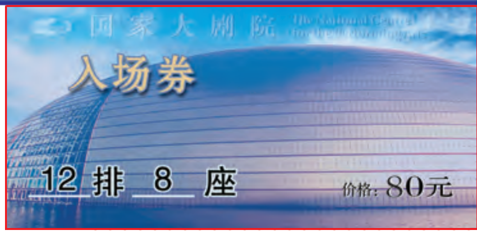
目录 CONTENTS<<

如果给你一张国家大剧院的入场券，根据入场券的排号和座号，你能确定应该入座的位置吗？

人们在生活、生产实践中经常需要确定物体的位置. 利用有序实数对来确定位置是最常用的方法之一，用有序实数对表示平面内点的位置就是平面直角坐标系的基本思想.

本章将探索确定物体位置的方法，学习平面直角坐标系，以及在坐标平面内图形的平移和轴对称.

4·1 探索确定位置的方法



如果你去国家大剧院观看演出，那么你将根据入场券上的什么信息找到你的座位？

生活中我们常常需要确定物体的位置，如棋盘上棋子的位置，影院里的座位，城市地图上车站、学校、医院、风景区的位置等.

（1）怎样描述你在教室里的座位？需要几个数据？

（2）你知道在生活中，确定物体的位置有哪些方法？

要确定物体在平面上的位置，一般有两种常用的方法.

一种方法是用第几行、第几列来确定物体的位置，如影院、体育场等入场券上的“12 排 8 座”“8 排 15 座”等. 为了使这种确定位置的方法更加简明，我们可以规定排号写在前面，座号写在后面，把它们记为一个有序数对(12,8)，(8,15)，那么每一个座位都对应着一个有序的数对，在一定范围内每一个这样的数对就能确定一个座位的位置. 也就是说，可以用有序数对确定物体的位置.

另一种方法是用方向和距离来确定物体的位置(或称方位). 例如，在图 4-1中，航标灯的方位可以由距小岛 15 km 和在小岛的南偏西 60°方向这两个数据来确定. 我们说航标灯在小岛的南偏西 60°方向的 15 km 处.

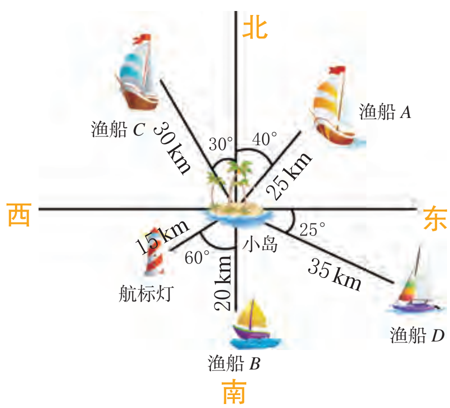
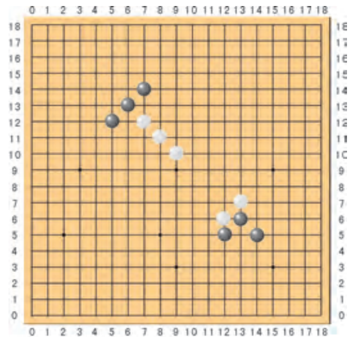


图 4-1

做一做 ZUOYIZUO

1. 若规定排号写在前面,座号写在后面,则(6,20)表示第几排第几座?(2,18)与(18,2)表示同一个座位吗?

2. 规定行号写在前面,列号写在后面,用有序数对依次表示图中从左到右各枚黑棋子的位置.



(第2题)

3. 如图4-1.

(1)渔船 A 相对小岛的位置应怎样表述?

(2)小岛的南偏东65°方向,距离小岛35 km处是什么物体?

合作学习 HEZUOXUEXI

图4-2是城市中某区域局部示意图(各地点用点表示).借助刻度尺、量角器,以2~4人为一组合作解决下面的问题:

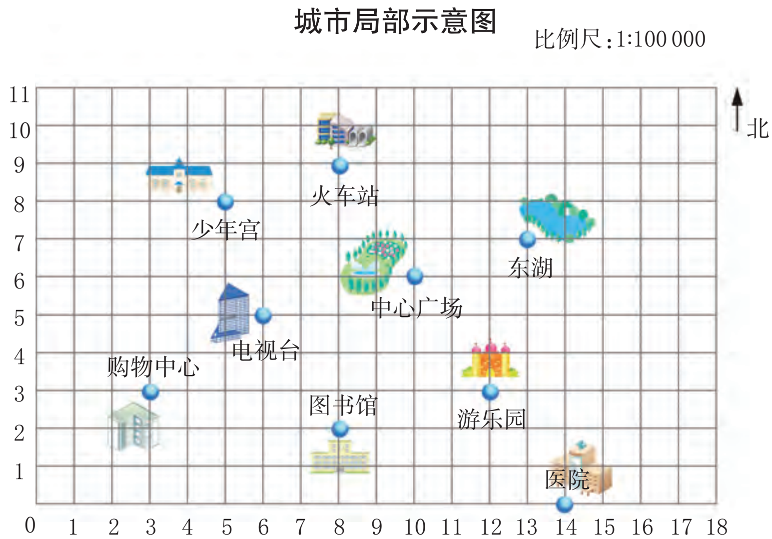


图4-2

（1）如果规定列号写在前面，行号写在后面，用数对的方法表示中心广场、少年宫、图书馆和火车站的位置.

（2）购物中心位于中心广场的南偏西多少度的方向上？到中心广场的图上距离大约是多少厘米？实际距离是多少？

（3）东湖位于中心广场的北偏东多少度的方向上？到中心广场的图上距离大约是多少厘米？实际距离是多少？

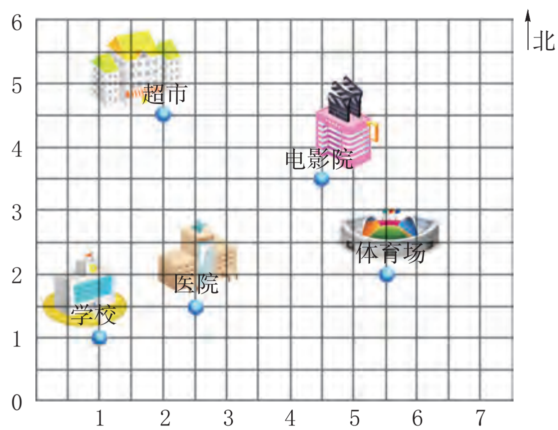
（4）中心广场的南偏东约 34°方向上，到中心广场的实际距离约 3 600 米处是什么地方？

课内练习 KENEILIANXI

1. 如图是城市中某区域的示意图. 规定列号写在前面，行号写在后面.

（1）用数对的方法表示学校、体育场和超市的位置.

（2）数对(4.5,3.5),(2.5,1.5)在图上表示什么地方？



（第 1 题）

2. 某邮轮 8:00 从 A 港出发向西航行，10:00 折向北航行，平均航速均为 20 千米/时. 问 11:30 该邮轮在什么位置？请先画出航线示意图，然后量出邮轮相对于 A 港的方位，并算出距离（方位角精确到度）.

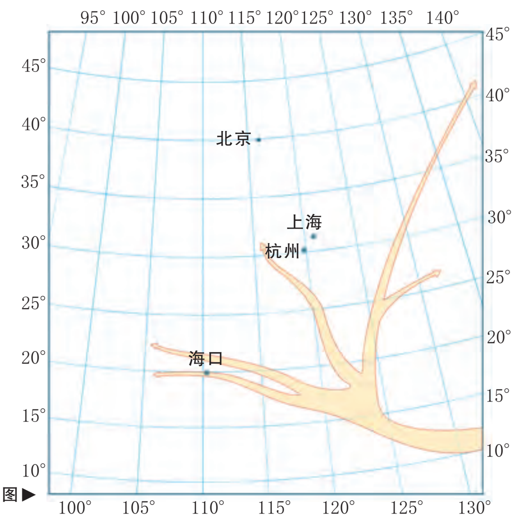
探究活动 TANJIUHUODONG

把一个地点的东经度写在前面，北纬度写在后面，并用括号括起来，就组成一对有序的数对，可以用来表示一个地点的位置. 如杭州大致位于北纬 30°，东经 120°，记做(120，30)(如图 4-3).

(1) 怎样用有序数对表示海口、北京的位置?

(2) 据气象报告，2012 年 8 月 9 日 20 时，台风“海葵”的中心位于北纬 30.7°，东经117.5°. 用有序数对(东经度写在前面)表示台风中心的位置，并在图 4-3 上标出台风中心.

(3) 图中黄色路线表示西北太平洋台风移动的主要路径. (120，23.7)，(105，30)，(110，21.6) 各地点是否位于这条路径上?

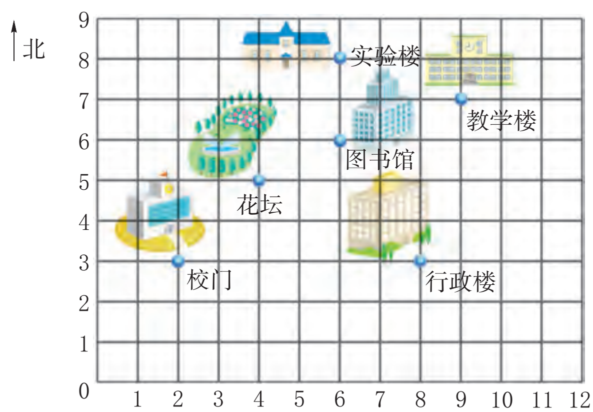


西北太平洋台风移动的主要路径图▶

图 4-3

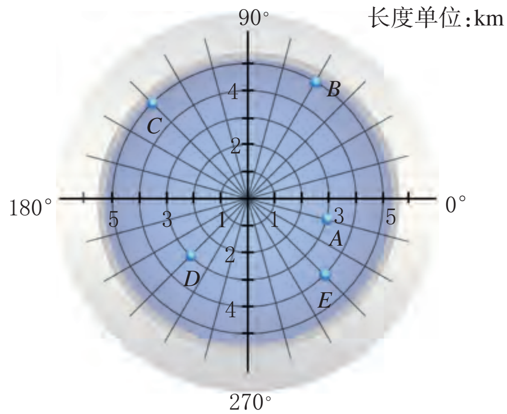
作业题 ZUOYETI

A 1. 如图为某校局部分布图. 如果规定列号写在前面，行号写在后面，试用数对的方法表示出图中各个地点的位置.

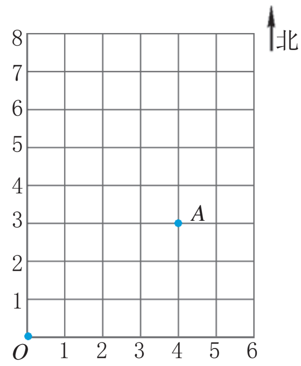


(第 1 题)

2. 如图是雷达探测器在一次探测中发现的五个目标. 试用适当的方法分别表示 A,B,C,D,E 这五个目标的位置.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 根据图象回答下面的问题:

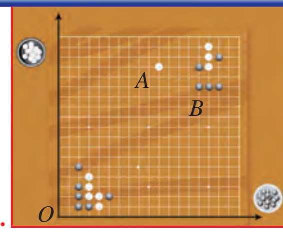
（1）用两种不同方法表示点 A 相对于点 O 的位置.

（2）如果规定列号写在前面，行号写在后面，已知点 B 的位置为 $(3,5)$. 在图中画出点 B 的位置，并求点 B 到点 O 的距离，量出点 B 相对于点 O 的方位.

B 4. 如图是某地街道分布示意图，点 A 表示第 1 街和第 4 大道的十字路口，记为$(1,4)$，点 B 表示第 6 街与第 2 大道的十字路口，记为$(6,2)$. 我们可以用$(1,4)\to(1,3)\to(2,3)\to(3,3)\to(4,3)\to(4,2)\to(5,2)\to(6,2)$ 来表示由 A 到 B 的一条路径. 请在图上画出这条路径. 你能用同样的方式写出由 A 到 B 的其他几条路径吗? 请至少写出三条.

（第 4 题）

4·2 平面直角坐标系



围棋在我国春秋战国时期已经广为流行. 若在围棋盘上画上如图两条数轴(以小方格边长为单位),并规定列号写在前面,你将怎样表示点 O,白棋 A 和黑棋 B 的位置?

1

在数学上,我们可以用如下的方法来表示平面内点的位置. 如图 4-4,在平面内画两条互相垂直,并且有公共原点 O 的数轴,其中一条叫做 **x 轴**(x-axis,又叫**横轴**),通常画成水平,另一条叫做 **y 轴**(y-axis,又叫**纵轴**),画成与 x 轴垂直. 这样,我们就在平面内建立了**平面直角坐标系**(plane rectangular coordinate system),简称直角坐标系. 坐标系所在的平面就叫做**坐标平面**(coordinate plane),两坐标轴的公共原点 O 叫做直角坐标系的原点.

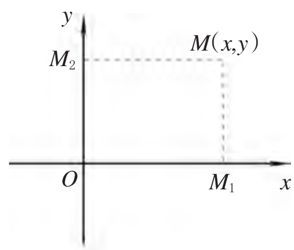


图 4-4

对于平面内任意一点 M(图 4-4),作 $MM_1 \perp x$ 轴,$MM_2 \perp y$ 轴,设垂足 M_1, M_2 在各自数轴上所表示的数分别为 x, y,则 x 叫做点 M 的**横坐标**(abscissa),y 叫做点 M 的**纵坐标**(ordinate),有序实数对 (x,y) 叫做点 M 的**坐标**(coordinate).

建立了平面直角坐标系后,对于坐标平面内任何一点,我们可以确定它的坐标. 反过来,对于任何一个坐标,我们可以在坐标平面内确定它所表示的一个点.

x 轴和 y 轴把坐标平面分成四个**象限**(quadrant),如图 4-5. 象限以数轴为界,x 轴,y 轴上的点不属于任何象限. 四个象限中点的坐标的符号特征如表 4-1.

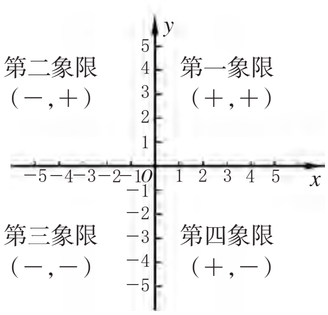


图 4-5

表 4-1

象限 \ 点 (x,y)	x,y 的符号
第一象限	(+,+)
第二象限	(−,+)
第三象限	(−,−)
第四象限	(+,−)

坐标的思想是法国数学家和哲学家笛卡尔(Descartes,1596～1650 年)创立的.

例1 (1) 如图 4-6,写出平面直角坐标系内点 M,N,L,O,P 的坐标.

(2) 在平面直角坐标系内画出点 $A(2,4)$,$B(5,2)$,$C(-3.5,0)$,$D(-3.5,-2)$.

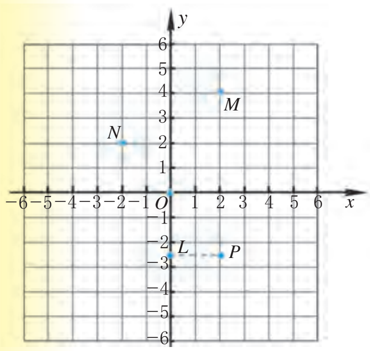


图 4-6

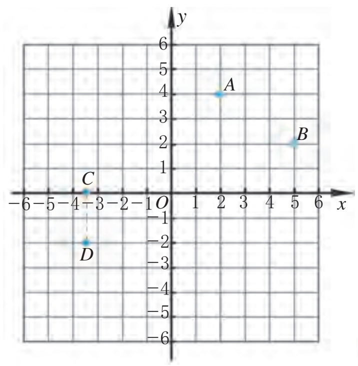


图 4-7

想一想

点(2,4)与点(4,2)是不是同一个点？点(−2,4)与点(2,−4)呢？

解 (1) 如图 4-6,所求各点的坐标为:$M(2,4)$,$N(-2,2)$,$L(0,-2.5)$,$O(0,0)$,$P(2,-2.5)$.

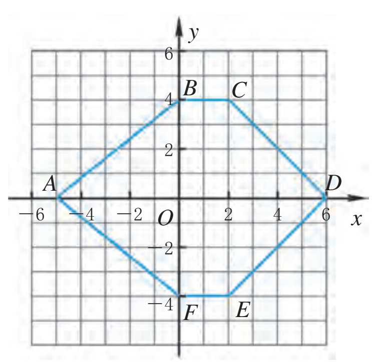
(2) A,B,C,D 各点的位置如图 4-7.

课内练习 KENEILIANXI

如图.

(1) 写出图中六边形各个顶点的坐标. 它们各在哪个象限内或坐标轴上？哪些点的横坐标相同？哪些点的纵坐标相同？

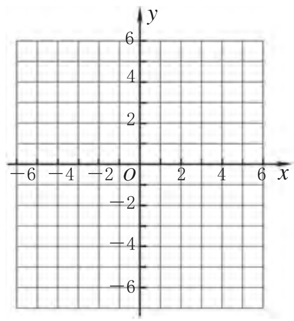
(2) 作出点 $G(-2,-1)$,$H(-3,5)$,$M(0,3)$,$N(5,-2)$,并判断这些点中哪些在六边形内,哪些在六边形外.



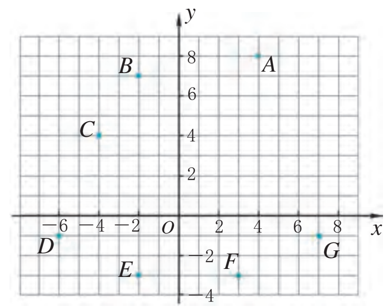
作业题 ZUOYETI

A **1.** 在如图所示的平面直角坐标系内画出下面这些点：

$M(-1,0)$，$N(2,2)$，$P(1.5,-1.5)$，$Q(4,-4)$.



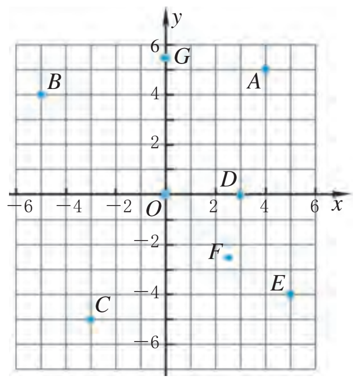
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 指出图中点 A，B，C，D，E，F，G 分别在哪一个象限内，并写出各点的坐标.

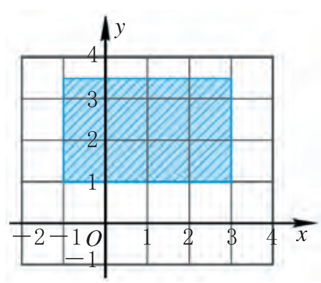
3. 根据图中各点的位置填表.



（第 3 题）

点	坐标	所在象限或坐标轴
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
O		

B **4.** 已知点 $A(2,15)$，$B(\sqrt{5},3)$，$C(-5,2)$，$D(-0.5,\sqrt{7})$. 判断这些点中，哪些在阴影区域内，哪些不在阴影区域内？

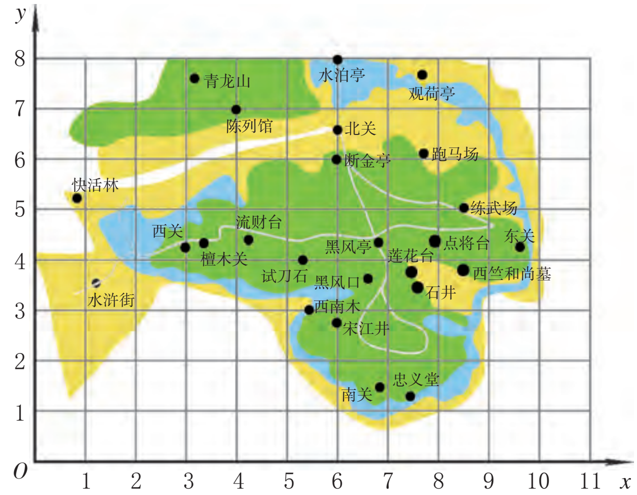


（第 4 题）

5. 如下页图是画在方格纸上的我国著名的水泊梁山的旅游景点简图.

（1）分别写出忠义堂、黑风亭、快活林、练武场的坐标（精确到 0.1）.

(2) (6,8),(6.6,3.6),(7.9,4.4)所表示的地点分别是什么?



(第 5 题)

2

例2 对于正方形 $ABCD$,建立如图 4-8 的直角坐标系. 写出 A,B,C,D 各顶点的坐标. 如果把 x 轴往下平移 2 个单位, 那么 A,B,C,D 各顶点坐标在新坐标系中将怎样变化?

解 A,B,C,D 各顶点坐标为$A(-2,-2)$,$B(2,-2)$,$C(2,2)$,$D(-2,2)$. 如果把 x 轴往下平移 2 个单位,如图 4-9,那么 A,B,C,D 各顶点的坐标分别变为$(-2,0)$,$(2,0)$,$(2,4)$,$(-2,4)$.

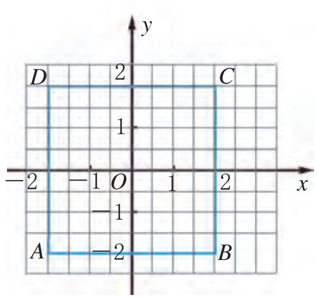


图 4-8

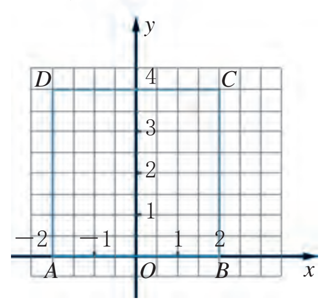


图 4-9

在建立直角坐标系表示给定的点或图形的位置时,应选择适当的点作为原点,适当的直线作为坐标轴,适当的距离为单位长度,这样往往有助于表示和解决有关问题.

例3 一个四边形的形状和尺寸如图 4-10 所示. 建立适当的直角坐标系,在坐标系中作出这个四边形,并标出各顶点的坐标.

分析 如图 4-10,为了使这个四边形的各个顶点坐标容易确定,可以把点 E 作为坐标系的原点,线段 AB 画在 x 轴上,那么 DE 就落在 y 轴上. 选择适当的比例,求出 A,B,C,D 各点的坐标,再描点,用线段连结起来,就得到所求的图形.

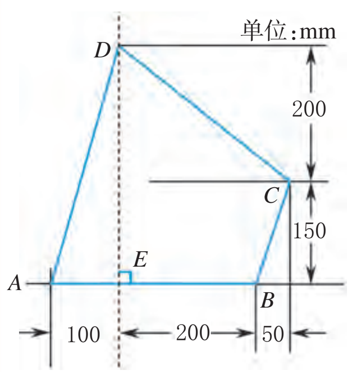


图 4-10

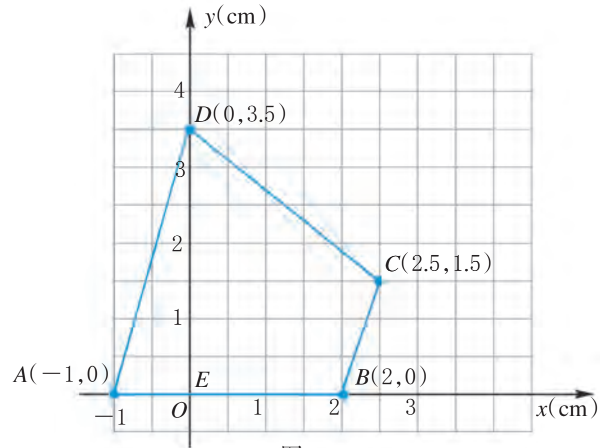


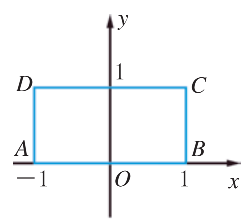
图 4-11

解 如图 4-11,选择比例为 1:10,取点 E 为直角坐标系的原点,使四边形的边 AB 在 x 轴上,建立直角坐标系.可得 A,B,C,D 各点的坐标分别为$(-1,0)$,$(2,0)$,$(2.5,1.5)$,$(0,3.5)$.

根据上述坐标在直角坐标系中作点 A,B,C,D, 并用线段依次连结各点, 如图 4-11 中的四边形就是所求作的图形.

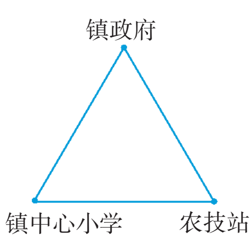
课内练习 KENEILIANXI

1. 已知长方形$ABCD$ 的长为 2,宽为 1. 以 AB 所在的直线为 x 轴,AB 的中点为原点,建立直角坐标系,如图. 求长方形各个顶点的坐标.



(第 1 题)

2. 已知某镇的镇政府、镇中心小学、农技站的位置如图. 用线段连结这三个地点,恰好构成一个等边三角形,且边长为 2 km. 试选取适当的比例,建立直角坐标系,在坐标系中画出这三个地点的位置,并标出坐标.



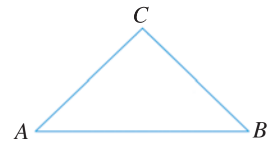
(第 2 题)

作业题 ZUOYETI

A **1.** 如图，在$\triangle ABC$中，$AC=BC=2\,\text{cm}$，$\angle C=\text{Rt}\angle$. 分别按下列条件建立直角坐标系，并确定$\triangle ABC$各顶点的坐标.

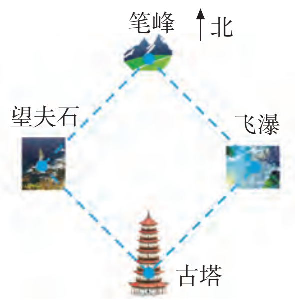
（1）使AB的中点为原点，AB边在x轴上.

（2）使点C为原点，边AB的中垂线为y轴.

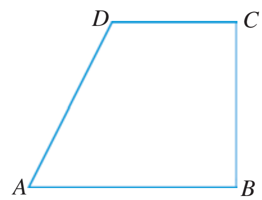


（第1题）

2. 某风景区中古塔、飞瀑、笔峰、望夫石四个景点的位置依次在一个边长为4km的正方形的四个顶点上（如图）. 试选取适当的比例，建立适当的坐标系，确定四个顶点的坐标，并在直角坐标系中标出它们的位置.



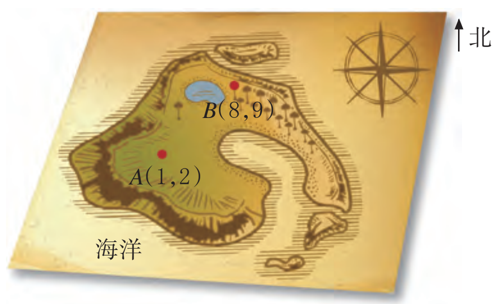
（第2题）



（第3题）

B **3.** 如图，在梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$BC\perp AB$，$AB=5$，$BC=4$，$CD=3$. 在原图中建立适当的直角坐标系，并写出各顶点的坐标.

4. 如图是传说中的一张藏宝图，藏宝人生前通过建立直角坐标系（以南北方向为纵轴，东西方向为横轴）画出这幅藏宝图. 现在我们只知道图上两块大石头的坐标为$A(1,2)$，$B(8,9)$，而藏宝地的坐标为$(5,7)$. 在地图上找到宝藏的位置，并表示出来.



（第4题）

笛卡尔


笛卡尔(1596～1650 年)

笛卡尔生于法国一个贵族家庭,从小好奇心强,勤奋好学,自学了大量的数学、哲学方面的书籍,这些积累成为他数学和哲学思想的主要来源. 笛卡尔毕业于法国巴黎普瓦捷大学,获法律学位. 毕业两年后,他不满足于书本知识,决心走向社会,“去读世界这本大书”. 于是他入伍随军远游, 但他始终在专心思考着数学与哲学问题. 笛卡尔认为,希腊人的综合几何只研究一些非常抽象,而看起来无用的问题,过于依赖图形,束缚了人的想象力;而对于当时流行的代数,他认为过于强调法则和公式,不能成为一门有利于增进智力的科学;他对于三段论逻辑也有看法,认为不产生任何新的结果. 因此,笛卡尔对逻辑学、几何学和代数学进行了系统思考,从而建立了一种“普遍的数学”.

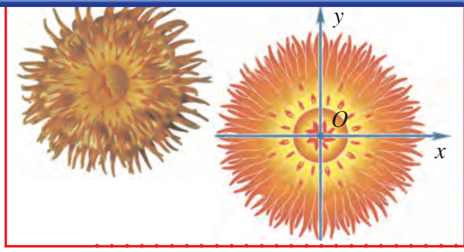
《几何学》是笛卡尔唯一公开发表的数学著作. 这本书的发表,标志着解析几何学的诞生,是数学史上划时代的光辉巨著. 笛卡尔首先建立了坐标的思想,引入坐标和变量的概念,使变量数学开始登上历史舞台,从而使数学的两大基本要素“数”与“形”统一起来. 也就是说,可以用代数方法研究解决几何问题,也可以运用几何方法来解决代数问题, 对后来牛顿(Newton,1642～1727 年)、莱布尼茨(Leibniz,1646～1716 年)建立微积分理论起着关键性的作用,为当时科学的发展提供了数学的工具,推动了 17 世纪以来数学的大发展.

《几何学》书影

笛卡尔强调科学的应用,提出科学的目的在于“造福人群”,使人类成为自然界的“主人和统治者”. 由于笛卡尔的学说与教义相悖,因此屡招教会迫害,他的著作被教会判处烧毁. 笛卡尔离世时,由于教会的干预,给他送葬的只有几个友人,并不准为他致悼词,他的著作也被教会列入禁书目录. 但是笛卡尔的哲学与数学思想影响日益深远,在他长眠地下 17 年后,法国政府将他的骨灰葬在法国伟人墓地——神圣巴黎保卫者和名人公墓,后又将其安置在历史博物馆. 他的墓碑上镌刻着:

笛卡尔,欧洲文艺复兴以来,第一个为人类争取并保证理性权利的人.

4·3 坐标平面内图形的轴对称和平移



在坐标平面内，怎样通过作第一象限图案的轴对称图形，从而得到整个图案？

1

运用直角坐标系，可以方便地帮助我们表达和处理有关图形的轴对称和平移的问题. 先看下面的问题：

如图 4-12.

（1）写出点 A 的坐标.

（2）分别作点 A 关于 x 轴，y 轴的对称点，并写出它们的坐标.

（3）比较点 A 与它关于 x 轴的对称点的坐标，点 A 与它关于 y 轴的对称点的坐标，你发现什么规律？

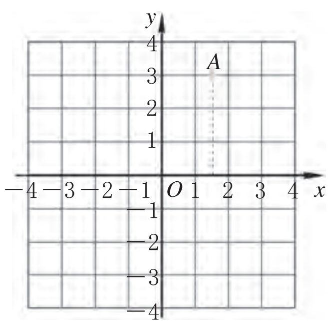


图 4-12

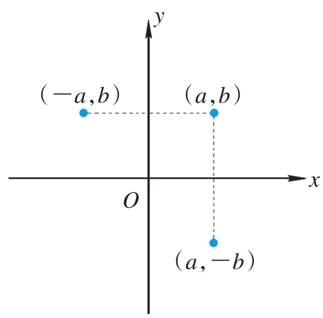


图 4-13

一般地，如图 4-13 所示，

在直角坐标系中，点(a,b)关于 x 轴的对称点的坐标为$(a,-b)$，关于 y 轴的对称点的坐标为$(-a,b)$.

做一做 ZUOYIZUO

在直角坐标系中，已知点 $A(-1,2)$，$B(1,-\sqrt{3})$，$C(0,1.5)$，则点 A 关于 x 轴的对称点的坐标是______，关于 y 轴的对称点的坐标是______；点 B 关于 y 轴的对称点的坐标是______；点 C 关于 x 轴的对称点的坐标是______.

例1 如图 4-14.

(1) 求出图形轮廓线上各转折点 A,O,B,C,D,E,F 的坐标，以及它们关于 y 轴的对称点 A',O',B',C',D',E',F' 的坐标.

(2) 在同一个直角坐标系中描点 A',O',B',C',D',E',F'，并用线段依次将它们连结起来.

解 (1) 图形轮廓线上各转折点的坐标依次是 $A(0,-2)$，$O(0,0)$，$B(3,2)$，$C(2,2)$，$D(2,3)$，$E(1,3)$，$F(0,5)$. 它们关于 y 轴的对称点的坐标相应是 $A'(0,-2)$，$O'(0,0)$❶，$B'(-3,2)$，$C'(-2,2)$，$D'(-2,3)$，$E'(-1,3)$，$F'(0,5)$.

(2) 点 A',O',B',C',D',E',F' 及其连线如图 4-15.

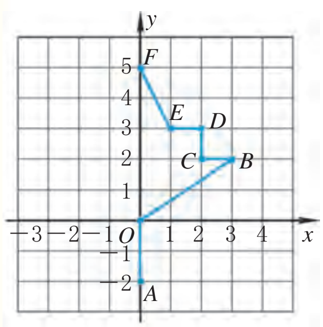


图 4-14

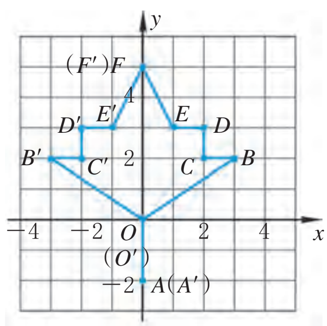


图 4-15

想一想

如果要把一个轴对称图形画在直角坐标系中，怎样画才简便？

合作学习

一个零件的横截面如图 4-16. 请完成以下任务：

(1) 按你自己认为合适的比例，建立直角坐标系.

(2) 写出轮廓线各个转折点的坐标. 在求这些点的坐标时，你运用了怎样的坐标变化规律？

(3) 与你的同伴比较，你们写出的各转折点的坐标相同吗？为什么？

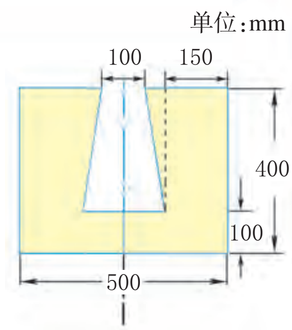


图 4-16

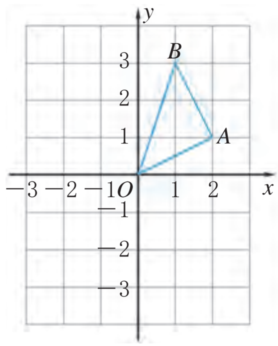
❶ 对称轴上的点的对称点定义为它的本身，下同.

课内练习 KENEILIANXI

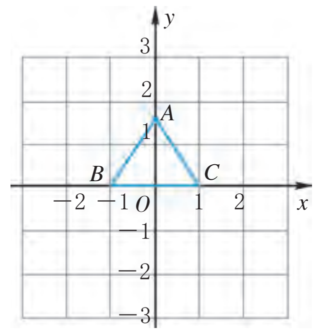
1. 如图.

（1）写出$\triangle ABO$各顶点的坐标，以及它们关于y轴的对称点的坐标，并描点.

（2）以y轴为对称轴，作$\triangle ABO$的轴对称图形，然后将所得的图形连同原图形，以x轴为对称轴再作轴对称图形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 等边三角形ABC在直角坐标系中的位置如图所示.

（1）写出$\triangle ABC$各顶点的坐标.

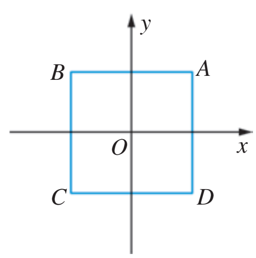
（2）以x轴为对称轴，作$\triangle ABC$的轴对称图形，求所得三角形的各顶点坐标.

作业题 ZUOYETI

A 1. 填空：

（1）已知点A的坐标为$(-3,4)$，则点A关于x轴的对称点A'的坐标为______，点A关于y轴的对称点A''的坐标为______.

（2）如图，正方形$ABCD$的边长为4，$AB\parallel x$轴，$BC\parallel y$轴，其中心恰好为坐标原点，则四个顶点的坐标分别是______.

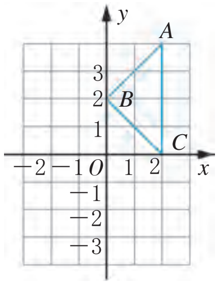


（第 1(2)题）

2. 已知△ABC 在直角坐标系中的位置如图.

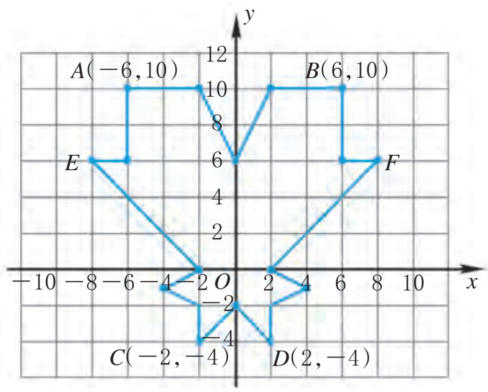
（1）写出点 A,B,C 的坐标，以及它们关于 x 轴的对称点的坐标.

（2）作△ABC 关于 x 轴对称的图形.



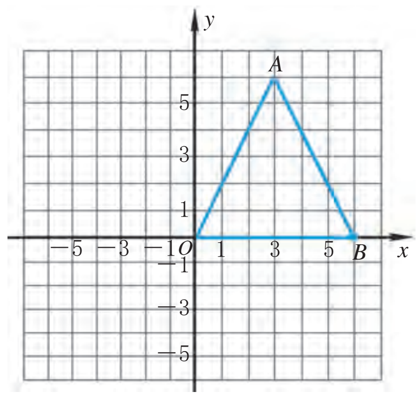
（第 2 题）

3. 如图所示的图案关于 y 轴对称. 图案上顶点 A 与 B，C 与 D 的坐标分别有什么关系？点 E 的坐标是$(-8,6)$，写出点 F 的坐标.



（第 3 题）

B 4. 如图，将△AOB 各顶点的横坐标乘-1，得到的图形与原图形相比有什么变化？作出所得的图形.



（第 4 题）

5. 一个机械零件的横截面如图，其中正方形的边长为 30 cm，中孔的圆心位于正方形的中心，孔的直径为 20 cm. 选择合适的比例，建立适当的直角坐标系，并在直角坐标系中作出这个零件的横截面.

（第 5 题）

2

合作学习

如图 4-17，将点 $A(-3,3)$，$B(4,5)$分别作以下平移，作出相应的点，并写出点的坐标.

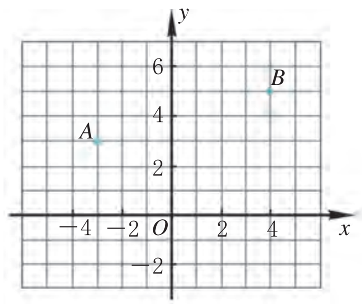


图 4-17

$A(-3,3)\xrightarrow{\text{向右平移 5 个单位}}(\underline{\ 2\ },\underline{\ 3\ })$

$B(4,5)\xrightarrow{\text{向左平移 5 个单位}}(\underline{\quad},\underline{\quad})$

$A(-3,3)\xrightarrow{\text{向上平移 5 个单位}}(\underline{\quad},\underline{\quad})$

$B(4,5)\xrightarrow{\text{向下平移 5 个单位}}(\underline{\quad},\underline{\quad})$

坐标变化

横坐标	纵坐标
加 5	不变

比较各点平移时的坐标变化，填在表格内. 你能发现点平移时坐标变化的规律吗？

做一做 ZUOYIZUO

1. 已知点 A 的坐标为$(-2,-3)$，分别求点 A 经下列平移后所得的点的坐标.

（1）向上平移 3 个单位.　　（2）向下平移 3 个单位.

（3）向左平移 2 个单位.　　（4）向右平移 4 个单位.

2. 已知点 A 的坐标为(a,b)，点 A 经怎样平移得到下列点？

（1）$(a-2,b)$.　　（2）$(a,b+2)$.

例2 如图 4-18,在直角坐标系中,平行于 x 轴的线段 AB 上所有点的纵坐标都是 -1,横坐标 x 的取值范围是 $1\leqslant x\leqslant 5$,则线段 AB 上任意一点的坐标可以用"$(x,-1)(1\leqslant x\leqslant 5)$"表示. 按照类似这样的规定,回答下面的问题:

(1) 怎样表示线段 CD 上任意一点的坐标?

(2) 把线段 AB 向上平移 2.5 个单位,作出所得的线段 $A'B'$. 线段 $A'B'$ 上任意一点的坐标怎样表示?

(3) 把线段 CD 向左平移 3 个单位,作出所得的线段 $C'D'$. 线段 $C'D'$ 上任意一点的坐标怎样表示?

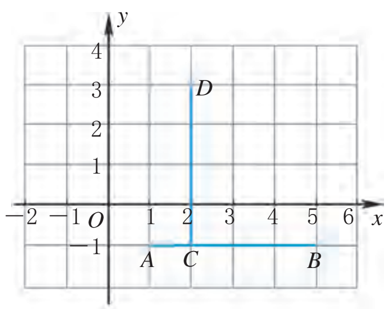


图 4-18

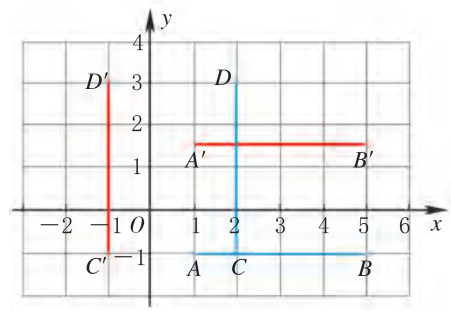


图 4-19

解 (1) 线段 CD 上任意一点的坐标可表示为 $(2,y)(-1\leqslant y\leqslant 3)$.

(2) 所得的线段 $A'B'$ 如图 4-19,线段 $A'B'$ 上任意一点的坐标可表示为 $(x,1.5)(1\leqslant x\leqslant 5)$.

(3) 所得的线段 $C'D'$ 如图 4-19,线段 $C'D'$ 上任意一点的坐标可表示为 $(-1,y)(-1\leqslant y\leqslant 3)$.

例3 如图 4-20.

(1) 分别求出点 A,A' 和点 B,B' 的坐标,并比较 A 与 A',B 与 B' 之间的坐标变化.

(2) 图甲怎样平移到图乙?

解 (1) 点 A,A' 的坐标分别为 $A(-8,-1)$,$A'(-3,4)$;点 B,B' 的坐标分别为 $B(-3,-1)$,$B'(2,4)$. 由 A 到 A',横坐标增加 5,纵坐标增加 5;由 B 到 B',横坐标增加 5,纵坐标增加 5.

(2) 由第(1)题知,A,B 都向右平移 5 个单位,向上平移 5 个单位. 从

图甲到图乙，可以看做经过了两次平移：一次是向右平移 5 个单位，另一次是向上平移 5 个单位.

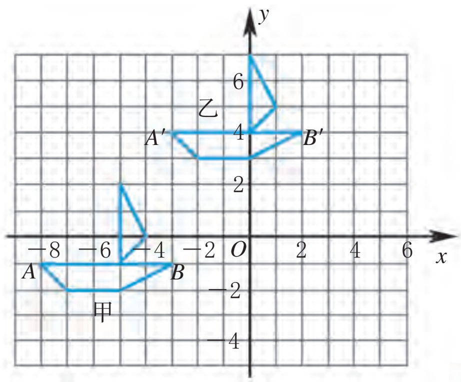


图 4-20

想一想

从图甲到图乙可以看做只经过一次平移得到吗?

课内练习 KENEILIANXI

1. 把点 $A(-1,3)$先向右平移 3 个单位，再向下平移 3 个单位，求最后所得点的坐标.

2. 把图 4-20 中图甲平移，使点 A 移至点 O，求点 B 的对应点的坐标，并画出图甲平移后的图形.

探究活动 TANJIUHUODONG

如图 4-21，直角坐标系中有三条线段 a,b,c. 你能通过平移其中两条线段，使得和第三条线段首尾相接组成一个三角形吗？如果能，说出你的平移方法，以及所得三角形三个顶点的坐标.

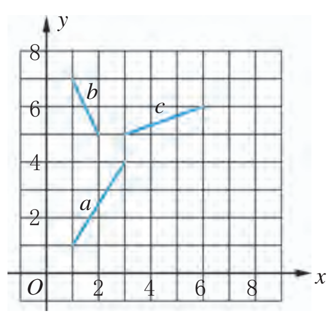


图 4-21

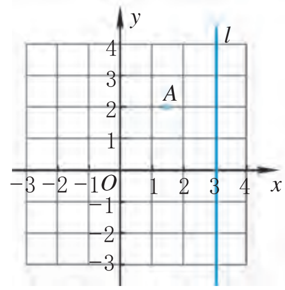
作业题

A 1. 如图,在直角坐标系中,点 A 的坐标是 $(1.5, 2)$. 根据下列要求作图.

(1) 把点 A 向下平移 4 个单位.

(2) 把点 A 向左平移 2.5 个单位.

(3) 把直线 l 向左平移 4 个单位.



(第 1 题)

2. (1) 把点 $P(-2, 7)$ 向左平移 2 个单位,得点__________.

(2) 把点 $P(-2, 7)$ 向下平移 7 个单位,得点__________.

(3) 把以 $(-2, 7)$, $(-2, -2)$ 为端点的线段向右平移 7 个单位,所得图形上任意一点的坐标可表示为__________.

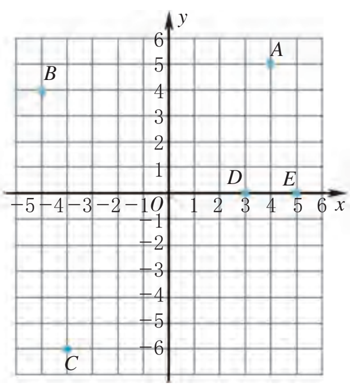
3. 如图,分别求一个或一组平移,使:

(1) 点 D 平移到点 E.

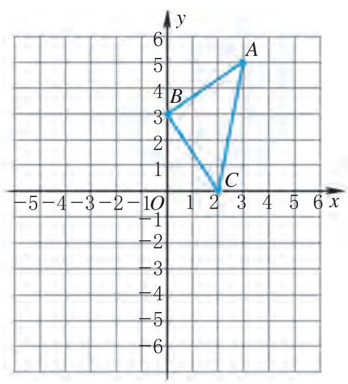
(2) 点 A 平移到点 C.

(3) 点 B 平移到点 D.

(4) 点 $(-3, -4)$ 平移到点 $(1, 0)$.



(第 3 题)



(第 4 题)

B 4. 如图,把 $\triangle ABC$ 平移,使点 A 平移到点 O. 作出 $\triangle ABC$ 平移后的 $\triangle OB'C'$,并求 $\triangle OB'C'$ 的顶点坐标和平移的距离.

5. 把点 $A(a, -3)$ 向左平移 3 个单位,所得的点与点 A 关于 y 轴对称,求 a 的值.

小结

XIAOJIE

填空.

1. 常用的确定物体位置的方法有__________，_____________.

2. 在平面内画两条_____________，并且有__________的数轴，这样就在平面内建立了平面直角坐标系. 平面直角坐标系所在的平面叫做__________，两坐标轴的__________叫做该直角坐标系的原点.

3. 对于坐标平面内的任何一点，我们可以确定它的_______；反过来，对于任何一个坐标，我们可以在坐标平面内确定它所表示的一个_______.

4. 在直角坐标系中，点(a,b)关于x轴的对称点的坐标是_______，关于y轴的对称点的坐标是__________.

填表.

技能内容	学会程度		
	学 会	基本学会	不 会
根据已知点的坐标在直角坐标系中描出点的位置，求直角坐标系中已知点的坐标			
作直角坐标系，在坐标系中用描点、连线的方法，作出已知图形			
在直角坐标系中，作图形的轴对称，求所得图形上某些点的坐标			
在直角坐标系中进行图形的平移，求所得图形上某些点的坐标			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 4.1节

●探索确定平面内物体位置的方法.

1. 若 B 地在 A 地的南偏东 30° 方向,距离 A 地 30 km 处,则 A 地在 B 地的____________方向,距离 B 地________处.

2. 双休日的一天,小王、小李、小张、小叶、小陈和小丁 6 人去海滨度假,他们在沙滩上的位置是(如图):小王和小李为(34,G),小张和小叶为(36,K),小陈和小丁为 (28,I). 请把他们在图上的位置找出来,并标注在图上.

(第 2 题)

目标B 4.2节

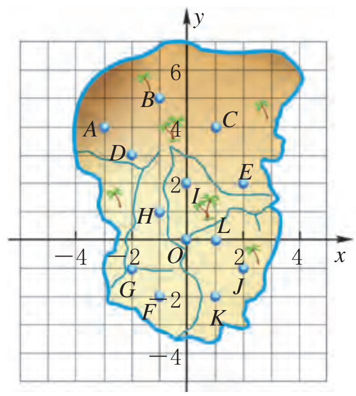
●认识并能画出平面直角坐标系;在给定的直角坐标系中,会根据坐标描出点的位置、由点的位置写出它的坐标.

●会用确定坐标、描点、连线的方法在直角坐标系中作出简单图形.

3. 某岛的旅游简图如图.

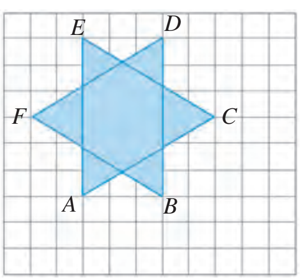
(1) 分别写出地点 A,B,C,D,E 的坐标.

(2) 坐标$(-1,-2)$,$(-2,-1)$,$(1,-2)$,$(2,-1)$所代表的地点分别是什么?



(第 3 题)

4. 已知长方形的两条边长分别为 4,6. 建立适当的直角坐标系,使它的一个顶点的坐标为$(-2,-3)$. 画出示意图,然后写出其他各顶点的坐标.



(第 5 题)

5. 在方格纸上建立适当的直角坐标系,并写出如图"六角形"6 个角顶点的坐标.

6. 在直角坐标系中描出以下点 $A(-2,5)$,$B(-3,-1)$,$C(3,-1)$,$D(2,5)$,依次用线段把它们连起来.说出所连成图形的名称和轴对称性.

目标C 4.3节

●在同一直角坐标系中，感受图形经轴对称、平移后点的坐标的变化.

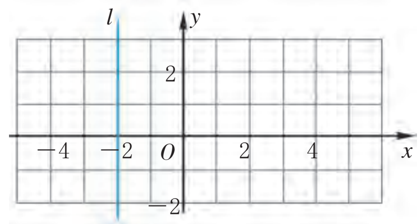
7. 填空：

（1）点 $P(5,-3)$关于 x 轴对称的点的坐标是____________.

（2）点 $P(3,-5)$关于 y 轴对称的点的坐标是____________.

8. 已知点 A 的坐标是$(1.5,2)$，则点 A 向右平移 2 个单位后的坐标是________，点 A 向下平移 3.5 个单位后的坐标是____________.

9. 如图，直线 l 上的点的什么坐标都相同？若把直线 l 上任意一点的坐标记为$(-2,y)$，则把它向右平移 5 个单位所得图形上点的坐标应怎样表示？在直角坐标系中作出这个图形.



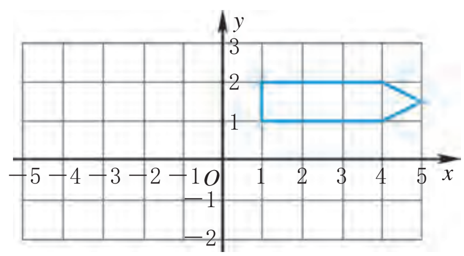
（第 9 题）

10. $\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 的坐标分别为 $A(0,-4)$，$B(-4.5,3)$，$C(4.5,5)$.

（1）在直角坐标系中画出$\triangle ABC$.

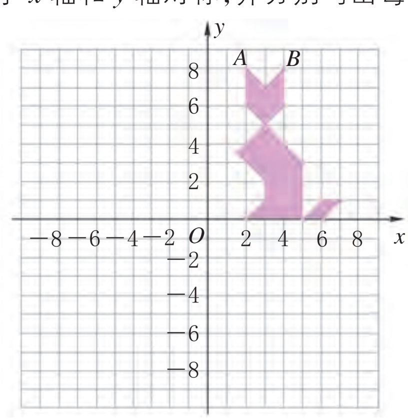
（2）以 y 轴为对称轴，作$\triangle ABC$ 的轴对称图形$\triangle A'B'C'$，并写出$\triangle A'B'C'$各个顶点的坐标.

11. 如图，铅笔图案五个顶点的坐标分别是$(1,1)$，$(4,1)$，$(5,1.5)$，$(4,2)$，$(1,2)$. 将该图形向下平移 2 个单位长度，作出相应图形，再写出平移后所得图形五个顶点的坐标.



（第 11 题）

12. 如图，请在这个直角坐标系中再画两只"猫"，使这两只"猫"分别与原来的图案关于 x 轴和 y 轴对称，并分别写出每只"猫"耳尖位置的坐标.



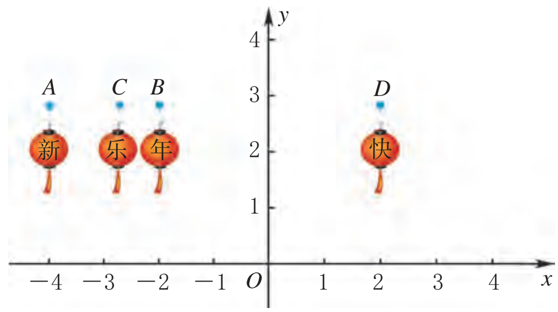
（第 12 题）

目标D

●能用不同的方式确定物体的位置.

●综合运用图形与坐标的知识解决简单的实际问题.

13. 四盏灯笼的位置如图. 已知 A,C,B,D 的坐标分别是$(-4,b)$,$(-2.7,b)$,$(-2,b)$,$(2,b)$,问:平移哪一盏灯,使得 y 轴两边的灯笼对称?



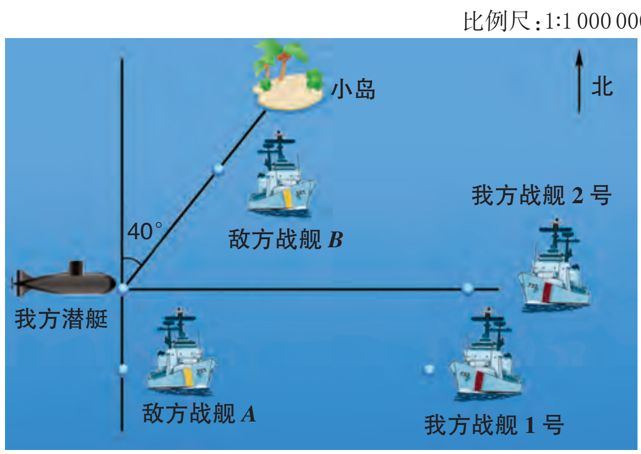
(第 13 题)

14. 如图为某次军事演习敌我双方舰艇模拟对峙图.

(1) 对于我方潜艇来说,北偏东 40°方向上有哪些目标? 要想确定敌舰 B 的位置,还需要什么数据? 这个数据能从图中取得吗?

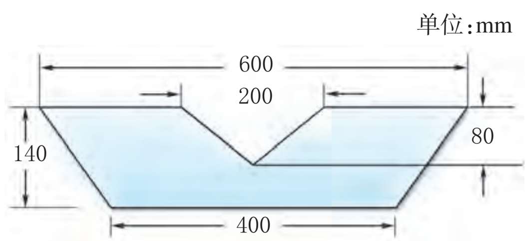
(2) 相对我方潜艇,我方战舰 1 号在什么位置?

(3) 你能用其他方式确定敌、我双方战舰的位置吗?



(第 14 题)

15. 一个零件图如图. 选择合适的比例建立直角坐标系,在直角坐标系中画出这个零件图(只要求画出图形),并求出轮廓线上各个转折点的坐标.



(第 15 题)

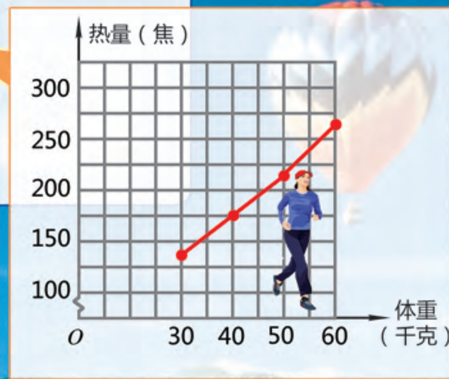
第5章

一次函数

目录 CONTENTS<<

函数是刻画客观世界的重要数学模型. 它的应用十分广泛，比如物体运动的路程、速度和时间，体重与他每跑一千米消耗的热量，一天中的气温和时间等，这些量与量之间的关系都可以用函数来描述. 运用函数可帮助我们研究量的变化规律.

本章将学习常量、变量及函数的初步知识，一次函数及其图象.



5·1 常量与变量

马从起点跑向终点，全程哪些量改变？哪些量不变？

当我们用数学来分析现实世界的各种现象时，会遇到各种各样的量和数量关系，如物体运动中的速度、时间和距离；圆的半径、周长和圆周率；购买商品的数量、单价和总价；某城市一天中各时间的气温……在某一个过程中，有些量固定不变，有些量不断改变.

合作学习

讨论下面的问题：

1. 圆的面积公式为 $S=\pi r^2$. 取 r 的一些不同的值，算出相应的 S 的值：

$r=$________cm → $S=$________cm^2

$r=$________cm → $S=$________cm^2

$r=$________cm → $S=$________cm^2

… …

在计算半径不同的圆的面积的过程中，哪些量改变？哪些量不变？

2. 假设钟点工的工资标准为 25 元 / 时，设工作时数为 t(时)，应得工资额为 m(元)，则 $m=25t$.

取一些不同的 t 的值，求出相应的 m 的值：

$t=$________ → $m=$________

$t=$________ → $m=$________

$t=$________ → $m=$________

… …

在根据不同的工作时数计算钟点工应得工资额的过程中，哪些量改变？哪些量不变？

在一个过程中,固定不变的量称为**常量**(constant),如上面两题中,圆周率 π 和钟点工的工资标准 25 元/时. 可以取不同数值的量称为**变量**(variable),如上面两题中,半径 r 和圆面积 S,工作时数 t 和工资额 m 都是变量. 又如,购买同一种商品时,商品的单价是常量,购买的商品数量和相应的总价是变量.

例 一家快递公司的收费标准如图 5-1. 用 t 表示邮件的质量,p 表示每件快递费,n 表示快递邮件的件数.

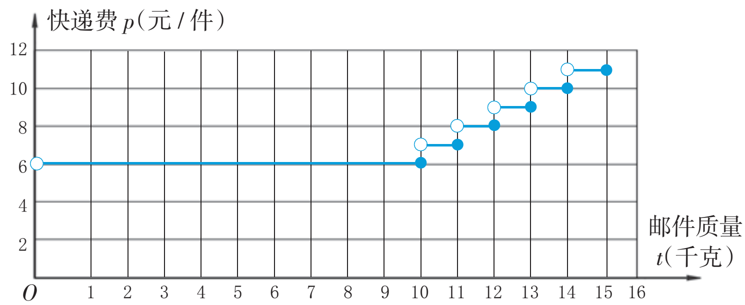


图 5-1

(1) 填写下表.

表 5-1

t(千克)	3	6	10	11	12.5	13
p(元)						

(2) 在投寄快递邮件的事项中,t,p,n 是常量,还是变量? 若 $0<t\leqslant 10$,投寄 n 件邮件的快递费记为 w,此时 t,p,n,w 中哪些是常量? 哪些是变量?

解 (1) 如表 5-2.

表 5-2

t(千克)	3	6	10	11	12.5	13
p(元)	6	6	6	7	9	9

(2) 在投寄快递邮件的事项中,t,p,n 都是变量. 若 $0<t\leqslant 10$,则 p 为常量,t,n,w 均为变量.

课内练习 KENEILIANXI

1. 举两个常量和变量的实际例子.

2. 某水果店橘子的单价为 4.5 元 / 千克，记买 k 千克橘子的总价为 s 元. 说出其中的常量和变量.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 圆周长 C 与圆的半径 r 之间的关系为 $C=2\pi r$. 对于各种不同大小的圆，指出 $C=2\pi r$ 中的变量和常量.

2. 声音在空气中传播的速度 v(m/s)与温度 t(℃)之间有关系式 $v=331+0.6t$. 说出其中的常量和变量.

3. 设 A，B 两城市间的铁路路程为 s，列车行驶的平均速度为 v，驶完这段路所需的时间为 t（不包括中途停车的时间），则 $t=\frac{s}{v}$. 其中哪些量是常量？哪些量是变量？如果 $v=140$ km/h 时呢？

B **4.** 判别下列问题中，字母表示的是变量还是常量.

（1）某段河道某天的水位记录如下表，其中 t 表示时刻，h 表示水位（以警戒线为基准，高出警戒线为正）.

t（时）	0	5	10	12	15	20
h（米）	1	0.8	0.4	0	−0.2	−0.4

（2）寄一封平信的邮资为 p，寄 x 封这种平信的总邮资为 y，则 $y=px$.

C **5.** 通过报刊、互联网等途径查找资料，写一段涉及较多量的短文，找出其中的变量和常量，并说明你的理由.

5·2 函数

根据经验，跳远的距离 $s=0.085v^2$（v 是助跑的速度，$0<v<10.5$ 米/秒），其中变量 s 随着哪一个量的变化而变化？

1

合作学习

1. 小明的哥哥是一名大学生，他利用暑假去一家公司打工，报酬按16元/时计算. 设小明的哥哥这个月工作的时间为 t 小时，应得报酬为 m 元，填写下表：

表5-3

工作时间 t(时)	1	5	10	15	20	…	t	…
报酬 m(元)								

怎样用关于 t 的代数式表示 m？

2. 跳远运动员按一定的起跳姿势，其跳远的距离 s(米)与助跑的速度 v(米/秒)有关. 根据经验，跳远的距离 $s=0.085v^2$（$0<v<10.5$）. 计算当 v 分别为 7.5，8，8.5 时，相应的跳远距离 s(结果精确到 0.01米).

3. 按照如图 5-2 的数值转换器，请你任意输入一个 x 的值，根据 y 与 x 的数量关系求出相应的 y 的值.

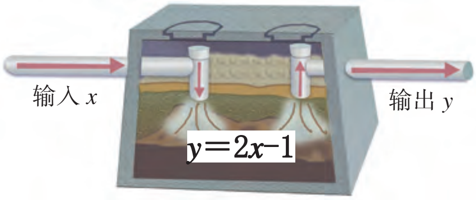


图 5-2

在上面各问题中，对于其中的一个变量(如 t，v，x)，任取一个值，另一个变量(如 m，s，y)相应有几个值？你还能举出符合这种特征的例子吗？

一般地，在某个变化过程中，设有两个变量 x，y，如果对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与之对应，那么就说 y 是 x 的**函数**（function），x 叫做**自变量**（independent variable）.

例如，上面的问题中，m 是 t 的函数，t 是自变量；s 是 v 的函数，v 是自变量；y 是 x 的函数，x 是自变量. 其中 $m=16t$，$s=0.085v^2$，$y=2x-1$ 这几个函数用等式来表示，这种表示函数关系的等式，叫做**函数表达式**，简称**函数式**. 用函数表达式表示函数的方法也叫**解析法**.

有时把自变量 x 的一系列值和函数 y 的对应值列成一个表，这种表示函数关系的方法是**列表法**. 如表 5-4 表示的是一年内某城市月份与平均气温的函数关系.

表 5-4

月份 m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均气温 T(℃)	3.8	5.1	9.3	15.4	20.2	24.3	28.6	28.0	23.3	17.1	12.2	6.3

我们还可以用**图象法**来表示函数，例如图 5-3 中的图象表示骑自行车时热量消耗 W（焦）与体重 x（千克）之间的函数关系.

解析法、列表法和图象法是函数的三种常用的表示方法.

对于函数 $m=16t$，当 $t=5$ 时，把它代入函数表达式，得

$m=16t=16\times5=80$（元）.

$m=80$ 是当自变量 $t=5$ 时的**函数值**.

若函数用解析法表示，只需把自变量的值代入函数式，就能得到相应的函数值. 若函数用列表法表示，函数值可以通过查表得到. 若函数用图象法表示，对给定的自变量的值，如 $x=50$，只要过点（50，0）作一条直线垂直于 x 轴，这条直线与图象的交点 P（50，399）的纵坐标就是当 $x=50$ 时的函数值，即 $W=399$（焦），如图 5-3.

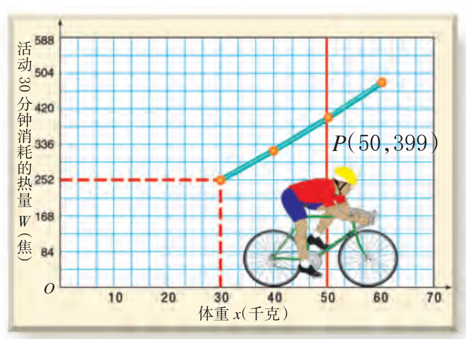


图 5-3

课内练习 KENEILIANXI

1. 某市居民生活用水的价格是 2.9 元 / 立方米. 设一户居民这个月的用水量为 n 立方米,应付水费为 m 元. 在这个问题中,m 关于 n 的函数表达式是__________. 当 $n=15$ 时, 函数值是______,这一函数值的实际意义是____________________.

2. 根据本节“合作学习”中第 2 题的函数表达式解答下面的问题:
（1）分别求当 $v=6$,$v=10$ 时的函数值,并说明它们的实际意义.
（2）当 $v=16$ 时,函数值有意义吗? 为什么?

作业题 ZUOYETI

A 1. 某市民用电费的价格是 0.538元/千瓦时. 设用电量为 x 千瓦时,应付电费为 y 元,则 y 关于 x 的函数式是________.当 $x=40$ 时,函数值是______,它的实际意义是____________________.
若某用户的用电量为 65 千瓦时,则该用户应付电费为______元.

2. 求下列函数当 $x=4$ 时的函数值:
（1）$y=2x^2$.　　　　（2）$y=\dfrac{1}{2x+1}$.

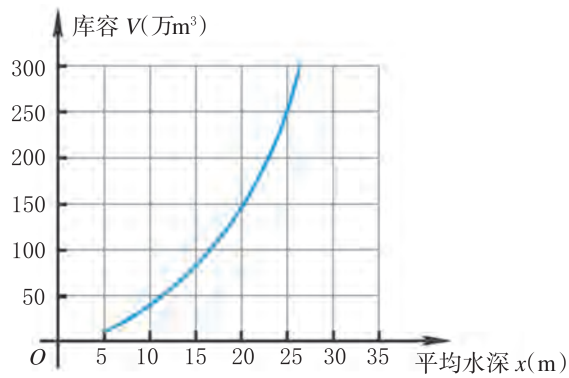
3. 已知△ABC 的底边 BC 上的高线长是 6 cm. 当 BC 的长改变时,三角形的面积也将改变.
（1）若△ABC 的底边 BC 的长为 x(cm),则△ABC 的面积 y(cm^2)可表示为 __________.
（2）当底边长从 12 cm 变化到 3 cm 时,三角形的面积从______cm^2 变化到 _______cm^2.

B 4. 在国内投寄平信应付邮资如下表:

信件质量x(克)	$0<x\leqslant20$	$20<x\leqslant40$	$40<x\leqslant60$
邮资y(元/封)	1.20	2.40	3.60

（1）y 是关于 x 的函数吗? 为什么?
（2）分别求当 $x=5,10,30,50$ 时的函数值,并说明它们的实际意义.

5. 下图是某水库的库容曲线图，其中 x 表示水库的平均水深(m)，V 表示水库的库容(万 m^3). 根据图象回答下面的问题：



(第 5 题)

(1) 这个函数反映了哪两个变量之间的关系？

(2) 填表：

x(m)	5	10	15	20	25
V(万 m^3)					

(3) 当平均水深取 5 m 至 25 m 之间的一个确定的值时，相应的库容 V 确定吗？

(4) 库容 V 可以看成平均水深 x 的函数吗？

(5) 求当 $x=18$ 时的函数值，并说明它的实际意义.

2

下面我们看两个求函数式及其应用的简单例子.

例1 等腰三角形 ABC 的周长为 10，底边 BC 长为 y，腰 AB 长为 x，求：

(1) y 关于 x 的函数表达式.

(2) 自变量 x 的取值范围.

(3) 腰长 $AB=3$ 时，底边的长.

解 (1) 由三角形的周长为 10，得 $2x+y=10$，

$\therefore \quad y=10-2x.$

(2) $\because \quad x, y$ 是三角形的边长，

$\therefore \quad x>0, y>0, 2x>y$ (为什么？)，

$\therefore \begin{cases} 10-2x>0, \\ 2x>10-2x, \end{cases}$ 解得 $2.5<x<5$.

（3）当 $AB=3$，即 $x=3$ 时，$y=10-2\times3=4$.

所以当腰长 $AB=3$ 时，底边 BC 长为 4.

想一想

当 $x=6$ 时，$y=10-2x$ 的值是多少？对本例有意义吗？当 $x=2$ 呢？

例2 游泳池应定期换水. 某游泳池在一次换水前存水 936 立方米，换水时打开排水孔，以每小时 312 立方米的速度将水放出. 设放水时间为 t 小时，游泳池内的存水量为 Q 立方米.

（1）求 Q 关于 t 的函数表达式和自变量 t 的取值范围.

（2）放水 2 小时 20 分后，游泳池内还剩水多少立方米？

（3）放完游泳池内全部水需要多少时间？

解 （1）Q 关于 t 的函数表达式是 $Q=936-312t$.

$\because\ Q\geqslant0, t\geqslant0$，$\therefore \begin{cases} t\geqslant0, \\ 936-312t\geqslant0, \end{cases}$

解得 $0\leqslant t\leqslant3$，即自变量 t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant3$.

（2）放水 2 小时 20 分，即 $t=\dfrac{7}{3}$（时）.

把 $t=\dfrac{7}{3}$ 代入 $Q=936-312t$，得

$Q=936-312\times\dfrac{7}{3}=208$（立方米）.

所以放水 2 小时 20 分后，游泳池内还剩水 208 立方米.

（3）放完游泳池内全部水时，$Q=0$，即 $936-312t=0$，

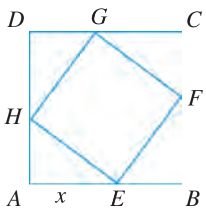
解得 $t=3$.

所以放完游泳池内全部水需 3 小时.

课内练习 KENEILIANXI

1. 求下列函数自变量的取值范围（使函数式有意义）：

（1）$y=\dfrac{1}{x-1}$. （2）$y=x-1$.



（第 2 题）

2. 如图，正方形 $EFGH$ 的四个顶点分别在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的四条边上. 设 $AE=x$，试求正方形 $EFGH$ 的面积 y 关于 x 的函数式，写出自变量 x 的取值范围，并求当 $AE=\frac{1}{4}$ 时，正方形 $EFGH$ 的面积.

探究活动 TANJIUHUODONG

如图 5-4，每个图形都是由若干个棋子围成的正方形图案，图案的每条边（包括两个顶点）上都有 n（$n\geqslant 2$）个棋子，设每个图案的棋子总数为 S.

图 5-4

图 5-4 中，棋子的排列有什么规律？S 与 n 之间能用函数式表示吗？自变量 n 的取值范围是什么？

作业题 ZUOYETI

A

1. 已知直角三角形两锐角的度数分别为 x,y，则 y 与 x 的函数关系是________________.

2. 已知一个梯形的下底边长是上底边长的 2 倍，高线长为 10 cm. 求梯形的面积 $S(\text{cm}^2)$ 关于上底边长 $x(\text{cm})$ 的函数表达式.

3. 如果 1 cm^3 钢的质量是 7.8 g，求一个立方体钢块的质量 $y(\text{g})$ 与棱长 $x(\text{cm})$ 之间的函数表达式.

B

4. 设 $y(\text{cm}^2)$ 表示周长比 12 cm 小 $x(\text{cm})$ 的正方形的面积，求：

（1）y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

（2）当 $x=8$ 时函数 y 的值.

5. 已知一条钢筋长 100 cm，把它折弯成长方形（或正方形）框，其一条边长记为 $x(\text{cm})$，围成的面积记为 $S(\text{cm}^2)$.

（1）求 S 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

（2）分别求当 $x=20,25,28$ 时，函数 S 的值.

5·3 一次函数

据估计，近几十年来，全世界每年都有数百万公顷的土地变为沙漠，土地的沙漠化给人类的生存带来严重的威胁. 我们可以通过建立函数模型来预测沙漠化趋势.

1

比较下列各函数，它们有哪些共同特征？

①$m=6t$； ②$y=-2x$； ③$y=2x+3$； ④$Q=-312t+936$.

一般地，函数 $y=kx+b$（k，b 都是常数，且 $k\neq0$）叫做**一次函数**（linear function）. 当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx+b$ 就成为 $y=kx$（k 为常数，$k\neq0$），叫做**正比例函数**（function of direct proportion），常数 k 叫做**比例系数**（constant of variation）.

做一做 ZUOYIZUO

下列函数中，哪些是一次函数？哪些是正比例函数？系数 k 和常数项 b 的值各是多少？

$$C=2\pi r,\ y=\frac{2}{3}x+200,\ t=\frac{200}{v},\ y=2(3-x),\ s=x(50-x).$$

例1 求下列各题中 x 与 y 之间的关系式，并判断 y 是否为 x 的一次函数，是否为正比例函数.

（1）某农场种植玉米，每平方米种玉米 6 株，玉米株数 y 与种植面积 $x(\mathrm{m}^2)$ 之间的关系.

（2）正方形的面积 y 与周长 x 之间的关系.

（3）等腰三角形 ABC 的周长为 16(cm)，底边 BC 长为 y(cm)，腰 AB 长为 x(cm). y 与 x 之间的关系.

解 （1） $y=6x$，y 是 x 的一次函数，也是正比例函数.

（2） $y=\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$，$y$ 不是 x 的一次函数，也不是正比例函数.

（3） $y=16-2x$，y 是 x 的一次函数，但不是 x 的正比例函数.

例2 按国家2019年1月1日起实施的有关个人所得税的规定，个人取得工资(薪金)中，年应纳税所得额[1]不超过36 000元的税率为3%，超过36 000元至144 000元的部分的税率为10%.

(1) 设全年应纳税所得额为x元，且$36\,000<x\leqslant 144\,000$，应纳个人所得税为$y$元，求$y$关于$x$的函数表达式和自变量的取值范围.

(2) 小聪妈妈去年应纳税所得额为60 000元，则她去年应缴个人所得税多少元?

解 (1) $y=36\,000\times 3\%+(x-36\,000)\times 10\%$

$=0.1x-2\,520\ (36\,000<x\leqslant 144\,000)$.

所求的函数表达式为$y=0.1x-2\,520$，自变量x的取值范围为$36\,000<x\leqslant 144\,000$.

(2) 将$x=60\,000$代入函数表达式，得

$y=0.1\times 60\,000-2\,520=3\,480$(元).

答:小聪妈妈去年应缴个人所得税3 480元.

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知正比例函数$y=kx$，当$x=-2$时，$y=6$. 求比例系数k的值.

2. 在某一段时期，一年期定期储蓄的年利率为4.14%，规定储蓄利息应付个人所得税的税率为5%. 设按一年期定期储蓄存入银行的本金为x元，到期支取时扣除个人所得税后实得本利和为y元.

(1) 求y关于x的函数表达式.

(2) 把18 000元钱按一年期定期储蓄存入银行. 问:到期支取时，扣除个人所得税后实得本利和为多少元?

作业题 ZUOYETI

A **1.** 写出下列各题中y与x之间的函数式，并判断y是否为x的一次函数，是否为正比例函数.

(1) 圆珠笔每支0.6元，购买圆珠笔的总价y(元)与购买支数x之间的关系.

(2) 甲、乙两地之间的路程为300千米，汽车从甲地出发开往乙地的平均速度y(千米/时)和到达乙地所需时间x(时)之间的关系.

[1] 应纳税所得额指居民个人全年收入额减除60 000元免税部分，以及专项扣除(包括按照国家规定缴纳的基本养老保险、基本医疗保险、失业保险等社会保险费和住房公积金等)、专项附加扣除(包括规定的子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等支出)和依法确定的其他扣除后的余额.

2. 写出下列一次函数的一次项系数 k 和常数项 b 的值.

(1) $y=3x+7$. (2) $s=-t+4$.

(3) $m=0.4n$. (4) $y=-2(x-1)+x$.

3. 已知 y 是 x 的正比例函数,当 $x=-2$ 时,$y=8$. 求 y 关于 x 的函数表达式,以及当 $x=3$ 时的函数值.

B **4.** 一种移动通讯服务的收费标准为:每月基本服务费为 30 元,每月免费通话时间为 120 分,以后每分钟收费 0.4 元.

(1) 写出每月话费 y 关于通话时间 x $(x>120)$的函数表达式.

(2) 分别求每月通话时间为 100 分,200 分的话费.

5. 某种气体在 0 ℃时的体积为 100 L,温度每升高 1 ℃,它的体积增加 0.37 L.

(1) 写出气体体积 V(L)与温度 t(℃)之间的函数表达式.

(2) 求当温度为 30 ℃时气体的体积.

(3) 当气体的体积为 107.4 L 时,温度为多少摄氏度?

2

例3 已知 y 是 x 的一次函数,当 $x=3$ 时,$y=1$;当 $x=-2$ 时,$y=-14$. 求这个一次函数的表达式.

解 因为 y 是 x 的一次函数,所以可设所求表达式为 $y=kx+b\ (k\neq0)$.

将 $x=3,y=1$ 和 $x=-2,y=-14$ 分别代入上式,得

$$\begin{cases}1=3k+b,\\-14=-2k+b.\end{cases}$$

解这个方程组,得 $\begin{cases}k=3,\\b=-8.\end{cases}$

所以所求的一次函数表达式为 $y=3x-8$.

一般地,已知一次函数的自变量与函数的两对对应值,可以按以下步骤求这个一次函数的表达式:

1. 设所求的一次函数表达式为 $y=kx+b$,其中 k,b 是待确定的常数,$k\neq0$.

2. 把两对已知的自变量与函数的对应值分别代入 $y=kx+b$，得到关于 k,b 的二元一次方程组.

3. 解这个关于 k,b 的二元一次方程组，求出 k,b 的值.

4. 把求得的 k,b 的值代入 $y=kx+b$，就得到所求的一次函数表达式.

这种求函数表达式的方法叫做**待定系数法**.

例4 为了改善生态环境，某地区大力开展植树造林活动. 从2010年底开始，森林面积几乎每年以相同的速度增长. 据有关报道，到2018年底，该地区的森林面积已从2015年底的65.6万公顷扩展到67.7万公顷.

（1）可选用什么数学方法来描述该地区的森林面积的变化?

（2）如果该地区坚持植树造林，森林面积每年按相同的速度增长，那么到2025年底，该地区的森林面积将增加到多少万公顷?

分析 由于森林面积每年几乎以相同的速度增长，设2010年底该地区森林的面积为 b 万公顷，每经过一年，森林面积增加 k 万公顷，经过 x 年，该地区的森林面积增加到 y 万公顷，则 $y=kx+b$. 也就是说，可选用一次函数来描述该地区森林面积的变化.

只要求出系数 k,b，就求出了这个一次函数.

解 （1）设2010年底该地区森林的面积为 b 万公顷，森林面积每年增加 k 万公顷，经过 x 年森林面积增加到 y 万公顷. 由题意，得

$y=kx+b$，且当 $x=5$ 时，$y=65.6$；当 $x=8$ 时，$y=67.7$.

把这两对自变量和函数的对应值分别代入 $y=kx+b$，得

$$\begin{cases}65.6=5k+b,\\67.7=8k+b.\end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases}k=0.7,\\b=62.1.\end{cases}$

这样该地区森林面积的变化就由一次函数 $y=0.7x+62.1$ 来描述.

（2）把 $x=15$ 代入 $y=0.7x+62.1$，得

$y=0.7\times15+62.1=72.6$（万公顷）.

答：到2025年底，该地区的森林面积将增加到72.6万公顷.

课内练习 KENEILIANXI

1. 铜的质量 M 与体积 V 成正比例关系. 已知当 $V=5\ \mathrm{cm}^3$ 时, $M=44.5\ \mathrm{g}$. 求:

(1) 铜的质量 M(g)关于体积 V(cm^3)的函数表达式, 以及铜的密度 ρ.

(2) 体积为 $0.3\ \mathrm{dm}^3$ 的铜棒的质量.

2. 已知 y 是 x 的一次函数, 且当 $x=-2$ 时, $y=7$; 当 $x=3$ 时, $y=-8$. 求这个一次函数的表达式.

3. 很多城市的出租车按里程收费: 在一定的里程内按定额收费(起步价), 超出规定里程部分按与超出里程的整千米数(不足 1 千米的按 1 千米计算) 成正比例收费. 某市出租车的起步价里程为 4 km, 起步价为 10 元(不计等待时间).

(1) 小明一次在该市乘车, 从计费表上看到乘车里程和车费分别为 6 km, 14.00 元. 用函数表达式表示出租车超出起步价里程时的计费方法.

(2) 如果你在该市乘坐出租车的里程为 3 km, 那么需付多少车费? 如果乘车里程为 8 km 呢?

作业题 ZUOYETI

A

1. 已知函数 $y=-2x+b$. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, $y=-1$, 求常数项 b.

2. 已知 y 是 x 的一次函数, 且当 $x=-4$ 时, $y=9$; 当 $x=6$ 时, $y=-1$. 求:

(1) 这个一次函数的表达式和自变量 x 的取值范围.

(2) 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, 函数 y 的值.

(3) 当 $y=7$ 时, 自变量 x 的值.

(4) 当 $y<1$ 时, 自变量 x 的取值范围.

3. 某饮料厂生产一种饮料, 经测算, 用 1 吨水生产的饮料所获利润 y(元) 是 1 吨水的买入价 x(元)的一次函数. 根据下表提供的数据, 求 y 关于 x 的函数表达式. 当水价为每吨 10 元时, 1 吨水生产的饮料所获的利润是多少?

1 吨水的买入价 x(元)	4	6
利润 y(元)	200	198

B **4.** 某航空公司规定旅客可免费托运一定质量的行李，超过规定质量的行李需买行李票，行李票费用 y(元)是行李质量 x(kg)的一次函数. 已知当行李的质量分别为 20 kg，40 kg 时，需支付的行李票费用为 15 元和 45 元. 求 y 关于 x 的函数表达式.

5. 已知 $y+m$ 与 $x-n$ 成正比例(其中 m,n 是常数).

(1) y 是关于 x 的一次函数吗?

(2) 如果当 $y=-15$ 时，$x=-1$；当 $x=7$ 时，$y=1$. 求 y 关于 x 的函数表达式.

PROJECT 设计题 SHEJITI

为节约用水，某市居民生活用水按级收费，水价分三个等级：第一级为月用水量 17 m³ 及以下(含17 m³)；第二级为月用水量超过 17 m³，不到 31 m³；第三级为月用水量 31 m³ 及以上(含31 m³). 下面是某住户收到的一张自来水总公司水费专用发票.

自来水总公司水费专用发票

发 票 联

计费日期:2012-01-01至2012-01-31

上期抄见数		本期抄见数	加原表用水量 (m³)		本期用水量 (m³)
587		607			20
自来水费(含水资源费)			污水处理费		
用水量 (m³)	单价 (元/m³)	金额 (元)	用水量 (m³)	单价 (元/m³)	金额 (元)
阶梯一: 17	1.75	29.75	17	0.45	7.65
阶梯二: 3	2.3	6.9	3	0.6	1.8
本期实付金额(大写)	肆拾陆元壹角整		￥46.10		

图 5-5

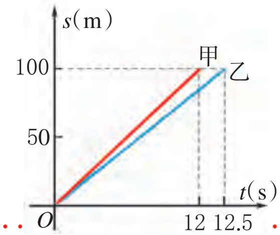
(注：居民生活用水水价＝自来水费＋污水处理费)

(1) 从这张水费发票中你获得哪些与水费计算有关的信息? 若某户的月用水量为 x(m³)($17<x<31$)，应付的水费为 y 元，求 y 关于 x 的函数表达式. 根据发票中的信息，你能计算月用水量超过 31 m³ 时应付的水费吗? 为什么?

(2) 通过收集水费发票，询问自来水公司等途径，了解你所在县市水费的计算方法. 根据你家前几个月的用水量，你能得到你家需付水费的计算公式吗? 估计你家当月的用水量，并用公式估计你家需付的水费.

5·4 一次函数的图象与性质

根据甲、乙两人赛跑中路程 s 与时间 t 的函数图象，你能获取哪些信息？



把一个函数的自变量 x 的值与函数 y 的对应值分别作为点的横坐标和纵坐标，在直角坐标系中描出它的对应点，所有这些点组成的图形叫做这个函数的**图象**(graph). 函数的图象是我们研究和处理有关函数问题的重要工具.

合作学习

对一次函数 $y=2x$ 与 $y=2x+1$ 作如下研究：

1. 分别选择若干对自变量与函数的对应值，列成下表(请在空格内填入合适的数，完成表 5-5).

表 5-5

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2x$	…	-4	-2	0			…
$y=2x+1$	…	-3					…

2. 分别以表中 x 的值作点的横坐标，对应的 y 值作纵坐标，得到两组点，写出用坐标表示的这两组点.

3. 画一个直角坐标系，并在直角坐标系中画出这两组点.

4. 观察所画的两组点，你发现了什么？把你的发现与同伴交流.

我们发现，如图 5-6，坐标满足一次函数 $y=2x$ 的各点 $(-2,-4)$，$(-1,-2)$，$(0,0)$，$(1,2)$，$(2,4)$…都在直线 l_1 上；而坐标满足一次函数 $y=2x+1$ 的各点：$(-2,-3)$，$(-1,-1)$，$(0,1)$，$(1,3)$，$(2,5)$…都在直线 l_2 上. 反过来，在直线 l_1 或 l_2 上取一些点，这些点的坐标分别满足 $y=2x$ 或

$y=2x+1$（你不妨试一试）.

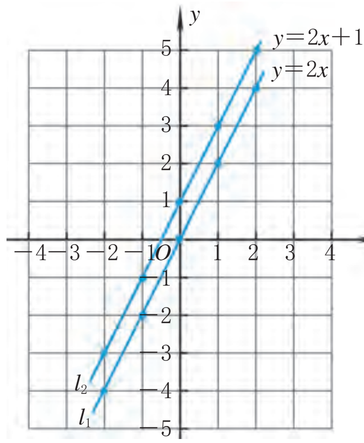


图 5-6

由此可见，一次函数 $y=kx+b$（k，b 都为常数，且 $k\neq0$）可以用直角坐标系中的一条直线来表示，这条直线也叫做一次函数 $y=kx+b$ 的图象.

例1 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，并求出它们与坐标轴交点的坐标：$y=3x$，$y=-3x+2$.

分析 因为一次函数的图象是直线，根据两点确定一条直线，所以只要画出图象上的两个点，就能画出一次函数的图象.

解 对函数 $y=3x$，

取 $x=0$，得 $y=0$，得到点$(0,0)$；

取 $x=1$，得 $y=3$，得到点$(1,3)$.

过点$(0,0)$，$(1,3)$画直线，就得到函数 $y=3x$ 的图象，如图 5-7. 从图象可以看出，它与坐标轴的交点是原点$(0,0)$.

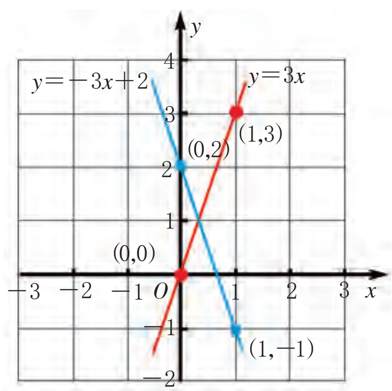


图 5-7

同理，对函数 $y=-3x+2$，

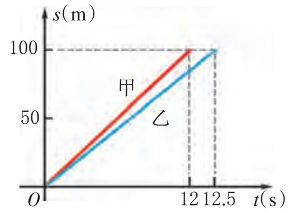
取 $x=0$，得 $y=2$，得到点$(0,2)$；

取 $x=1$，得 $y=-1$，得到点$(1,-1)$.

过点$(0,2)$，$(1,-1)$画直线，就得到函数 $y=-3x+2$ 的图象，如图 5-7. 从图象可以看出，它与 x 轴的交点是$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，与 y 轴的交点是$(0,2)$.

想一想，你能直接利用函数的表达式求函数图象与坐标轴交点的坐标吗？

课内练习 KENEILIANXI



(第 2 题)

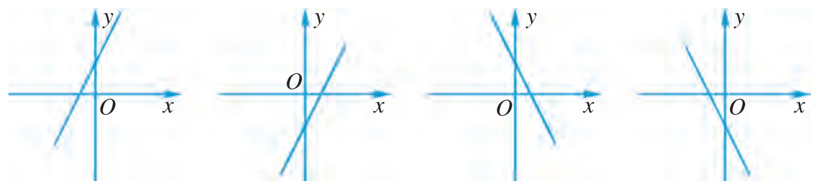
1. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，并写出它们与坐标轴的交点坐标.

$y=\frac{1}{2}x$，$y=\frac{1}{2}x+2$，$y=-\frac{1}{2}x+2$.

2. 甲、乙两人在一次赛跑中，路程 s 与时间 t 的关系如图所示. 这次赛跑的距离是多少米？谁先到达终点？乙在这次赛跑中的速度是多少？

作业题 ZUOYETI

A 1. 一次函数 $y=2x-1$ 的图象大致是(　　)



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

2. 在同一直角坐标系中画出下列直线：

(1) $y=-\frac{1}{3}x$.　　(2) $y=2x-3$.

3. 已知函数 $y=-8x+16$. 求该函数图象与坐标轴交点的坐标.

4. 一个长方形的周长是12 cm，一边长是x(cm).

(1) 求它的另一条边长 y 关于 x 的函数表达式，以及 x 的取值范围.

(2) 画出这个函数的图象.

B 5. 一次函数的图象过 $M(3,2)$，$N(-1,-6)$两点.

(1) 求函数的表达式.

(2) 画出该函数的图象.

(3) 试判断点$P(2a,4a-4)$是否在函数的图象上，并说明理由.

C 6. 在同一条道路上，甲行走的速度为3 km/h，出发0.15 h后，乙以4.5 km/h 的速度追甲. 设乙行走的时间为 t(h).

(1) 写出甲、乙两人所走的路程 s 与时间 t 的函数表达式.

(2) 在同一直角坐标系中画出它们的图象.

(3) 求出两条直线的交点坐标，并说明它的实际意义.

合作学习

利用函数的图象分析下列问题：

对于一次函数 $y=2x+3$，当自变量 x 的值增大时，函数 y 的值有什么变化？对于一次函数 $y=-2x+3$ 呢？

观察图 5-8 中各个一次函数的图象，你发现了什么规律？

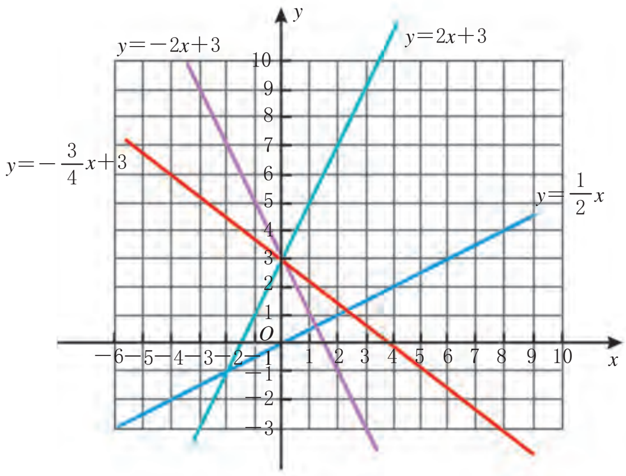


图 5-8

一次函数有下面的性质：

对于一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$），当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

做一做 ZUOYIZUO

设下列两个函数当 $x=x_1$ 时，$y=y_1$；当 $x=x_2$ 时，$y=y_2$. 用“$>$”或“$<$”填空.

对于函数 $y=\frac{1}{2}x$，若 $x_2>x_1$，则 y_2 ______ y_1；

对于函数 $y=-\frac{3}{4}x+3$，若 x_2 ______ x_1，则 $y_2<y_1$.

例2 我国某地区现有人工造林面积 12 万公顷，规划今后 10 年每年新增造林面积大致相同，约为 0.61 至 0.62 万公顷. 请估算 6 年后该地区的造林总面积达到多少万公顷.

解 设 p 表示今后 10 年每年造林的公顷数，则 $0.61 \leqslant p \leqslant 0.62$. 设 6 年后该地区的造林总面积为 S 万公顷，则 $S=6p+12$.

这个一次函数中，一次项系数 $k=6>0$，所以 S 随 p 的增大而增大.

$\because \quad 0.61 \leqslant p \leqslant 0.62$,

$\therefore \quad 6 \times 0.61+12 \leqslant S \leqslant 6 \times 0.62+12$，即 $15.66 \leqslant S \leqslant 15.72$.

答：6 年后该地区的造林总面积达到 15.66 万至 15.72 万公顷.

例 3 要从甲、乙两仓库向 A，B 两工地运送水泥. 已知甲仓库可运出 100 吨水泥，乙仓库可运出 80 吨水泥；A 工地需 70 吨水泥，B 工地需 110 吨水泥. 两仓库到 A，B 两工地的路程和每吨每千米的运费如下表：

表 5-6

	路程(千米)		运费(元/吨·千米)	
	甲仓库	乙仓库	甲仓库	乙仓库
A 地	20	15	1.2	1.2
B 地	25	20	1	0.8

(1) 设甲仓库运往 A 地水泥 x 吨，求总运费 y 关于 x 的函数表达式，并画出图象.

(2) 当甲、乙两仓库各运往 A，B 两工地多少吨水泥时，总运费最省？最省的总运费是多少？

解 (1) 各仓库运出的水泥吨数和运费如表 5-7.

表 5-7

	运量(吨)		运费(元)	
	甲仓库	乙仓库	甲仓库	乙仓库
A 地	x	$70-x$	$1.2 \times 20x$	$1.2 \times 15 \times (70-x)$
B 地	$100-x$	$10+x$	$1 \times 25 \times (100-x)$	$0.8 \times 20 \times (10+x)$

$$\begin{aligned}\therefore \quad y &= 1.2 \times 20x + 1 \times 25 \times (100-x) + 1.2 \times 15 \times (70-x) \\ &\quad + 0.8 \times 20 \times (10+x) \\ &= -3x + 3\,920,\end{aligned}$$

即所求的函数表达式为 $y=-3x+3\,920$，其中 $0\leqslant x\leqslant 70$，其图象如图 5-9 所示.

（2）在一次函数 $y=-3x+3\,920$ 中，$k=-3<0$，所以 y 的值随 x 的增大而减小.

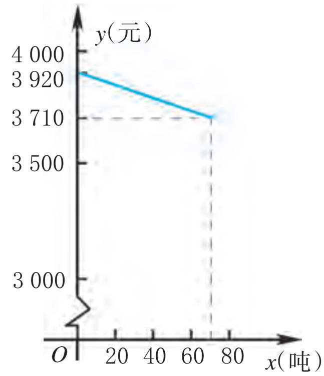


图 5-9[1]

因为 $0\leqslant x\leqslant 70$，所以当 $x=70$ 时，y 的值最小.

将 $x=70$ 代入表 5-7 中的各式，得各仓库运出的水泥吨数和运费如表 5-8.

表 5-8

	运量(吨)		运费(元)	
	甲仓库	乙仓库	甲仓库	乙仓库
A地	70	0	1 680	0
B地	30	80	750	1 280

所以当甲仓库向 A，B 两工地各运送 70 吨和 30 吨水泥，乙仓库不向 A 工地运送，而只向 B 工地运送 80 吨水泥时，总运费最省. 最省的总运费为

$-3\times 70+3\,920=3\,710$(元).

想一想

你能从图 5-9 中直接观察得到结果吗？

课内练习 KENEILIANXI

1. 对于函数 $y=-2x+5$，当 $-1<x<2$ 时，______ $<y<$ ______.

2. 为了清洗水箱，需放掉水箱内原有的 200 升水. 若 8:00 打开放水龙头，放水的速度为 2 升/分. 运用函数式和图象解答下列问题：

（1）估计 8:55～9:05（包括 8:55 和 9:05）水箱内剩多少升水.

（2）当水箱中存水少于 10 升时，放水时间已经超过多少分钟？

作业题 ZUOYETI

A **1.** 填空：

（1）已知 $y=2x+7$. 当 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 时，______ $\leqslant y\leqslant$ ______.

（2）已知 $y=-0.5x+2$. 当 $-3<x<3$ 时，______ $<y<$ ______.

2. 已知 y 是关于 x 的一次函数，这个函数图象上有两点的坐标分别为 $(0,-8)$，$(1,2)$. 求当 $-3<y<3$ 时 x 的取值范围.

[1] 图 5-9 中，3 000 以下的刻度省略，下同.

3. 某一次函数的图象经过点$(-1,2)$，且函数 y 的值随自变量 x 的增大而减小. 请写出一个符合条件的一次函数的表达式.

B 4. 一辆汽车加满油后，油箱中有汽油 70 L，汽车行驶时正常的耗油量为 0.1 L/km.

(1) 求油箱中剩余的汽油量 Q(L)关于加满油后已驶里程 d(km)的函数表达式，确定自变量 d 的取值范围(假定该汽车能工作至油量为零)，并画出它的图象.

(2) 利用图象说明，当已驶里程超过 425 km 后油箱内的汽油量.

5. 已知某种商品的买入单价为 30 元，售出价的 10%用于缴税和其他费用. 若要使纯利润保持在买入价的 11%～20%之间（包括 11%和 20%），问售出单价应该为多少元?

5·5 一次函数的简单应用

蓝鲸是现存动物中体形最大的一种，体长的最高记录是 3 200 cm. 根据生物学家对成熟雄性鲸体长的测量，其全长和吻尖到喷水孔的长度可近似地用一次函数表示.

1

在日常生活和生产实践中有不少问题的数量关系可以用一次函数来刻画. 在运用一次函数解决实际问题时，首先判定问题中的两个变量之间是不是一次函数关系. 当确定是一次函数关系时，可求出函数表达式，并运用一次函数的图象和性质进一步求得我们所需要的结果.

确定两个变量是否构成一次函数关系的一种常用方法是利用图象去获得经验公式，这种方法的基本步骤是:

(1) 通过实验、测量获得数量足够多的两个变量的对应值.

(2) 建立合适的直角坐标系，在坐标系中，以各对应值为坐标描点，并用描点法画出函数图象.

(3) 观察图象特征，判定函数的类型.

这样获得的函数表达式有时是近似的.

例1 生物学家测得 7 条成熟的雄性鲸的全长 y 和吻尖到喷水孔的长度 x（图5-10）的数据如下表（单位：m）：

表5-9

吻尖到喷水孔的长度 x(m)	1.78	1.91	2.06	2.32	2.59	2.82	2.95
全长 y(m)	10.00	10.25	10.72	11.52	12.50	13.16	13.90

问能否用一次函数刻画这两个变量 x 和 y 的关系？如果能，请求出这个一次函数的表达式.

图 5-10

分析 在直角坐标系中画出以表 5-9 中各对 x 与 y 的对应值为坐标的各点，观察这些点是否在（或大致在）一条直线上，从而判断 y 是不是关于 x 的一次函数. 如果是，就可以用待定系数法求出 y 关于 x 的函数表达式.

解 在直角坐标系中画出以表5-9 中 x 的值为横坐标，y 的值为纵坐标的 7 个点（如图5-11）.

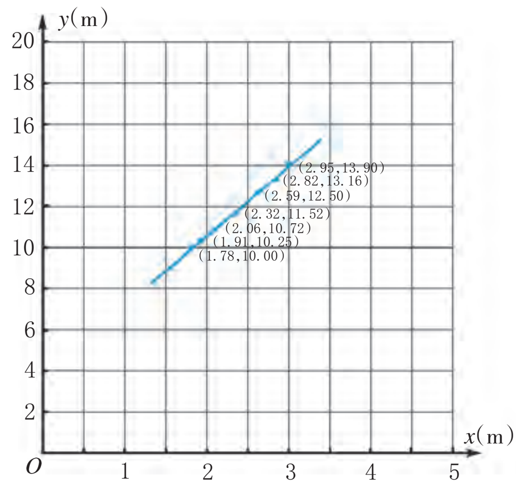


图 5-11

这 7 个点几乎在同一条直线上，所以所求的函数可以看成一次函数，即可用一次函数来刻画这两个量 x 和 y 的关系.

设这个一次函数为 $y=kx+b$.

因为较多的点靠近或在点(1.91,10.25),(2.59,12.50)所确定的直线上,所以把点(1.91,10.25),(2.59,12.50)的坐标分别代入 $y=kx+b$,

得 $\begin{cases}10.25=1.91k+b,\\12.50=2.59k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k\approx 3.31,\\b\approx 3.93.\end{cases}$

所以所求的函数表达式为 $y=3.31x+3.93$.

把其余 5 个点的坐标代入函数表达式进行检验,你发现什么问题? 把你发现的问题提出来,与你的同伴交流.

课内练习 KENEILIANXI

1. 通过实验获得u,v 两个变量的各对应值如下表.

u	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
v	50	100	155	207	260	290	365	470

判断变量 u,v 是否满足或近似地满足一次函数关系式. 如果是,求 v 关于 u 的函数式,并利用函数式求出当 $u=2.2$ 时函数 v 的值.

2. 绝大部分国家都使用摄氏温度(℃),也有极少数国家(如美国)的天气预报中使用华氏温度(℉). 两种计量单位之间有如下对应关系:

摄氏 C(℃)	0	10	20	30	40	50
华氏 F(℉)	32	50	68	86	104	122

(1) 在直角坐标系中描出以上表中各对 C(℃)与 F(℉)的对应值为坐标的各点,观察这些点是否在同一条直线上.

(2) 求出 C(℃)关于 F(℉)的函数表达式.

(3) 求华氏温度为 100℉时的摄氏温度.

(4) 华氏温度的值与摄氏温度的值有可能相同吗? 请说明理由.

作业题 ZUOYETI

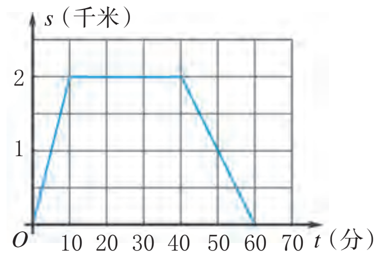
A **1.** 小聪上午 8:00 从家里出发,骑车去一家超市购物,然后从这家超市返回家中. 小聪离家的路程 s(千米)和所经过的时间 t(分)之间的

函数关系如图所示. 请根据图象回答下列问题:

(1) 小聪去超市途中的速度是多少? 回家途中的速度是多少?

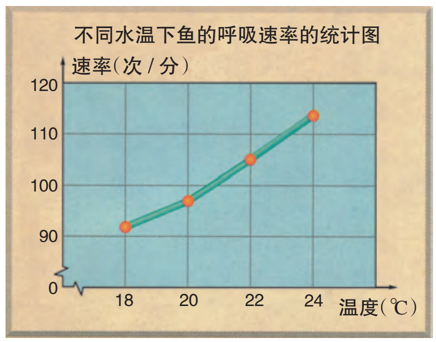
(2) 小聪在超市逗留了多少时间?

(3) 小聪在来去途中,离家 1 千米处的时间是几时几分?



(第 1 题)

2. 科学家用一些金鱼做实验,测试不同水温对"鱼的呼吸速率"(即开闭鳃盖的次数与时间的比)的影响,得到统计图如图所示. 若设温度为 t(℃),平均呼吸速率为 v(次/分),你能用其他恰当的方式表示 v 与 t 的关系吗?



(第 2 题)

B **3.** 三位教师带领若干名学生去旅游, 联系了标价相同的两家旅游公司. 经洽谈,甲公司给出的优惠条件是:教师全额收费,学生按 7 折收费;乙公司给出的优惠条件是:全部师生按 8 折收费. 选哪家公司师生付费的总额较少?

4. 小明 4 岁那年父亲种下一棵山毛榉和一棵枫树. 当时山毛榉高 2.4 m,枫树高 0.9 m. 现在枫树已经比山毛榉高了,在此期间,山毛榉的平均生长速度是每年长高 0.15 m,枫树的平均生长速度是每年长高 0.3 m. 问小明现在的年龄应超过多少岁?

山毛榉

枫 树

2

例2 小聪和小慧去某风景区游览，约好在飞瀑见面. 上午 7:00，小聪乘电动汽车从古刹出发，沿景区公路(图 5-12)去飞瀑，车速为 30 km/h. 小慧也于上午 7:00 从塔林出发，骑电动自行车沿景区公路去飞瀑，车速为 20 km/h.

(1) 当小聪追上小慧时，他们是否已经过了草甸?

(2) 当小聪到达飞瀑时，小慧离飞瀑还有多少千米?

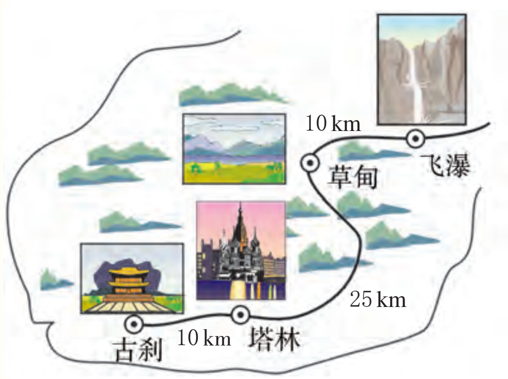


图 5-12

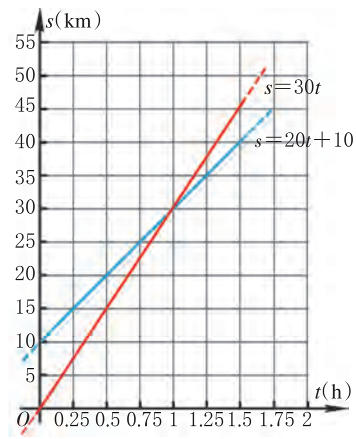


图 5-13

解 设经过 t 时，小聪与小慧离古刹的路程分别为 s_1，s_2，由题意，得 $s_1=30t$，$s_2=20t+10$.

在直角坐标系中画出直线 $s=30t$ 和直线 $s=20t+10$(图 5-13). 观察图象得，

(1) 两条直线 $s=30t$，$s=20t+10$ 的交点坐标为(1，30)，所以当小聪追上小慧时，$s=30$ km，即离古刹 30 km，小于 35 km，也就是说，他们还没到草甸.

(2) 如图 5-13，当小聪到达飞瀑时，即 $s_1=45$ km，此时 $s_2=40$ km. 所以小慧离飞瀑还有 $45-40=5$(km).

上例第(1)题中，两条直线的交点坐标(1，30)应同时满足两条直线的表达式，即是二元一次方程组 $\begin{cases} s=30t, \\ s=20t+10 \end{cases}$ 的解. 由此可见，我们可以用两个一次函数的图象，通过观察确定两条直线的交点的坐标值，求出由两个一次

函数式组成的方程组的解（注意，这样得到的解可能是近似解）. 反之，也可以通过解由两个一次函数式组成的二元一次方程组来求得两个一次函数图象交点的坐标.

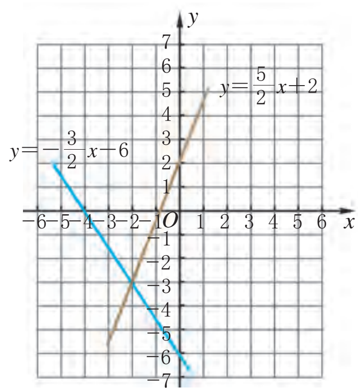
课内练习 KENEILIANXI

1. 利用一次函数的图象，求二元一次方程组$\begin{cases}2x+y=0,\\ y=x+6\end{cases}$的解.

2. 一次招聘会上，A，B 两公司都在招聘销售人员. A 公司给出的工资待遇是：每月 1 000 元基本工资，另加销售额的 2%作为奖金；B 公司给出的工资待遇是：每月 600 元基本工资，另加销售额的 4%作为奖金. 如果你去应聘，那么你将怎样选择？

作业题 ZUOYETI

A **1.** 如图，由图象得$\begin{cases}5x-2y+4=0,\\ 3x+2y+12=0\end{cases}$的解是__________.



（第 1 题）

2. 已知 A，B 两地相距 80 km，甲、乙两人沿同一条公路从 A 地出发到 B地，乙骑自行车，甲骑摩托车. 图中 DE，OC 分别表示甲、乙离开 A 地的路程 s(km)与乙离开 A 地的时间 t(h)的函数关系的图象，根据图象填空：

（1）乙先出发，甲后出发，相差________h.

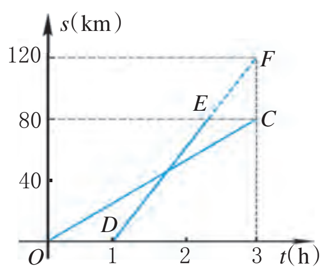
（2）大约在乙出发后__________h 两人相遇，相遇地点离开 A 地_________km.

（3）甲到达 B 地时，乙在离 A 地约_______km 处.

（4）甲的速度为_________，乙的速度为_________.

（5）乙离开 A 地的路程 s(km)与时间 t(h)的函数表达式为____________________________.

（6）甲离开 A 地的路程 s(km)与时间 t(h)的函数表达式为____________________________.



（第 2 题）

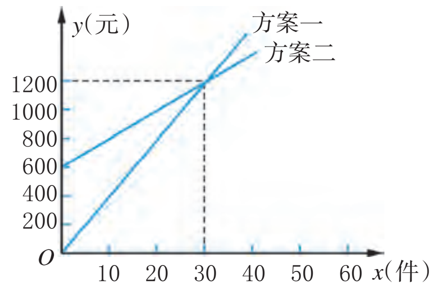
3. 利用一次函数的图象求二元一次方程组$\begin{cases}x-y=1,\\ 2x-3y=1\end{cases}$的解.

4. 某销售公司推销一种产品，设 x(件)是推销产品的数量，y(元)是付给推销员的月报酬. 公司付给推销员月报酬的两种方案如图所示，推销员可以任选一种与公司签订合同.看图解答下列问题：

（1）求每种付酬方案 y 关于 x 的函数表达式.

（2）根据图中表示的两种方案，说明公司是如何付推销员报酬的.

（3）如果你是推销员，那么你会选择哪种方案？



（第 4 题）

5. 某商场要印制商品宣传材料，甲印刷厂的收费标准是：每份材料收 1 元印制费，另收 1 500 元制版费；乙印刷厂的收费标准是：每份材料收 2.5 元印制费，不收制版费.

（1）分别写出两厂的收费 y(元)与印制数量 x(份)之间的关系式.

（2）在同一直角坐标系中画出它们的图象.

（3）根据图象回答下列问题：印制 800 份宣传材料时，选择哪一家印刷厂比较合算？商场计划花费 3 000 元用于印刷宣传材料，找哪一家印刷厂能印制宣传材料多一些？

PROJECT 设计题 SHEJITI

在弹簧上悬挂物体，弹簧就会伸长. 弹簧伸长的长度和悬挂物体的质量之间有什么函数关系？请以 4～6 人为一组探讨上述问题. 建议：

1. 采用实验的方法，可找两三条生活或生产中使用的弹簧，在弹性限度内不断改变各条弹簧所挂物体的质量，量出相应的弹簧长度，并把记录的数据列成表格.

2. 通过观察数据，或以各组数据为坐标在直角坐标系内描点，判别函数关系的类别，并求出函数表达式.

3. 就有关实验和探究过程以及发现的结果写一份简要的报告，并举例说明所得发现在人们生活中的应用及意义.

怎样选择较优方案

某电信公司提供的移动通讯服务的收费标准有两种方案，如表 5-10.

表 5-10

	A 方案	B 方案
每月基本服务费	30 元	50 元
每月免费通话时间	120 分	200 分
超出后每分钟收费	0.4 元	0.4 元

如果请你选择其中一种方案，应如何选择？

建议从以下几方面考虑：

1. 在服务质量相同的情况下，人们通常根据什么来选择方案？
2. 每种方案每月付费金额与什么相关？
3. 怎样表示每月话费与通话时间的关系？

设每月通话时间为 x 分，A，B 两种方案每月话费分别为 y_1 元，y_2 元，则

$$y_1=\begin{cases}30\ (0\leqslant x\leqslant 120),\\ 30+0.4(x-120)=0.4x-18\ (x>120);\end{cases}$$

$$y_2=\begin{cases}50\ (0\leqslant x\leqslant 200),\\ 0.4x-30\ (x>200).\end{cases}$$

在同一直角坐标系中画出图象，如图 5-14.

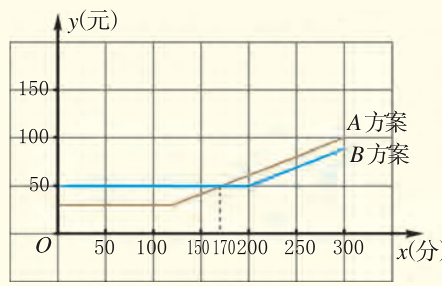


图 5-14

观察图象得，

当 $0\leqslant x<170$ 时，$y_1<y_2$；

当 $x=170$ 时，$y_1=y_2$；

当 $x>170$ 时，$y_1>y_2$.

由此可见，如果从节省费用的角度考虑，当每月通话时间少于 170 分时，应选择 A 方案；大于 170 分时，应选择 B 方案；等于 170 分时，A，B 两方案可任选一种.

上例说明了数学中不等式、函数等知识在解决现实问题中的应用. 你能运用上例所体现的数学思想和方法去解决一个现实生活中你所熟悉的实际问题吗？请自己提出问题并尝试解决.

（请与你的同学合作进行）

小结

XIAOJIE

填空.

1. 在一个过程中，固定不变的量称为______________，可以取不同数值的量称为_____________.

2. 设有两个变量 x，y，如果对于 x 的__________的值，y 都有______________的值，那么就说 y 是 x 的函数，x 叫做___________. 表示函数的三种方法是________、________、________.

3. 函数 $y=kx+b$（k，b 都是常数，且 $k\neq0$）叫做_____________. 当 $b=0$ 时，函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）叫做__________，常数 k 叫做_____________.

4. 一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）的图象是一条直线. 该直线上的点 (x,y) 都满足关系式_____________；反过来，坐标满足 $y=kx+b$ 的点都在该直线上.

5. 对于一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）. 当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而____________；当____________时，y 随 x 的增大而减小.

填表.

技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
会用待定系数法确定一次函数的表达式			
用描点法作函数图象			
作一次函数的图象			
利用一次函数及其图象解决一些简单问题			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 5.1 节 5.2 节

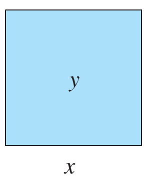
- 了解常量、变量和函数的概念.了解函数的三种表示方法.
- 会列简单实际问题的函数表达式,会求函数值和简单函数的自变量的取值范围.

1. 一列行驶中的火车的速度为每小时 160 千米,用 t(时)表示行驶的时间,s(千米)表示行驶的里程. 其中常量是__________,变量是__________,s 关于 t 的函数表达式是__________. 当 $t=2.5$ 时,函数 s 的值是__________.

2. 寄一封 20 克以内的平信,需邮资 1.2 元,设寄 x 封这样的信,所需的邮资为 y 元. 求:

(1) y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

(2) 当 $x=3$ 时的函数值,并说明此时函数值的实际意义.



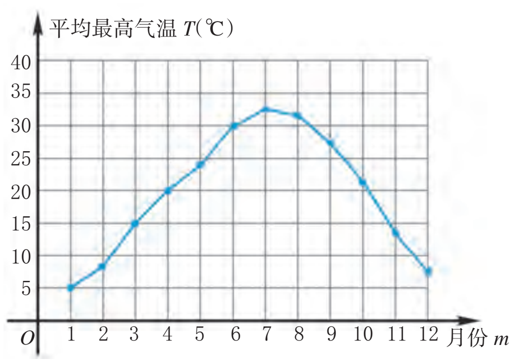
(第 3 题)

3. 如图,设正方形的面积为 $y(\text{m}^2)$,边长为 $x(\text{m})$.

(1) 求 y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

(2) 分别求当 $x=5,10$ 时,函数 y 的值.

4. 某城市 12 个月平均最高气温 T(℃)与月份 m 的函数关系如图. 求该城市 1 月,7 月的平均最高气温.



(第 4 题)

目标B 5.3 节

- 理解正比例函数、一次函数的概念.
- 能根据已知条件确定一次函数的表达式,会用待定系数法求一次函数的表达式.
- 会求一次函数的值,会根据已知一次函数的值求对应的自变量的值.

5. 设 y 是关于 x 的一次函数. 当 $x=1$ 时,$y=-5$;当 $x=-2$ 时,$y=-20$. 求:

（1）y 关于 x 的一次函数表达式.

（2）当 $x=1.4$ 时，y 的值.

（3）当 $y=\frac{10}{3}$时，x 的值.

6. 图中两个时针的指针分别表示同一时刻的北京时间和东京时间. 设北京时间为 t(时)，东京时间为 y(时)，就 $0\leqslant t\leqslant 12$ 的范围，分别求 y 关于 t 的函数表达式，并填写下表(同一时刻的两地时间).

（第 6 题）

北京时间	8:30		4:30
东京时间		12:10	

7. 已知 y 是关于 x 的一次函数，下表列出了部分对应值，则 $m=$_____.

x	1	0	2
y	3	m	5

8. 某市居民用电采用分段计费，即每月用电量不超过 50 千瓦时的部分，按每千瓦时 0.538 元计费；每月用电量超过 50 千瓦时，不超过 200 千瓦时的部分，按每千瓦时 0. 568 元计费；每月用电量超过 200 千瓦时的部分，按每千瓦时 0. 638 元计费.

（1）设每月用电 $x(x>100)$千瓦时，应缴电费 y 元，写出 y 与 x 的关系式.

（2）小明家一月份用电量为 125 千瓦时，应缴电费多少元？

目标C 5.4 节

● 了解一次函数图象的意义，会画一次函数的图象.

● 根据一次函数的图象和表达式 $y=kx+b(k\neq 0)$ 探索并理解 $k>0$ 和 $k<0$ 时图象的变化.

9. 在同一直角坐标系中画下列函数的图象：

（1）$y=-\frac{3}{7}x$.　（2）$y=8x-4$.　（3）$y=-3x+6$.

10. 已知$(-1,y_1)$,$(-0.5,y_2)$,$(1.7,y_3)$是直线$y=-9x+b$(b为常数)上的三个点,则y_1,y_2,y_3的大小关系是(   )

(A) $y_3>y_2>y_1$.　　(B) $y_1>y_2>y_3$.

(C) $y_1>y_3>y_2$.　　(D) $y_3>y_1>y_2$.

11. 已知y与$x+b$成正比例,且当$x=4$时,$y=6$;当$x=2$时,$y=2$.

(1) 求y关于x的函数表达式.

(2) 若$-2<y<8$,求x的取值范围.

12. 春天到了,某服装店将冬装一律4折(原售价的40%)出售.估算一件原售价为300~350元的冬装现价为多少元.你能用正比例函数的增减性说明理由吗?

目标D 5.5节

●体会一次函数与二元一次方程组的关系.

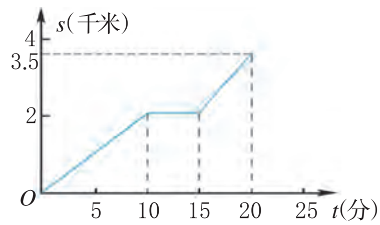
●能用一次函数解简单实际问题.

13. 小明放学骑车回家过程中,路程s与时间t的关系如图.请根据图象回答下面的问题:

(1) 开始10分钟内的速度是多少?最后5分钟内呢?

(2) 经15分钟后离家路程还有多远?

(3) 小明回家途中有没有停留?停留多少时间?



(第13题)

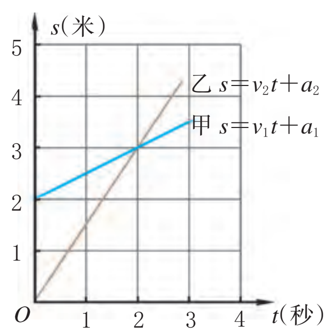
14. 已知甲、乙两物体沿同一条直线同时、同向匀速运动,它们所经过的路程s与所需时间t之间的函数表达式分别为$s=v_1t+a_1$和$s=v_2t+a_2$,图象如图所示.

(1) 说出甲、乙两物体的初始位置,并说明开始时谁前谁后.

(2) 哪个物体运动得快一些?从物体运动开始,2秒以前谁先谁后?2秒以后呢?

(3) 求v_1,v_2的值,并写出两个函数表达式.

(4) 根据图象确定何时两物体处于同一位置,并通过解二元一次方程组予以验证.



(第14题)

15. 酒精的体积与温度之间的关系在一定范围内近似地符合一次函数关系. 现测得一定量的酒精在 0℃时的体积是 5.250 L,在 40℃时的体积是 5.481 L.

（1）估算这些酒精在 20～30℃时的体积（精确到 0.001 L）.

（2）如果用容积为 5.3 L 的容器来盛这些酒精，为了不使酒精溢出,酒精的温度应保持在多少摄氏度(精确到 1℃)?

16. 某校八年级举行英语演讲比赛，购买 A,B 两种笔记本作为奖品，这两种笔记本的单价分别是 12 元和 8 元. 根据比赛设奖情况,需购买两种笔记本共 30 本，并且购买 A 笔记本的数量要少于 B 笔记本数量的 $\frac{2}{3}$,但又不少于 B 笔记本数量的 $\frac{1}{3}$. 设买 A 种笔记本 n 本,买两种笔记本的总费用为 W 元.

（1） 写出 W(元)关于 n(本)的函数关系式,并求出自变量 n 的取值范围.

（2）购买这两种笔记本各多少本时,费用最少? 最少的费用是多少元?

义务教育教科书
数　学　八年级上册
YIWU JIAOYU JIAOKESHU
SHUXUE　BA NIANJI SHANGCE

责任编辑　华　琼　　**责任校对**　吴招生
装帧设计　在线广告传媒有限公司　　**责任印务**　陆　江

出　　版　浙江教育出版社
（杭州市天目山路40号　电话：0571-85170300-80928）
发　　行　浙江省新华书店集团有限公司
图文制作　杭州兴邦电子印务有限公司
印　　刷　杭州长命印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　11
字　　数　220 000
版　　次　2013年7月第1版
印　　次　2021年6月第9次印刷
本次印数　00 001—550 000
标准书号　ISBN 978-7-5536-0922-5
定　　价　10.94元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与承印厂联系调换。
电话：0571-88533963

绿色印刷产品

定价批准文号：浙发改价格[2019]319号、[2020]331号　　举报电话：12345、12315

ISBN 978-7-5536-0922-5