教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

八年级 上册

河北教育出版社

义务教育教科书

数学

八年级 上册

河北教育出版社

ISBN 978-7-5434-9541-8

定价：10.50元

全国价格举报电话：12358

绿色印刷产品

义 务 教 育 教 科 书

数学

八年级 上册

河北教育出版社

遨游在数学世界中

亲爱的同学们：

你们好。又是一年秋收时，新的数学知识和方法，就像秋天里的果实，等待大家去发现，去采摘。

当你们拿到这本八年级上册教科书时，请不要忘记以下这些栏目。

观察与思考：通过观察、感悟和思考，期待你们获得正确的数学认知。

一起探究：和大家一起探究和认识数学知识、思想和方法，这会使你们有更大的收获。

试着做做、做一做：动手试做，再做一做，这是学习数学所不可缺少的。

大家谈谈：和同学们分享自己的学习成果，大家共同进步。

回顾与反思：把握整体内容，梳理知识脉络，总结思想方法，明确注意事项，这是不可或缺的学习环节。

在内容上，这本书共有六个篇章。

分式和分式方程——分式与分数有许多相似之处。分式有许多新的内容和方法等待我们去探究。分式方程是又一类方程，它也是重要的数学模型之一。

全等三角形——学习三角形之间的“全等”关系，是进行图形研究的重要途径。

实数——在这里，我们将认识一种新的数以及它们的运算。实数与数轴上的点具有一一对应关系，这种关系使得“数与形”紧密地结合在一起。

二次根式——从整式到分式，再到二次根式，是“式”的又一次扩充。

轴对称和中心对称——站在数学的角度，去研究图形的轴对称性和中心对称性，对我们深刻认识现实世界中的各种图形具有很好的启迪作用。

特殊三角形——等腰三角形和直角三角形是两类特殊的三角形，它们都具有一些特殊的性质。这些特殊性质，等待大家去揭示。

我们已经有了一定的数学基础，又面临新的学习任务，让我们继续辛勤耕耘，努力进取，收获更多、更好的数学成果！

你们的编者朋友

2013 年 3 月

目 录

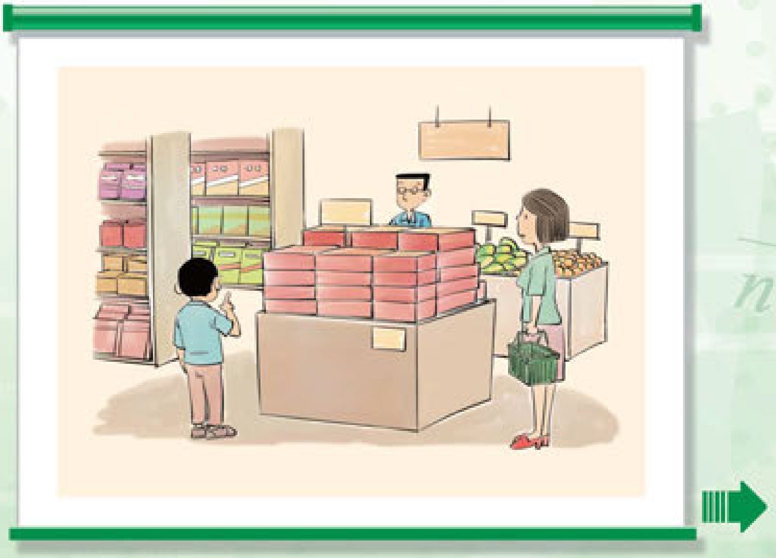
第十二章

分式和分式方程

在本章中，我们将学习

- 分式
- 分式的乘除
- 分式的加减
- 分式方程

某种商品，原来每盒售价为p元，现在每盒的售价降低了2元. 用500元钱购买这种商品，现在比原来可多买多少盒?



12.1 分　式

"数和式"是刻画现实世界中数量关系的数学模型，从整式到分式，如同从整数到分数一样，都是源于现实世界的客观需要. 现在，我们就来研究分式.

做一做

1. 一项工程，甲施工队 5 天可以完成. 甲施工队每天完成的工程量是多少？3 天完成的工程量又是多少？如果乙施工队 a 天可以完成这项工程，那么乙施工队每天完成的工程量是多少？$b(b<a)$天完成的工程量又是多少？

2. 已知甲、乙两地之间的路程为 m km. 如果 A 车的速度为 n km/h，B 车比 A 车每小时多行 20 km，那么从甲地到乙地，A 车和 B 车所用的时间各为多少？

大家谈谈

由上面的问题，我们分别得到下面一些代数式：

$$\frac{1}{5},\ \frac{3}{5};\ \frac{1}{a},\ \frac{b}{a};\ \frac{m}{n},\ \frac{m}{n+20}.$$

将这些代数式按"分母"含与不含字母来分类，可分成怎样的两类？

一般地，我们把形如$\frac{A}{B}$的代数式叫做**分式**(fraction)，其中，A，B 都是整式，且 B 含有字母. A 叫做分式的分子，B 叫做分式的分母.

例 1 指出下列各式中，哪些是整式，哪些是分式.

$$x-2,\ \frac{x+3}{5},\ 5x^2,\ \frac{x-3}{3x+2},\ \frac{ab}{x-y},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{x}.$$

> 分式的分母必须含有字母. 分式也可以看做两个整式相除(除式中含有字母)的商.

解：$x-2$，$\frac{x+3}{5}$，$5x^2$，$\frac{1}{4}$都是整式；

因为$\frac{x-3}{3x+2}$，$\frac{ab}{x-y}$，$\frac{2}{x}$的分母都含有字母，所以它们都是分式.

在分数中，分母不能等于 0. 同样，在分式中，分母也不能等于 0，即

当分式的分母等于 0 时，分式没有意义. 如分式$\dfrac{1}{x-5}$，当 $x-5\neq 0$，即 $x\neq 5$ 时，它有意义；当 $x-5=0$，即 $x=5$ 时，它没有意义.

大家谈谈

在什么情况下，下列各分式无意义？

$$\frac{2}{x},\ \frac{x-3}{3x+2},\ \frac{ab}{x-y}.$$

观察与思考

分数的分子和分母同乘(或除以)一个不等于 0 的数，其值不变. 如

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 2}{3\times 2},\ \frac{10}{100}=\frac{10\div 10}{100\div 10}.$$

类比分数的这种性质，思考：分式的分子和分母同乘(或除以)一个不等于 0 的整式，分式的值会怎样？

分式的基本性质

分式的分子和分母同乘(或除以)一个不等于 0 的整式，分式的值不变.

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\ \frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}.$$ **其中，M 是不等于 0 的整式.**

做一做

分式$\dfrac{a-b}{a(a-b)}$与$\dfrac{b}{ab}$相等吗？还有与它们相等的分式吗？如果有，请你写出两个这样的分式.

练　习

1. 当 x 取何值时，下列分式有意义？

(1) $\dfrac{1}{x-1}$；　　　　(2) $\dfrac{2x-3}{2x+3}$.

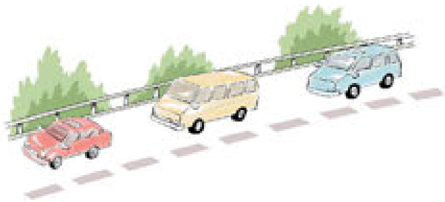
2. 判断下面的语句是否正确，并说明理由.

(1) 分式$\frac{1}{x}$与$\frac{2}{2x}$相等.　　(2) 分式$\frac{5}{a}$与$\frac{5\times5}{a\cdot a}$相等.

(3) 分式$\frac{4}{6a}$与$\frac{2}{3a}$相等.　　(4) 分式$\frac{xy}{x^2}$与$\frac{y}{x}$相等.

习题

1. 如果在一条公路上，同向行驶且前后相邻的两辆车的车头与车头之间的平均距离为d(米/辆)，车辆的平均速度为v (m/s)，那么$\frac{v}{d}$(辆/秒)叫做这条公路的同向行驶的车流量. 求当$v=20$ m/s，$d=10$ 米/辆时同向行驶的车流量.



2. 当x取何值时，分式$\frac{x}{x+1}$有意义？当x取何值时，分式$\frac{x}{x+1}$的值为0？
3. 在下列等式中，从等号的左端到右端是通过怎样的变形得到的？

(1) $\frac{y}{x}=\frac{x^2y}{x^3}$；　　(2) $\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$；

(3) $\frac{4x}{x+y}=\frac{20x}{5(x+y)}$；　　(4) $\frac{x-2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}$.

4. 写出与分式$\frac{2}{x^2}$相等的两个分式.

利用分式的基本性质可以对分式进行化简.

观察与思考

分式$\frac{ab+ac}{bd+cd}$能不能化简？如果能，那么化简的依据是什么，化简的结果又是什么？

分式 $\frac{ab+ac}{bd+cd}$ 可以化简，化简过程为：

分解因式　　　　分子和分母都除以$b+c$

原分式 $\dfrac{ab+ac}{bd+cd} = \dfrac{a(b+c)}{d(b+c)} = \dfrac{a}{d}$ 化简后分式

确定分子和分母的公因式　　　　约去公因式

像上面这样，把分式中分子和分母的公因式约去，叫做分式的**约分**(reduction of a fraction). 分子和分母没有公因式的分式叫做**最简分式**(simplest fraction).

> 分式化简的结果应是最简分式. 有时，分式化简的结果可能是整式.

如在分式$\dfrac{ab+ac}{bd+cd}$中，分子和分母的公因式为$b+c$，约去这个公因式，得到$\dfrac{a}{d}$，分式$\dfrac{a}{d}$是最简分式.

约分是为了将分式化为最简分式.

例 2　约分：

(1) $\dfrac{35a^2b^2}{15a^3b}$；　(2) $\dfrac{x^2-y^2}{a(x+y)}$；　(3) $\dfrac{4m-m^2}{m^2-8m+16}$.

解：(1) $\dfrac{35a^2b^2}{15a^3b}$

$=\dfrac{7b\cdot 5a^2b}{3a\cdot 5a^2b}$　　确定分子和分母的公因式

$=\dfrac{7b}{3a}$.　　约去公因式，得到最简分式

(2) $\dfrac{x^2-y^2}{a(x+y)}$

$=\dfrac{(x-y)(x+y)}{a(x+y)}$　　将分子和分母分解因式，确定分子和分母的公因式

$=\dfrac{x-y}{a}$.

(3) $\dfrac{4m-m^2}{m^2-8m+16}$

$=\dfrac{m(4-m)}{(4-m)^2}$

$=\dfrac{m}{4-m}$.

我们学过代数式的求值，分式是代数式，因此分式也有求值的问题.

做一做

当 $p=12$，$q=-8$ 时，请分别用直接代入求值和化简后代入求值两种方法求分式 $\frac{p^2-pq}{p^2-2pq+q^2}$ 的值，并比较哪种方法较简单.

练　习

1. 下列分式的约分是否正确？请把不正确的改正过来.

(1) $\frac{x^3}{x^2}=x$；　(2) $\frac{a^2}{2a}=1$；　(3) $\frac{mn}{mn^2}=0$；　(4) $\frac{-x+y}{x-y}=-1$.

2. 约分：

(1) $\frac{6ab^2}{8b^3}$；　(2) $\frac{x^2-2xy}{x^2-4xy+4y^2}$；　(3) $\frac{a^2+2a+1}{a^2+a}$.

习　题

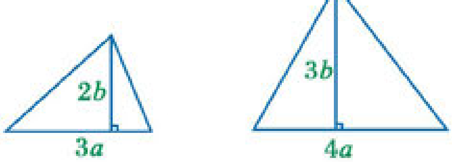
1. 约分：

(1) $\frac{5m^2x}{10mx^2}$；　(2) $\frac{-2a}{3a+a^2}$；　(3) $\frac{x^2-9}{x+3}$；

(4) $\frac{ab+ab^2}{1-b^2}$；　(5) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$；　(6) $\frac{a^3-4ab^2}{-a^3-4a^2b-4ab^2}$.

2. 当 $x=2$，$y=3$ 时，求 $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$ 的值.

3. 如图，计算小三角形与大三角形的面积比.



（第 3 题）

12.2 分式的乘除

我们已经熟悉分数的乘法运算和除法运算，那么怎样进行分式的乘法运算和除法运算呢？

观察与思考

我们都知道分数的乘法运算，如：

$$\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=\frac{2\times6}{3\times7}=\frac{4}{7}.$$

请类比分数的乘法运算，思考分式$\frac{A}{B}$与$\frac{C}{D}$相乘的结果.

分式的乘法法则

分式与分式相乘，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}.$$

例 1 计算下列各式：

(1) $\frac{3y}{2x}\cdot\frac{z}{a}$；　　(2) $\frac{8y^2}{3x^2}\cdot\frac{3x}{4y^3}$.

解：(1) $\frac{3y}{2x}\cdot\frac{z}{a}=\frac{3y\cdot z}{2x\cdot a}=\frac{3yz}{2ax}$.

(2) $\frac{8y^2}{3x^2}\cdot\frac{3x}{4y^3}$

$=\frac{8y^2\cdot3x}{3x^2\cdot4y^3}$

$=\frac{2}{xy}$.

分式的运算结果要化为最简分式或整式.

例 2 计算下列各式：

(1) $\frac{x^2-4x}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x-4}$；　　(2) $\frac{a^2-4}{a^2+6a+9}\cdot\frac{a+3}{a+2}$.

解：(1) $\frac{x^2-4x}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x-4}$

$$=\frac{(x^2-4x)(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$

$$=\frac{x(x-4)(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$

$$=x.$$

(2) $\frac{a^2-4}{a^2+6a+9}\cdot\frac{a+3}{a+2}$

$$=\frac{(a^2-4)(a+3)}{(a^2+6a+9)(a+2)}$$

$$=\frac{(a+2)(a-2)(a+3)}{(a+3)^2(a+2)}$$

$$=\frac{a-2}{a+3}.$$

做一做

计算下列各式：

(1) $-3xy^2\cdot\frac{2x}{15y^2}$；　　(2) $\frac{x-1}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}$.

练　习

1. 计算下列各式：

(1) $\frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{y^2}{x}$；　　(2) $\frac{2a^2}{3b^2}\cdot\frac{9b^2}{a^3}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\frac{a-b}{ab}\cdot\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}$；　　(2) $\frac{a+1}{a^2-9}\cdot\frac{a-3}{a+1}$.

习　题

A　组

1. 计算下列各式：

(1) $\frac{a}{bc}\cdot\frac{c^2}{a^2}$；　　(2) $\frac{3y}{4x}\cdot\frac{20x}{9y^2}$；

(3) $8a^2b^2\cdot\frac{a}{12b^2}$；　　(4) $(xy-x^2)\cdot\frac{xy}{x-y}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2y+xy^2}\cdot\frac{y}{x+y}$；　(2) $\frac{x^2-y^2}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+2xy+y^2}$；

(3) $\frac{x-2y}{x^2+4xy+4y^2}\cdot\frac{x+2y}{x^2-2xy}$；　(4) $\frac{a^2-b^2}{4a^2-4ab+b^2}\cdot\frac{2a-b}{a^2+ab}$.

B 组

1. 计算下列各式：

(1) $\frac{12bc}{a^2}\cdot\frac{5ac}{2b^2}\cdot\frac{7ab}{15c^2}$；

(2) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+6xy+9y^2}\cdot\frac{x^2-9y^2}{3x^2y}\cdot\frac{2x(x+3y)}{x-y}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\left(\frac{b}{a}\right)^2$；　(2) $\left(\frac{b}{a}\right)^4$；　(3) $\left(\frac{b}{a}\right)^n$（$n$ 为正整数）.

观察与思考

一个分数除以另一个分数，是将除数的分子与分母颠倒位置后，与被除数相乘. 如：

$$\frac{2}{3}\div\frac{7}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{2}{7}.$$

类比分数的除法运算，思考分式$\frac{A}{B}$除以$\frac{C}{D}$的结果.

分式的除法法则

分式除以分式，把除式的分子与分母颠倒位置后，与被除式相乘.

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}.$$

由此可知，分式的除法运算是转化为分式的乘法运算进行的.

例 3 计算下列各式：

(1) $\frac{5y^2}{2x}\div\frac{y}{4x}$；(2) $\frac{2x-6}{x-2}\div\frac{x-3}{x^2-4}$；(3) $\frac{a^2+3ab}{a^2+2ab+b^2}\div\frac{a+3b}{a^2-b^2}$.

解：(1) $\frac{5y^2}{2x}\div\frac{y}{4x}$

$=\frac{5y^2}{2x}\cdot\frac{4x}{y}$

$=10y$.

(2) $\frac{2x-6}{x-2} \div \frac{x-3}{x^2-4}$

$=\frac{2x-6}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x-3}$

$=\frac{2(x-3)(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

$=2x+4.$

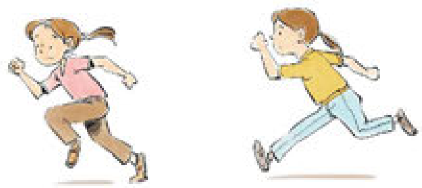
(3) $\frac{a^2+3ab}{a^2+2ab+b^2} \div \frac{a+3b}{a^2-b^2}$

$=\frac{a^2+3ab}{a^2+2ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a+3b}$

$=\frac{a(a+3b)(a+b)(a-b)}{(a+b)^2(a+3b)}$

$=\frac{a(a-b)}{a+b}.$

例 4 八年级(一)班的同学在体育课上进行长跑训练，小芳跑完 1 000 m 用了 t s，小华用相同的时间跑完了 800 m. 这次训练，小芳的平均速度是小华的平均速度的多少倍？



解：小芳的平均速度为$\frac{1\,000}{t}$ m/s，小华的平均速度为$\frac{800}{t}$ m/s.

$$\frac{1\,000}{t} \div \frac{800}{t} = \frac{1\,000}{t} \times \frac{t}{800} = \frac{1\,000}{800} = 1.25.$$

答：这次训练，小芳的平均速度是小华的平均速度的 1.25 倍.

练　习

计算下列各式：

(1) $\frac{2a}{3m^2n} \div \frac{a}{6m}$;

(2) $\frac{2-x}{x+1} \div (2x-x^2)$;

(3) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab} \div \frac{(a+b)^2}{a+2b}$.

习 题

A 组

1. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{a^2}{b^2}\div\dfrac{a^2}{2b}$；

(2) $\dfrac{x-y}{xy}\div(x-y)$；

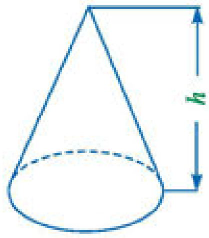
(3) $(x-2)\div\dfrac{x^2-4x+4}{x+2}$；

(4) $\dfrac{a-2}{a^2+8a+16}\div\dfrac{a^2-4}{a+4}$.

2. 如图，圆锥的体积$V=\dfrac{1}{3}Sh$. 其中，S为圆锥的底面积，h为圆锥的高.

(1) 当圆锥的高扩大为原来的a倍而底面积不变时，变化后的圆锥的体积是原来的多少倍?

(2) 当圆锥的底面积扩大为原来的a倍而体积不变时，变化后的圆锥的高是原来的几分之一?



(第 2 题)

B 组

1. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{a^2-1}{a^2+4a+4}\div(a+1)\cdot\dfrac{(a+1)(a+2)}{a-1}$；

(2) $(xy-x^2)\div\dfrac{x^2-2xy+y^2}{xy}\cdot\dfrac{x-y}{x^2}$.

2. 已知$a^2-a=0$，求$\dfrac{a-1}{a+2}\cdot\dfrac{a^2-4}{a^2-2a+1}\div\dfrac{1}{a^2-1}$的值.

12.3 分式的加减

我们已经学习了分式的乘法运算和除法运算，那么分式的加法运算和减法运算怎样进行呢？

一起探究

1. 类比同分母分数的加减运算法则，完成下面同分母分式的加减运算：

(1) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}=$________，　$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=$________；

(2) $\frac{5}{a}-\frac{2}{a}=$________，　$\frac{b}{a}-\frac{c}{a}=$________.

2. 同分母分式的加减运算应当怎样进行呢？

同分母的分式加减法法则

同分母的两个分式相加(减)，分母不变，把分子相加(减).

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{B}=\frac{A\pm C}{B}.$$

例 1 计算下列各式：

(1) $\frac{4a}{x}-\frac{a}{x}$；　(2) $\frac{a+b}{x+a}+\frac{a-b}{x+a}$；　(3) $\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{2ab}{b^2-a^2}+\frac{b^2}{a^2-b^2}$.

解：(1) $\frac{4a}{x}-\frac{a}{x}=\frac{4a-a}{x}=\frac{3a}{x}$.

(2) $\frac{a+b}{x+a}+\frac{a-b}{x+a}=\frac{a+b+a-b}{x+a}=\frac{2a}{x+a}$.

(3) $\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{2ab}{b^2-a^2}+\frac{b^2}{a^2-b^2}$

$=\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{-2ab}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{a^2-b^2}$

$=\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$

$$=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{a-b}{a+b}.$$

分式加减运算的结果要化为最简分式

观察与思考

1. 异分母两个分数相加减，是将其化为同分母分数的加减进行的. 如：

$$\frac{1}{2}\pm\frac{2}{3}=\frac{1\times 3}{2\times 3}\pm\frac{2\times 2}{2\times 3}=\frac{3\pm 4}{6}.$$

2. 类比异分母分数的加减，异分母分式的加减应当怎样进行呢?

3. 试计算：$\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}$.

事实上，

$$\underset{\text{异分母分式相加减}}{\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}}\ \overset{\text{转化为}}{=}\ \underset{\text{同分母分式相加减}}{\frac{bc}{ac}\pm\frac{ad}{ac}}\ \overset{\text{结果为}}{=}\ \underset{\text{分母不变，分子相加减}}{\frac{bc\pm ad}{ac}}$$

像这样，把几个异分母分式分别化为与它们相等的同分母分式，叫做分式的**通分**(changing fractions to a common denominator)，这个相同的分母叫做这几个分式的**公分母**(common denominator).

几个分式的公分母不止一个，通分时一般选取最简公分母. 如 mac(m 为非 0 整式)都是分式$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$的公分母，但 ac 是最简公分母.

异分母的分式加减法法则

异分母的两个分式相加(减)，先通分，化为同分母的分式，再相加(减).

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}\pm\frac{BC}{BD}=\frac{AD\pm BC}{BD}.$$

例 2 计算下列各式：

(1) $\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{c}{a}$； (2) $\dfrac{1}{xz}+\dfrac{x}{2y}$.

解：(1) $\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{c}{a}=\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.

(2) $\dfrac{1}{xz}+\dfrac{x}{2y}=\dfrac{2y}{2xyz}+\dfrac{x^2z}{2xyz}=\dfrac{2y+x^2z}{2xyz}$.

练 习

1. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a-b}$； (2) $\dfrac{2}{1-a}-\dfrac{1}{a-1}$.

2. 下面的运算是否正确？如果不正确，请改正：

(1) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}=\dfrac{b+d}{a+c}$； (2) $\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{ac}-\dfrac{d}{ac}=\dfrac{b-d}{ac}$.

3. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}$； (2) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}$.

习 题

1. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{2y}{x-y}$； (2) $\dfrac{a+1}{a-b}-\dfrac{b+1}{a-b}$；

(3) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x-1}{x+1}$； (4) $\dfrac{9}{2x-3}-\dfrac{3-4x}{3-2x}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$； (2) $\dfrac{2}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}$；

(3) $\dfrac{2}{x-y}-\dfrac{x+y}{(x-y)^2}$； (4) $\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}$；

(5) $\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$； (6) $\dfrac{2a^2}{a-2b}+\dfrac{4a^2b}{4b^2-a^2}$.

3. 某种商品，原来每盒售价为 p 元，现在每盒的售价降低了 2 元. 同样用 500 元钱购买这种商品，现在比原来可多买多少盒？

4. 小明在计算机上打 m 千字的文稿需要 a h，小华在计算机上打 n 千字的文稿需要 b h.

(1) 小明和小华在计算机上平均每小时各打多少千字？

(2) 小明和小华在计算机上打文稿的时间分别为 2 h 和 3 h，他们共打文稿多少千字？

(3) 如果小明比小华打字快，那么小明比小华平均每小时多打多少千字？

例 3 计算下列各式：

(1) $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}$；　　(2) $\dfrac{1}{9a^2+6a+1}-\dfrac{1}{3a+1}$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}\\=&\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}\\=&\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}\\=&\frac{x^2+4x+4-(x^2-4x+4)}{(x+2)(x-2)}\\=&\frac{8x}{(x+2)(x-2)}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{9a^2+6a+1}-\frac{1}{3a+1}\\=&\frac{1}{(3a+1)^2}-\frac{3a+1}{(3a+1)^2}\\=&\frac{1-(3a+1)}{(3a+1)^2}\\=&-\frac{3a}{(3a+1)^2}.\end{aligned}$$

试着做做

计算：$\left(\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{b-a}\right)\div\dfrac{a+b}{ab}$.

分式的混合运算，与数的混合运算类似．在进行分式的加、减、乘、除混合运算时，一般要按照运算顺序进行：先算乘除，再算加减；如果有括号，要先算括号内的．

例 4 计算：$\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\dfrac{x-4}{x^2}$.

解：

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x^2}\\
=&\left[\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]\div\frac{x-4}{x^2}\\
=&\left[\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}-\frac{x(x-1)}{x(x-2)^2}\right]\div\frac{x-4}{x^2}\\
=&\frac{(x+2)(x-2)-x(x-1)}{x(x-2)^2}\div\frac{x-4}{x^2}\\
=&\frac{x^2-4-x^2+x}{x(x-2)^2}\div\frac{x-4}{x^2}\\
=&\frac{x-4}{x(x-2)^2}\div\frac{x-4}{x^2}\\
=&\frac{x-4}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x^2}{x-4}\\
=&\frac{x}{(x-2)^2}.
\end{aligned}$$

做一做

当 $a=-\dfrac{2}{5}$ 时，求 $\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-1}\cdot\dfrac{a-1}{(a+3)(a+1)}$ 的值．

练　习

1．计算下列各式：

（1）$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{2}{ac}+\dfrac{3}{abc}$；　　（2）$\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{a+b}{a^2+b^2-2ab}$；

（3）$\dfrac{1}{x-1}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$；　　（4）$\left(\dfrac{x^2}{x-2}+\dfrac{1}{2-x}\right)\cdot\dfrac{x-2}{x+1}$.

2．当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，求 $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\div\dfrac{x}{2x^2-2}$ 的值．

习题

A 组

1. 计算下列各式：

(1) $\left(\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{x}{y-x}\right)\div\dfrac{x+y}{xy}$；　(2) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{ab}{a^2+2ab+b^2}$；

(3) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\div\dfrac{x^2-2x+1}{x}$；　(4) $\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)\div\dfrac{xy}{x^2-y^2}$；

(5) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right)\div\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$；　(6) $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x+y}\cdot\left(\dfrac{x+y}{2x}-x-y\right)$.

2. 化简并求值：

(1) 已知 $a=-3$，$b=-5$，求 $1+\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}\div\dfrac{1}{a}$ 的值.

(2) 已知 $x=-3$，$y=2$，求 $\left(x+\dfrac{xy}{x-y}\right)\div\dfrac{x^3}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x}$ 的值.

B 组

1. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$；

(2) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{x}{x-y}\cdot\dfrac{y^2}{x+y}-\dfrac{x^4y}{x^4-y^4}\div\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$；

(2) $\left(1-\dfrac{1}{a-b}\right)^2-\left(1+\dfrac{1}{a-b}\right)^2$.

12.4 分式方程

我们在用方程解决一些实际问题时，会遇到一些分母中含有未知数的方程，这就是我们将要学习的分式方程.

小红家到学校的路程为 38 km. 小红从家去学校总是先乘公共汽车，下车后再步行 2 km，才能到学校，路途所用时间是 1 h. 已知公共汽车的速度是小红步行速度的 9 倍，求小红步行的速度.

一起探究

1. 上述问题中有哪些等量关系？
2. 根据你所发现的等量关系，设未知数并列出方程.

问题中的等量关系为：

(1) 小红乘公共汽车的时间＋小红步行的时间＝小红上学路上的时间；

(2) 公共汽车的速度＝9×小红步行的速度.

如果设小红步行的速度为 x km/h，那么公共汽车的速度为 $9x$ km/h，根据等量关系(1)，可得到方程

$$\frac{38-2}{9x}+\frac{2}{x}=1.$$

如果设小红步行的时间为 x h，那么她乘公共汽车的时间为$(1-x)$h，根据等量关系(2)，可得到方程

$$\frac{38-2}{1-x}=9\times\frac{2}{x}.$$

大家谈谈

上面得到的方程与我们已学过的方程有什么不同？这两个方程有哪些共同特点？

像$\frac{38-2}{1-x}=9\times\frac{2}{x}$ 和 $\frac{38-2}{9x}+\frac{2}{x}=1$ 这样，分母中含有未知数的方程叫做**分式方程**(fractional equation)．使得分式方程等号两端相等的未知数的值叫做分式方程的解(也叫做分式方程的根)．

例 1 解方程：

(1) $\frac{38-2}{1-x}=9\times\frac{2}{x}$；　　　　(2) $\frac{38-2}{9x}+\frac{2}{x}=1$.

解：(1) 方程两边同乘 $x(1-x)$，得

$$36x=18(1-x).$$

解这个整式方程，得

$$x=\frac{1}{3}.$$

经检验，$x=\frac{1}{3}$是原分式方程的解.

(2) 方程两边同乘 $9x$，得

$$36+18=9x.$$

解这个整式方程，得

$$x=6.$$

经检验，$x=6$ 是原分式方程的解.

观察与思考

下面是小华解分式方程 $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-3}{1-x}+1$ 的过程：

方程两边同乘 $x-1$，得

$$x+1=-(x-3)+(x-1).$$

解这个整式方程，得

$$x=1.$$

你认为 $x=1$ 是方程$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-3}{1-x}+1$ 的解吗？为什么？

分式方程可能无解.

事实上，因为当 $x=1$ 时，$x-1=0$，即这个分式方程的分母为 0，方程

中的分式无意义，所以 $x=1$ 不是这个分式方程的解(根).

在解分式方程时，首先是通过去分母将分式方程转化为整式方程，并解这个整式方程，然后要将整式方程的根代入分式方程(或公分母)中检验. 当分母的值不等于 0 时，这个整式方程的根就是分式方程的根；当分母的值为 0 时，分式方程无解，我们把这样的根叫做分式方程的**增根**.

例 2 解方程：$\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2-x}{2+x}=3$.

解：方程两边同乘 $x+2$，得

$$2-(2-x)=3(x+2).$$

解这个整式方程，得

$$x=-3.$$

经检验，$x=-3$ 是原分式方程的解.

解分式方程一定要注意验根.

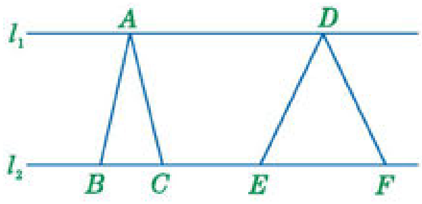
练习

1. 解下列方程：

(1) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{x-3}$；

(2) $\dfrac{x}{x-3}=2-\dfrac{3}{3-x}$.

2. 如图，已知直线 $l_1 /\!/ l_2$，点 A，D 和点 B，C，E，F 分别在直线 l_1，l_2 上，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积之比为 1∶2，边 EF 比边 BC 长 3 cm，求 BC，EF 的长.



(第 2 题)

习题

A 组

1. 解下列方程：

(1) $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x+2}$；　　(2) $\dfrac{15}{x}-\dfrac{25}{2x}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\dfrac{x-8}{x-7}-\dfrac{1}{7-x}=8$；　　(4) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x-4}=0$.

2. 某玩具厂接到一份生产 2 400 件儿童玩具的订单. 如果由一车间生产这批玩具，那么恰好按规定时间完成；如果由二车间生产这批玩具，那么在规定时间内还差 400 件没有完成. 已知一车间和二车间每天一共生产 550 件玩具. 一车间和二车间平均每天各生产多少件？

B 组

解下列方程：

(1) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x}$；　　(2) $\frac{5}{x^2+x}-\frac{1}{x^2-x}=0$.

读一读

分式方程的增根

解分式方程为什么会出现增根呢？

事实上，解分式方程产生增根，主要是在去分母时造成的. 根据等式的性质，等式的两边同乘(或除以)一个不等于 0 的数，所得的结果仍是等式. 而在解分式方程时，由于去分母是将方程左右两边同乘公分母，但此时还无法知道所乘的公分母的值是不是 0，于是，未知数的取值范围可能就扩大了. 如果去分母后得到的整式方程的根使所乘的公分母的值为 0，就产生了增根. 增根是整式方程的根，但不是原分式方程的根.

例如：解方程 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x^2-1}$.　①

解：方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$，得整式方程

$$(x-1)+2(x+1)=4. \quad ②$$

解这个整式方程，得

$$x=1.$$

检验：当 $x=1$ 时，$(x+1)(x-1)=0$.

所以 $x=1$ 是整式方程②的根，是原分式方程①的增根.

因为解分式方程时可能产生增根，所以解分式方程必须验根.

12.5 分式方程的应用

有些实际问题用列分式方程解决会更直接、更方便.

小红和小丽分别将 9 000 字和7 500字的两篇文稿录入计算机，所用时间相同. 已知两人每分钟录入计算机字数的和是 220 字. 两人每分钟各录入多少字？

一起探究

1. 请找出上述问题中的等量关系.
2. 试列出方程，并求方程的解.
3. 写出问题的答案，将结果与同学交流.

例 1 某工程队承建一所希望学校. 在施工过程中，由于改进了工作方法，工作效率提高了 20%，因此比原定工期提前 1 个月完工. 这个工程队原计划用几个月的时间建成这所希望学校？

分析：问题中的等量关系为

改进前的工作效率×(1+20%)=改进后的工作效率.

解：设工程队原计划用 x 个月的时间建成这所希望学校. 根据题意，得

$$\frac{1}{x}\cdot(1+20\%)=\frac{1}{x-1}.$$

解这个方程，得

$$x=6.$$

经检验，$x=6$ 是原分式方程的根.

答：这个工程队原计划用 6 个月的时间建成这所希望学校.

大家谈谈

请你说说用分式方程解决实际问题的一般步骤．它与用一元一次方程以及二元一次方程组解决实际问题的一般步骤有哪些异同？

练　习

在“阳光体育一小时”活动中，小明和小亮参加跳绳比赛．在某段相同时间内，小明跳了 180 下，小亮跳了 210 下．已知小明每分钟比小亮少跳 20 下，则小明和小亮每分钟各跳多少下？

习　题

A 组

1. 某项工作，甲、乙两人合做 3 天后，剩下的工作由乙单独来做，用 1 天即可完成．已知乙单独完成这项工作所需天数是甲单独完成这项工作所需天数的 2 倍．甲、乙单独完成这项工作各需多少天？
2. 某校八年级(一)班和(二)班的同学，在双休日参加修整花卉的社会实践活动．已知(一)班比(二)班每小时多修整 2 盆花，(一)班修整 66 盆花所用的时间与(二)班修整 60 盆花所用的时间相等．(一)班和(二)班的同学每小时各修整多少盆花？

B 组

1. 一艘轮船的速度是 21 km/h，顺水航行 80 km 后返回，返回时用同样的时间只航行了 60 km．求水流的速度．
2. 原计划由 52 人在一定时间内完成一项工程，但从开工之日起就采用了提高工作效率 50%的新技术，这样，改用 40 人去工作，结果还比原计划提前 6 天完成任务．采用新技术完成这项工程用了多少天？

今年父亲的年龄是儿子年龄的 3 倍，5 年后父亲的年龄与儿子的年龄的比是 22∶9．求父亲和儿子今年的年龄．

一起探究

1. 上述问题中有哪些等量关系？

2. 列出方程，求出方程的解，并写出问题的答案.

例 2 某服装店销售一种服装. 若按原价销售，则每月销售额为 10 000 元；若按八五折销售，则每月多卖出 20 件，且月销售额还增加 1 900 元. 每件服装的原价为多少元？

分析：本题中的主要等量关系为

按八五折销售这种服装的数量－按原价销售这种服装的数量＝20 件.

解：设每件服装原价为 x 元. 根据题意，得

$$\frac{10\,000+1\,900}{85\%x}-\frac{10\,000}{x}=20.$$

解这个方程，得

$$x=200.$$

经检验，$x=200$ 是原方程的解.

答：每件服装的原价为 200 元.

练　习

1. 相邻的两个偶数的比是 24∶25，求这两个偶数之间的奇数.

2. 某校学生到离校 15 km 的科技馆去参观. 在男同学骑自行车出发 $\frac{2}{3}$ h后，女同学才乘汽车前往，结果同时到达. 如果汽车速度是自行车速度的 3 倍，那么自行车和汽车的速度各是多少？

习　题

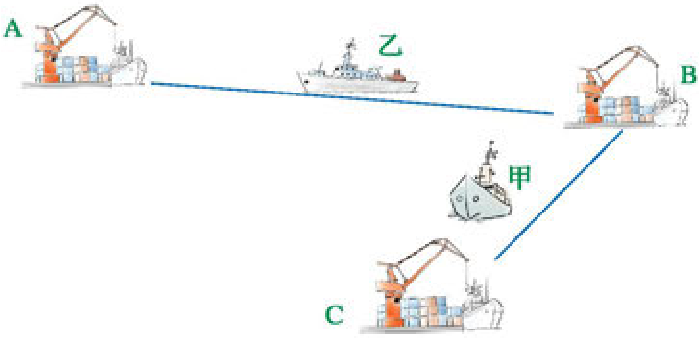
A　组

1. 某超市的一种瓶装饮料每箱售价为 36 元，五一期间对这种瓶装饮料进行促销，买一箱送两瓶，这相当于每瓶按原价的九折销售. 这家超市销售这种饮料的原价是每瓶多少元？

2. 某希望学校收到赞助单位的新年礼物共65件，计划每班分得数量相同的若干件，结果还差3件. 改为每班少分1件，结果剩余14件. 这所希望学校有多少个教学班？

B 组

1. 如图，A，B两海港相距540 km，甲、乙两船同时从B港驶出. 乙船直接驶向A港. 甲船先驶向C海港，3 h后到达C港，立即返回B港，驶达B港后，又立即驶向A港，最后与乙船同时到达A港. 已知甲船速度是乙船速度的$\frac{6}{5}$倍，求甲、乙两船的速度.（水流速度不计）



（第1题）

2. 某超市为了促销，将本来售完后可得1 800元的奶糖和900元的水果糖混合后配成杂拌糖出售. 这种杂拌糖每千克比奶糖便宜4元，比水果糖贵6元. 已知这两种糖混合前后的质量相同，求杂拌糖的单价.

数学活动

胡萝卜汁与苹果汁的多少

有两个杯子，分别盛了体积相等的胡萝卜汁和苹果汁.

(1) 从盛胡萝卜汁的杯子中取出一勺胡萝卜汁，倒入盛苹果汁的杯子中，并搅拌均匀. 这时，盛苹果汁的杯子中既含胡萝卜汁也含苹果汁.

(2) 再从原盛苹果汁的杯子中取出一勺混合的胡萝卜汁和苹果汁，倒入盛胡萝卜汁的杯子中. 这时，盛胡萝卜汁的杯子中也成为混合的胡萝卜汁和苹果汁.

胡萝卜汁　　苹果汁

经过这样两次调剂后，原盛胡萝卜汁杯子中的苹果汁与原盛苹果汁杯子中的胡萝卜汁比较，两者是否一样多？如果不一样多，哪个多，多多少？

活动一：

假设第一次调剂过程是，将盛胡萝卜汁杯子中的胡萝卜汁全部倒入盛苹果汁的杯子中，并搅拌均匀；第二次调剂过程是，将原盛苹果汁杯子中混合的胡萝卜汁和苹果汁的一半倒入原盛胡萝卜汁的杯子中.

在这种情况下，原盛胡萝卜汁杯子中的苹果汁与原盛苹果汁杯子中的胡萝卜汁比较，两者是否一样多？如果一样多，是多少？如果不一样多，哪个多，多多少？

活动二：

设盛胡萝卜汁杯子中的胡萝卜汁和盛苹果汁杯子中的苹果汁的体积都是 a mL，一勺胡萝卜汁和苹果汁以及胡萝卜汁与苹果汁混合物的体积都是 b mL $(b<a)$.

(1) 请猜想原盛胡萝卜汁杯子中的苹果汁与原盛苹果汁杯子中的胡萝卜汁之间的数量关系.

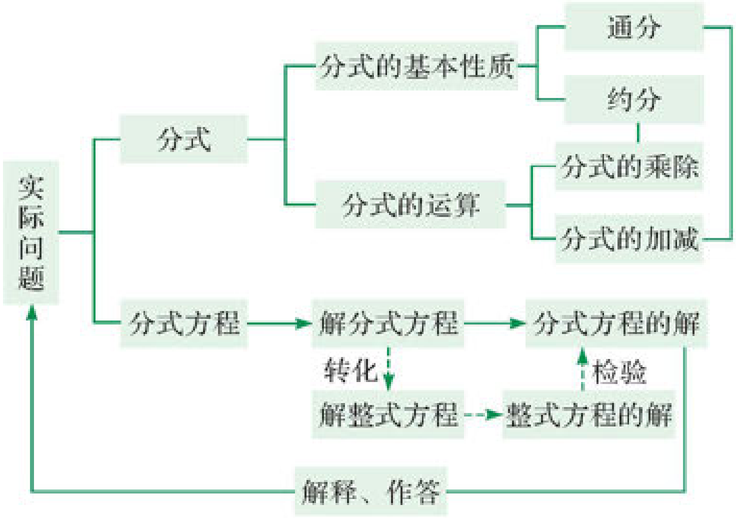
(2) 把混合前后的数量关系填写在下面的表格中：

	混合前的体积/mL		第一次混合后的体积/mL		第二次混合后的体积/mL	
	苹果汁	胡萝卜汁	苹果汁	胡萝卜汁	苹果汁	胡萝卜汁
盛胡萝卜汁的杯子						
盛苹果汁的杯子						

(3) 你的猜想正确吗？

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

在本章中，我们主要学习了分式的概念、分式的基本性质及分式的运算（加、减、乘、除）和分式方程.

类比和转化是重要的数学思想. 通过与分数类比，我们得到了分式的概念、基本性质及运算法则等. 分式的运算都是通过转化的方法来进行的，异分母分式的加减运算是转化为同分母分式的加减运算，解分式方程是转化为解整式方程.

1. 分式的基本性质.

分式的基本性质是分式运算和变形的重要依据，如分式的通分、约分等都是利用分式的基本性质进行恒等变形的. 分式的基本性质可以用式子表示为________________.

2. 分式的运算.

分式的加、减、乘、除运算法则可以用式子表示为____.

分式约分的一般步骤是____.

分式通分的一般步骤是____.

在进行分式的加、减、乘、除混合运算时，运算顺序是____.

3. 分式方程.

分式方程也是一种重要的数学模型. 列分式方程解决实际问题和列一元一次方程、列二元一次方程组解决实际问题的思考和处理过程是类似的，只是多了对分式方程根的检验. 这里的检验应包括两层含义：第一，是不是分式方程的增根；第二，是否符合实际问题的意义.

解分式方程的基本思路是将分式方程转化为整式方程. 解分式方程的一般步骤是____.

三、注意事项

1. 因为 0 不能做除数，所以只有当分式的分母不为 0 时，分式才有意义. 当分子的值为 0 而分母的值不为 0 时，分式的值才等于 0.

2. 几个分式通分时，一般选取最简公分母.

3. 分式运算的结果要化为最简分式或整式.

复习题

A 组

1. 当 x 为何值时，下列分式有意义？

(1) $\dfrac{1}{2x+5}$；　(2) $\dfrac{2x+1}{x-1}$；　(3) $\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{c^2}{ab}\cdot\dfrac{a^2}{bc}$；　(2) $\dfrac{3a^2b^2}{2c}\cdot\dfrac{10c^2}{a^3b^3}$；

(3) $\dfrac{1}{x^2-1}\div\dfrac{x-1}{x+1}$；　(4) $\dfrac{xy-y^2}{x}\div(x-y)$；

(5) $\dfrac{a^2+2a+1}{a^2-9}\cdot\dfrac{a^2+3a}{a+1}$；　(6) $\dfrac{a^2-8a+16}{a^2+4a+4}\div\dfrac{a^2-4a}{a+2}$.

3. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{3x}{2a}+\dfrac{4x}{2a}-\dfrac{x+2}{2a}$；　(2) $\dfrac{x^2}{x-y}+\dfrac{y^2}{x-y}-\dfrac{2xy}{x-y}$；

(3) $\dfrac{x+y}{(x-y)(y-z)}-\dfrac{x+z}{(x-y)(y-z)}$；　(4) $\dfrac{a-b}{ab}+\dfrac{b-c}{bc}+\dfrac{c-a}{ca}$；

(5) $a-\dfrac{4}{2-a}+2$；　(6) $\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\cdot\dfrac{x}{x-4}$.

4. 求下列分式的值：

(1) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$. 其中，$x=5$，$y=-10$.

(2) $\frac{x}{1-x}+\frac{x}{1+x}$. 其中，$x=-3$.

5. 解下列方程：

(1) $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-1}$；　　(2) $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2-x}=0$；

(3) $\frac{2}{x+3}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2(x+3)}$；　　(4) $\frac{2x}{2x-1}+\frac{x}{x-2}=2$.

6. 杏花村有沙漠 30 km^2，原计划每年治理 a km^2. 为了尽快改善生态环境，杏花村加大了治理力度，每年比原计划多治理 2 km^2. 照此计算，杏花村实际可比原计划提前几年使全部沙漠得到治理？

7. 一条小船顺流航行 50 km 后，又立即返回原地. 如果船在静水中的速度为 a km/h，水流的速度为 8 km/h，那么顺流航行比逆流航行少用多少小时？

8. 有一个分数，分母比分子的 4 倍少 1，把分子加上 1 后，所得分数的值为$\frac{2}{3}$. 求这个分数.

9. A，B 两地之间的路程是 25 km，甲、乙二人都从 A 地到 B 地，甲骑自行车，乙骑摩托车. 乙比甲晚出发 1 h，却和甲同时到达. 已知乙的速度是甲的速度的 2.5 倍. 甲、乙二人的速度各是多少？

10. 某工厂两个班组加工同一种零件，甲组的工作效率比乙组高 20%，因此，甲组加工 210 个零件所用的时间比乙组加工 200 个零件所用的时间少半小时. 甲、乙两组每小时各加工多少个零件？

B 组

1. 已知 $a^2-2ab+b^2+|a-2b+3|=0$，求$\frac{ab+a}{b^2-1}$的值.

2. 计算下列各式：

(1) $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$；

(2) $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+9)(a+10)}$.

3. 某边防哨卡运来一筐苹果，共有 60 个. 计划每名战士分得数量相同的若干个苹果，结果还剩 5 个苹果；改为每名战士再多分 1 个，结果还差 6 个苹果. 这个哨卡共有多少名战士？

4. 一艘轮船从 A 港口向 B 港口行驶，以在本航线航行时的常规速度走完全程的$\frac{3}{5}$，此后航速减小了 10 海里/时，并以此速度一直行驶到 B 港口. 这样，本次航行减速后行驶所用的时间和减速前行驶所用的时间相同. 这艘轮船在本航线上的常规速度是多少？

5. 某商场用 8 万元购进一批新款衬衫，上架后很快销售一空. 商场又紧急购进第二批这种衬衫，数量是第一批的 2 倍，但进价涨了 4 元/件，结果共用去 17.6 万元. 商场销售这种衬衫时，每件定价都是 58 元. 剩至 150 件时按八折出售，全部售完. 售完这两批衬衫，商场共盈利多少元？

C 组

1. 已知$\frac{x}{y}=2$，求$\frac{2x(x+y)-y(x+y)}{4x^2-4xy+y^2}$的值.

2. 建筑学要求，家用住宅房间窗户的面积 m 必须小于房间地面面积 n. 但窗户的面积与地面面积的比值越大，采光条件越好. 小明提出把房间的窗户和地面都增加相同的面积 a，以改善采光条件. 他这样做能达到目的吗？

3. 一小船由 A 港顺流而下到 B 港需 6 h，由 B 港逆流而上到 A 港需 8 h. 某天早晨 6 点，该船由 A 港出发驶向 B 港，到达 B 港时，发现船上一救生圈在途中掉入水中，于是立刻返回，1 h 后遇到救生圈.

(1) 该船按水流速度由 A 港漂流到 B 港需要多少小时？

(2) 救生圈是何时掉入水中的？

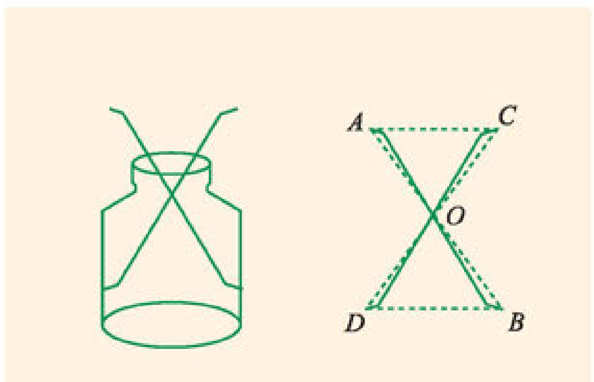
第十三章

全等三角形

在本章中，我们将学习

- 命题与证明
- 全等三角形的判定
- 三角形的尺规作图

下图是测量容器内径的示意图．其中$AB=CD$，AB，CD的中点O被固定在一起，AB，CD可以绕点O张合．只要量出AC的长，就可以知道玻璃瓶的内径是多少．你知道这是为什么吗？



13.1 命题与证明

命题，有真命题，也有假命题．要说明一个命题是假命题，只要举出反例即可；要说明一个命题是真命题，则需要进行推理论证，即证明．

观察与思考

对于平行线，我们知道：

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行．

条件　　结论

两条直线被第三条直线所截，如果这两条直线平行，那么同位角相等．

条件　　结论

（1）在这两个命题中，其中一个命题的条件和结论，与另一个命题的条件和结论有怎样的关系？

（2）请再举例说明两个具有这种关系的命题．

像这样，一个命题的条件和结论分别为另一个命题的结论和条件的两个命题，称为互逆命题．

在两个互逆的命题中，如果我们将其中一个命题称为原命题，那么另一个命题就是这个原命题的**逆命题**（converse proposition）．

做一做

请写出下列命题的逆命题，并指出原命题和逆命题的真假性：

（1）两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行．

（2）如果两个角是对顶角，那么这两个角相等．

（3）如果一个数能被 3 整除，那么这个数也能被 6 整除．

（4）已知两数 a，b．如果 $a+b>0$，那么 $a-b>0$．

命题，有真命题，也有假命题. 要说明一个命题是假命题，只要举出反例即可. 要说明一个命题是真命题，则要从命题的条件出发，根据已学过的基本事实、定义、性质和定理等，进行有理有据的推理. 这种推理的过程叫做**证明**(proof).

图 13-1-1

例 证明：平行于同一条直线的两条直线平行.

已知：如图 13-1-1，直线 a，b，c，$a/\!/c$，$b/\!/c$.

求证：$a/\!/b$.

证明：如图 13-1-2，作直线 d，分别与直线 a，b，c 相交.

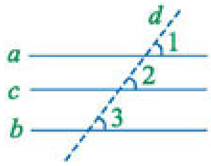


图 13-1-2

$\because$ $a/\!/c$(已知)，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$(两直线平行，同位角相等).

$\because$ $b/\!/c$(已知)，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$(两直线平行，同位角相等).

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$(等量代换).

$\therefore$ $a/\!/b$(同位角相等，两直线平行).

即平行于同一条直线的两条直线平行.

像这样用文字叙述的命题的证明，应当按下列步骤进行：

第一步，依据题意画图，将文字语言转换为符号(图形)语言.

第二步，根据图形写出已知、求证.

第三步，根据基本事实、已有定理等进行证明.

例题中的证明格式，在今后的学习中将会经常用到.

如果一个定理的逆命题是真命题，那么这个逆命题也可以称为原定理的**逆定理**(converse theorem). 一个定理和它的逆定理是互逆定理. 如“两直线平行，内错角相等”与“内错角相等，两直线平行”，“两直线平行，同旁内角互补”与“同旁内角互补，两直线平行”都是互逆定理.

做一做

已知：如图 13-1-3，点 O 在直线 AB 上，OD，OE 分别是$\angle AOC$，$\angle BOC$ 的平分线.

求证：$OD\perp OE$.

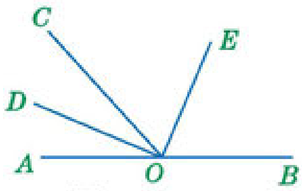


图 13-1-3

练习

1. 写出下列命题的逆命题，并判断其真假. 对于假命题，举出反例说明；对于真命题，给出证明.

(1) 如果两个角是直角，那么这两个角相等.

(2) 已知两个角. 如果一个是锐角，另一个是钝角，那么它们的和是平角.

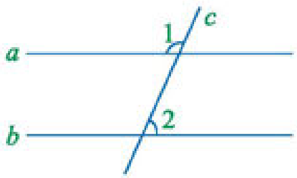
(3) 同角(或等角)的余角相等.

(4) 同角(或等角)的补角相等.

(5) 互为相反数的两个非 0 数，其和等于 0.

(6) 偶数一定能被 2 整除.

2. 已知：如图，直线 a，b 被直线 c 所截，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补. 求证：$a/\!/b$.

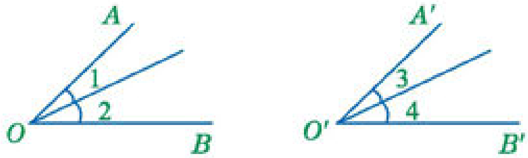


(第 2 题)

习题

1. 已知：如图，C，D 是线段 AB 上两点，C 是线段 AD 的中点，D 是线段 CB 的中点. 求证：$AD=CB$.

(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知：如图，$\angle AOB=\angle A'O'B'$，$\angle 1=\angle 3$. 求证：$\angle 2=\angle 4$.

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$\angle ADE=50^\circ$，$\angle C=70^\circ$. 求 $\angle B$ 和 $\angle DEC$ 的度数.

(第 3 题)

13.2 全等图形

图形的形状和大小是几何研究的重要内容，全等图形研究的是图形之间形状和大小的相互关系.

观察与思考

如图 13-2-1，观察给出的五组图形.

(1) 在每组中，两个图形的形状和大小各有怎样的关系？

(2) 先在半透明纸上画出同样大小的图形，再将每组中的一个图形叠放在另一个图形上，观察它们是否能够完全重合.

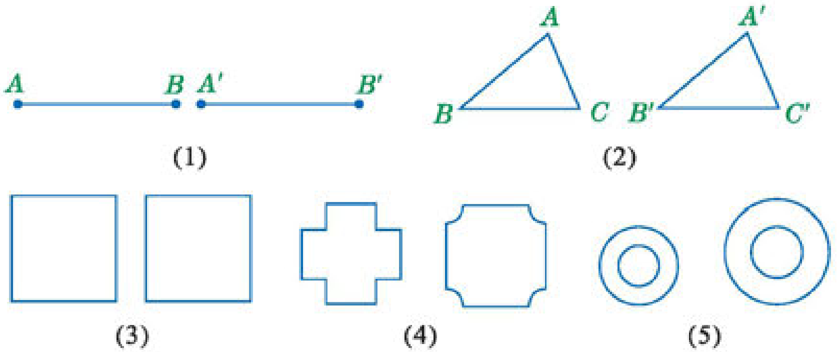


图 13-2-1

在上面五组图形中，(1)组、(2)组和(3)组中的两个图形能够完全重合；(4)组和(5)组中的两个图形不能完全重合. 我们把能够完全重合的两个图形叫做**全等图形**(congruent figures).

当两个全等的图形重合时，互相重合的点叫做**对应点**，互相重合的边叫做**对应边**，互相重合的角叫做**对应角**. 如图 13-2-1(2)，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是两个全等三角形，点 A 与点 A'，点 B 与点 B'，点 C 与点 C' 分别是对应点；边 AB 与边 $A'B'$，边 AC 与边 $A'C'$，边 BC 与边 $B'C'$ 分别是对应边；$\angle A$ 与 $\angle A'$，$\angle B$ 与 $\angle B'$，$\angle C$ 与 $\angle C'$ 分别是对应角.

> 表示两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

就像两个数相等用符号“=”来表示一样，我们用符号“≌”来表示两个图形的全等. 如图 13-2-1(2)，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是两个全等三

角形，记作“$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$”，读作“三角形 ABC 全等于三角形 $A'B'C'$”.

大家谈谈

1. 两条能够完全重合的线段有什么关系？

2. 两个能够完全重合的角有什么关系？

3. 两个全等三角形的对应边之间有什么关系，对应角之间又有什么关系？

全等三角形的对应边相等，对应角相等.

例 已知：如图 13－2－2，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\angle A=78°$，$\angle B=35°$，$BC=18$.

（1）写出 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的对应边和对应角.

（2）求$\angle F$ 的度数和边 EF 的长.

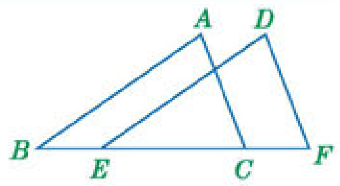


图 13－2－2

解：（1）边 AB 和边 DE，边 BC 和边 EF，边 AC 和边 DF 分别是对应边；$\angle A$ 和$\angle D$，$\angle B$ 和$\angle DEF$，$\angle ACB$ 和$\angle F$ 分别是对应角.

（2）在$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$（三角形内角和定理），

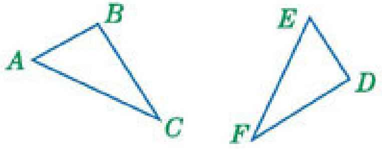
$\therefore$ $\angle ACB=180°-\angle A-\angle B=180°-78°-35°=67°$.

$\because$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，

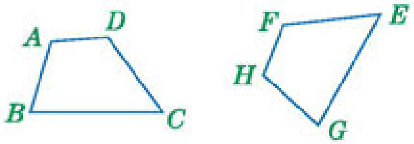
$\therefore$ $\angle F=\angle ACB=67°$，$EF=BC=18$.

练　习

1. 写出下列每组全等图形中的对应边和对应角.



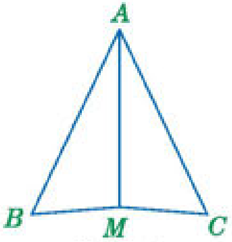
(1)



(2)

（第 1 题）

2. 如图，$\triangle AMB \cong \triangle AMC$，请写出图中的相等线段.

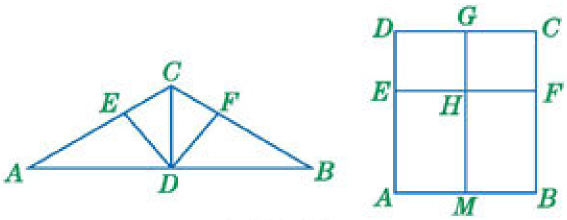


（第 2 题）

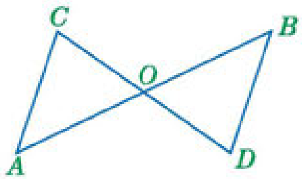
习 题

A 组

1. 观察房屋脊架和窗户的示意图，请分别指出图中的三对全等图形.



（第 1 题）



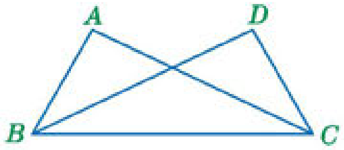
（第 2 题）

2. 如图，$\triangle AOC \cong \triangle BOD$，写出它们的对应边和对应角.

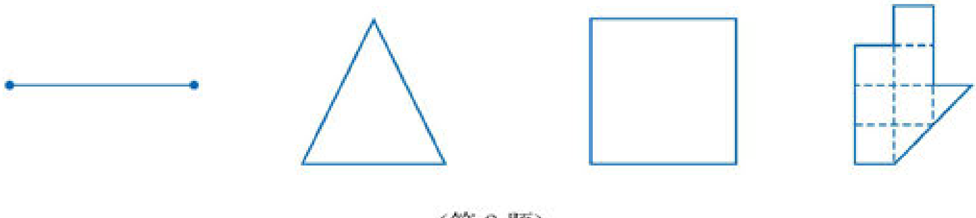
B 组

1. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DCB$，请说明 $\angle ACD$ 和 $\angle DBA$ 相等的理由.

2. 把如图所示的各个图形分别分割成两个全等的图形.



（第 1 题）



（第 2 题）

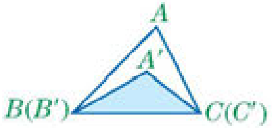
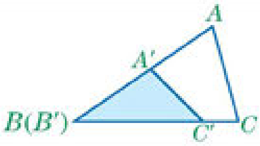
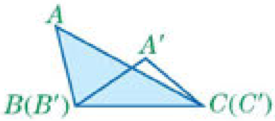
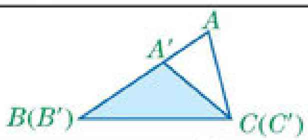
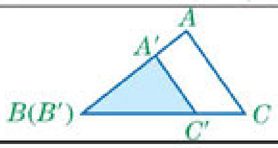
13.3 全等三角形的判定

在全等图形中，全等三角形是最基本、应用最广泛的一类图形，那么，判定两个三角形全等的条件是什么呢？

我们知道，三条边对应相等、三个角对应相等的两个三角形全等，但我们希望能用较少的条件来判定两个三角形全等，这样的条件应当是怎样的呢？

观察与思考

1. 根据下面表中给出的$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$边和角的相等条件及对应的图形，判断$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是否全等，并把结果写在表中.

边和角的相等条件	对应的图形	是否全等
$BC=B'C'$		
$\angle B=\angle B'$		
$AB=A'B'$ $BC=B'C'$		
$BC=B'C'$ $\angle B=\angle B'$		
$\angle A=\angle B'A'C'$ $\angle B=\angle B'$		

2. 有三个角对应相等的两个三角形一定全等吗？说说你的理由.

3. 小亮认为，判断两个三角形全等的较少条件，只有以下三种情况才有可能：三条边对应相等，或两条边和一个角分别对应相等，或两个角和一

条边分别对应相等．你认为这种说法对吗？

一起探究

准备一些长都是 13 cm 的细铁丝．

（1）和同学一起，每人用一根铁丝，折成一个边长分别是 3 cm，4 cm，6 cm 的三角形．把你做出的三角形和同学做出的三角形进行比较，它们能重合吗？

（2）和同学一起，每人用一根铁丝，余下 1 cm，用其余部分折成边长分别是 3 cm，4 cm，5 cm 的三角形．再和同学做出的三角形进行比较，它们能重合吗？

（3）每人用一根铁丝，任取一组能够构成三角形的三边长的数据，和同桌分别按这些数据折三角形，折成的两个三角形能重合吗？

基本事实一 如果两个三角形的三边对应相等，那么这两个三角形全等．

基本事实一可简记为“边边边”或“SSS”．

用三根木条钉成一个三角形框架(图 13－3－1)，不论怎样拉动，三角形的形状和大小都不改变，即只要三角形的三边确定，它的形状和大小就完全确定了．三角形所具有的这一性质叫做三角形的稳定性．

用四根木条钉成的四边形框架(图 13－3－2)，在拉动时，它的形状会改变，所以四边形具有不稳定性．

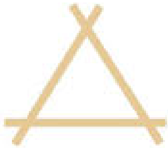


图 13－3－1

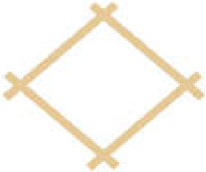


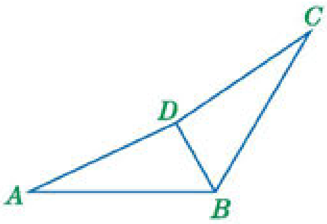
图 13－3－2

做一做

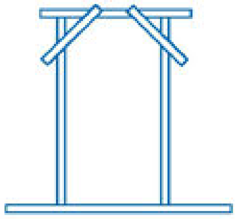
回顾“作一个角等于已知角”的方法，并说说作法的依据．

练习

1. 已知：如图，$AB=CB$，$AD=CD$. 求证：$\triangle ABD\cong\triangle CBD$.



（第 1 题）



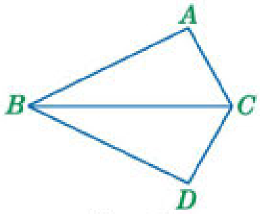
（第 2 题）

2. 如图，工人师傅在安装木制门框时，为了防止门框变形，常常先在门框上钉上两个斜拉的木条. 请说明这样做的道理.

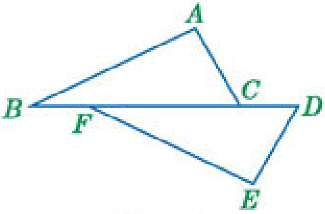
习题

A 组

1. 已知：如图，$AB=DB$，$AC=DC$. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle DBC$.



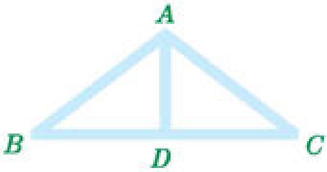
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB=EF$，$AC=ED$，$BF=CD$. 求证：$\angle A=\angle E$.

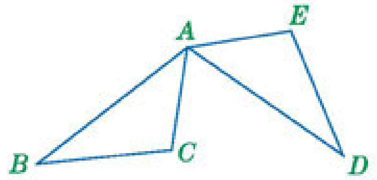
3. 观察房梁支架的示意图，如果 $AB=AC$，$BD=CD$，那么 $\angle B$ 和 $\angle C$ 相等吗？如果不相等，请说明理由；如果相等，请证明.



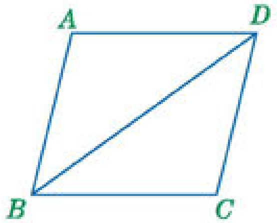
（第 3 题）

B 组

1. 已知：如图，$AB=AD$，$AC=AE$，$BC=DE$. 求证：$\angle BAD=\angle CAE$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB=CD$，$AD=CB$. 求证：$AB/\!/CD$.

两条边和一个角分别对应相等的两个三角形是不是全等的呢？

观察与思考

画一个三角形，使它的两条边长分别是 1.5 cm，2.5 cm，并且使长为 1.5 cm 的这条边所对的角是 30°.

小明的画图过程如图 13－3－3 所示：

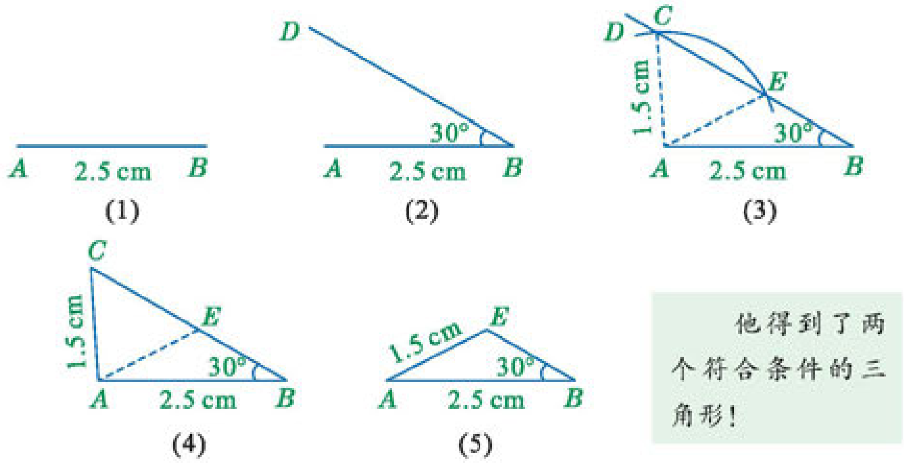


图 13－3－3

小明根据所给的条件，画出了两个形状不同的三角形，这说明两个三角形的两条边和其中一边的对角对应相等时，这两个三角形不一定全等.

两边和它们的夹角对应相等，这两个三角形又将是怎样的呢？

一起探究

已知：如图 13－3－4，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$.

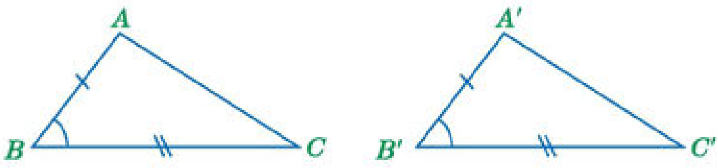


图 13-3-4

(1) 将$\triangle ABC$叠放在$\triangle A'B'C'$上，使顶点B与顶点B'重合，边BC落在边$B'C'$上，点A与点A'在边$B'C'$的同侧. 点C与点C'是否重合，边BC与边$B'C'$是否重合？边BA是否落在边$B'A'$上，点A与点A'是否重合？

(2) 由“两点确定一条直线”，能不能得到边AC与边$A'C'$重合，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等？

基本事实二 **如果两个三角形的两边和它们的夹角对应相等，那么这两个三角形全等.**

基本事实二可简记为“边角边”或“SAS”.

大家谈谈

图 13-3-5 是一种测量工具的示意图. 其中，$AB=CD$，AB，CD的中点O被固定在一起，AB，CD可以绕点O张合.

在图 13-3-6 中，要想知道玻璃瓶的内径是多少，只要量出AC的长就可以了. 你知道这是为什么吗？把你的想法和同学进行交流.

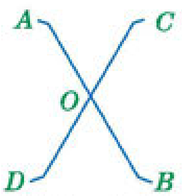


图 13-3-5

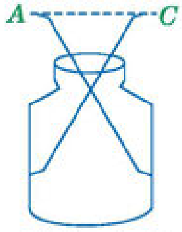


图 13-3-6

例 1 已知：如图 13-3-7，$AD\parallel BC$，$AD=CB$.

求证：$\triangle ADC\cong\triangle CBA$.

证明：$\because$ $AD\parallel BC$(已知)，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$(两直线平行，内错角相等).

在$\triangle ADC$和$\triangle CBA$中，

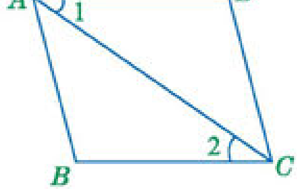


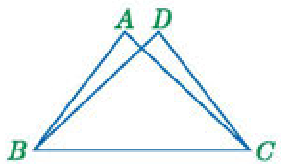
图 13-3-7

$$\because \begin{cases} AD=CB(\text{已知}), \\ \angle 1=\angle 2(\text{已推出}), \\ AC=CA(\text{公共边}), \end{cases}$$

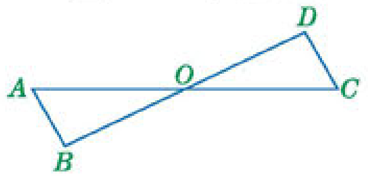
$\therefore \quad \triangle ADC \cong \triangle CBA(\text{SAS})$.

练　习

1. 已知：如图，$AC=DB$，$\angle ACB=\angle DBC$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle DCB$.



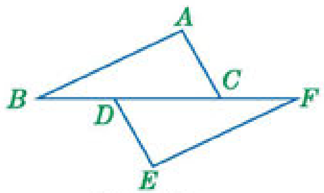
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，AC，BD 相交于点 O，且 $AO=CO$，$BO=DO$. 求证：$AB=CD$.

3. 已知：如图，$AC=ED$，$BD=FC$，$AC /\!/ DE$. 求证：$AB /\!/ FE$.



（第 3 题）

习　题

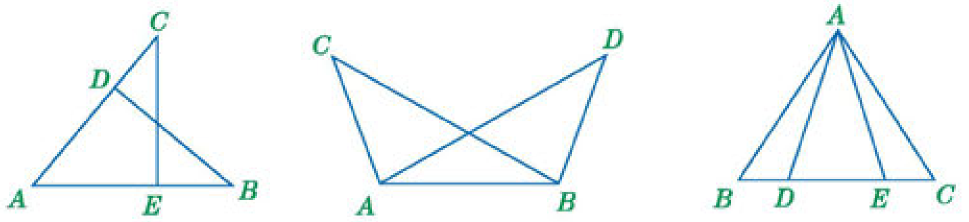
A　组

1. 判断下列各组中的两个三角形是否全等，并说明理由.

(1) 图(1)中的$\triangle AEC$与$\triangle ADB$. 已知条件是$AB=AC$，$AD=AE$.

(2) 图(2)中的$\triangle ABC$与$\triangle BAD$. 已知条件是$\angle BAC=\angle ABD$，$AC=BD$.

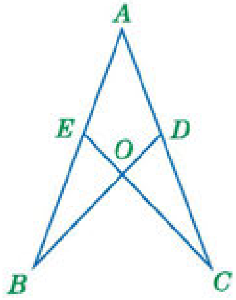
(3) 图(3)中的$\triangle AEC$与$\triangle ADB$. 已知条件是$AB=AC$，$AD=AE$，$BE=CD$.



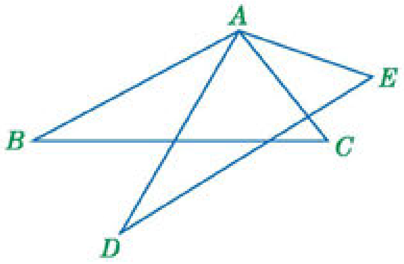
(1)　(2)　(3)

（第 1 题）

2. 已知：如图，$AB=AC$，$AD=AE$，BD 与 CE 交于点 O. 求证：$\angle B=\angle C$.



（第 2 题）

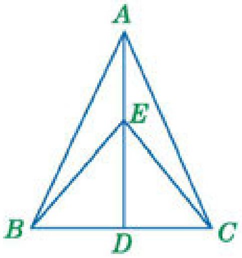


（第 3 题）

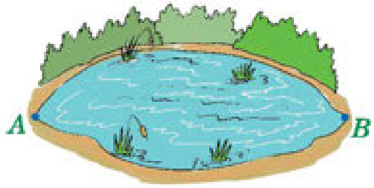
3. 已知：如图，$AB=AD$，$AE=AC$，$\angle BAD=\angle CAE$. 求证：$\angle B=\angle D$.

B 组

1. 已知：如图，$AB=AC$，$EB=EC$，AE 的延长线交 BC 于点 D. 求证：$BD=CD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，有一池塘，要测量池塘两端点 A，B 间的距离，可先在平地上取一个可以直接到达点 A 和 B 的点 C，连接 AC 并延长到点 D，使 $CD=CA$. 连接 BC 并延长到点 E，使 $CE=CB$. 连接 DE，量出 DE 的长，这个长就是点 A，B 之间的距离.

（1）按题中的要求画图.

（2）求证：$DE=AB$.

有两角和一边对应相等的两个三角形全等吗？

一起探究

如图 13－3－8，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，

$\angle C=\angle C'$. 把$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$叠放在一起，它们能够完全重合吗？提出你的猜想，并试着说明理由.

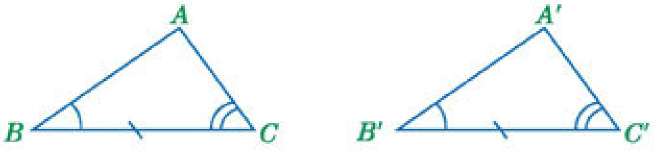


图 13-3-8

可以这样验证：将$\triangle ABC$叠放在$\triangle A'B'C'$上，使边BC落在边$B'C'$上，顶点A与顶点A'在边$B'C'$的同侧. 由$BC=B'C'$，可得边BC与边$B'C'$完全重合. 因为$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle B$的另一边BA落在边$B'A'$上，$\angle C$的另一边落在边$C'A'$上，所以$\angle B$与$\angle B'$完全重合，$\angle C$与$\angle C'$完全重合. 由于“两条直线相交只有一个交点”，所以点A与点A'重合.

所以，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等.

基本事实三　如果两个三角形的两个角和它们的夹边对应相等，那么这两个三角形全等.

基本事实三可简记为“角边角”或“ASA”.

可以证明，两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等.

已知：如图 13-3-9，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

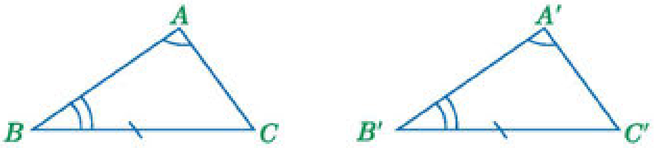


图 13-3-9

证明：$\because$ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle A'+\angle B'+\angle C'=180°$，（三角形内角和定理）

又$\because$ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，（已知）

$\therefore$ $\angle C=\angle C'$（等量代换）.

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$$\because \begin{cases} \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \\ \angle C=\angle C', \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$(ASA).

全等三角形的判定定理

> **如果两个三角形的两角及其中一个角的对边对应相等，那么这两个三角形全等.**

这个定理可简记为“角角边”或“AAS”.

例 2 已知：如图 13－3－10，$AD=BE$，$\angle A=\angle FDE$，$BC /\!/ EF$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

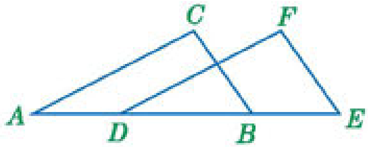


图 13－3－10

证明：$\because$ $AD=BE$(已知)，

$\therefore$ $AB=DE$(等式的性质).

$\because$ $BC /\!/ EF$(已知)，

$\therefore$ $\angle ABC=\angle E$(两直线平行，同位角相等).

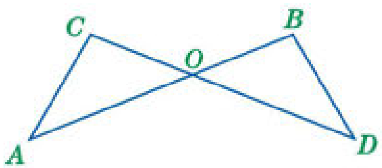
在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，

$$\because \begin{cases} \angle A=\angle FDE, \\ AB=DE, \\ \angle ABC=\angle E, \end{cases}$$

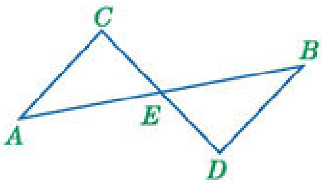
$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$(ASA).

练　习

1. 已知：如图，AB，CD 相交于点 O，$OA=OD$. 要使$\triangle OAC \cong \triangle ODB$，还需要添加一个条件，这个条件是什么?



(第 1 题)



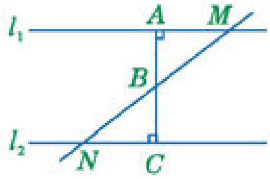
(第 2 题)

2. 已知：如图，AB，CD 相交于点 E，$EC=ED$，$\angle C=\angle D$. 求证：$\triangle AEC\cong\triangle BED$.

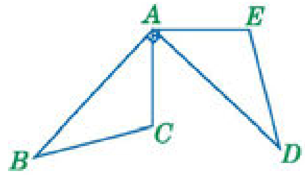
习 题

A 组

1. 下面的三个命题都是错误的，请你举例说明.
   (1) 有两个角和一条边分别相等的两个三角形全等.
   (2) 有三个角分别相等的两个三角形全等.
   (3) 有一条边和一个锐角分别相等的两个直角三角形全等.
2. 已知：如图，$l_1 /\!/ l_2$，$AC\perp l_1$，$AC\perp l_2$，垂足分别为 A，C，点 B 在 AC 上，且 $AB=BC$，过点 B 的任一直线与 l_1，l_2 分别交于点 M，N. 求证：$MB=NB$.



（第 2 题）

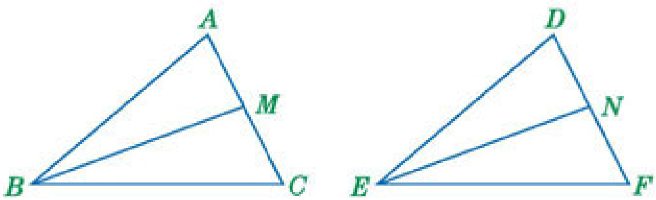


（第 3 题）

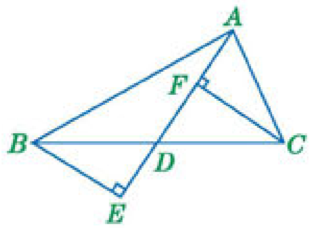
3. 已知：如图，$AB\perp AD$，$AC\perp AE$，$AB=AD$，$\angle B=\angle D$. 求证：$BC=DE$.

B 组

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中，$AB=DE$，$BC=EF$，$AC=DF$，$\angle ABM=\angle CBM$，$\angle DEN=\angle FEN$. 求证：$BM=EN$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$BE \perp AD$，$CF \perp AD$，垂足分别为 E，F，$BE=CF$. 请你判断 AD 是不是 $\triangle ABC$ 的中线. 如果是，请给出证明.

观察与思考

如图 13－3－11，每组图形中的两个三角形都是全等三角形.

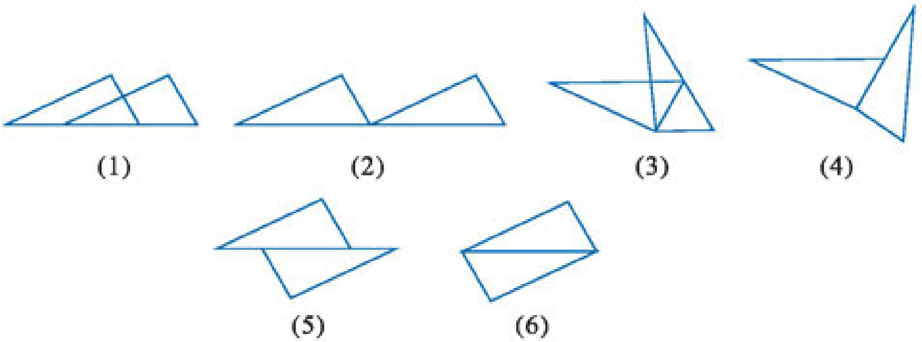


图 13－3－11

(1) 观察每组中的两个三角形，请你说出其中一个三角形经过怎样的变换(平移或旋转)后，能够与另一个三角形重合.

(2) 请你分别再画出几组具有类似位置关系的两个全等三角形.

实际上，在我们遇到的两个全等三角形中，有些图形具有特殊的位置关系，即其中一个三角形是由另一个三角形经过平移或旋转(有时是两种变换)得到的. 发现两个三角形间的这种特殊关系，能够帮助我们找到命题证明的途径，较快地解决问题.

例 3 已知：如图 13－3－12，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE /\!/ AB$，交 AC 于点 E，$DF /\!/ AC$，交 AB 于点 F.

求证：$\triangle BDF \cong \triangle DCE$.

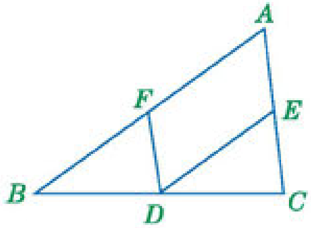


图 13－3－12

证明：$\because$ D 是 BC 的中点(已知)，

$\therefore$ $BD=DC$(线段中点定义).

$\because$ $DE /\!/ AB$，$DF /\!/ AC$，(已知)

$\therefore$ $\angle B=\angle EDC$，$\angle BDF=\angle C$，(两直线平行，同位角相等)

> 观察可知，将 $\triangle BDF$ 沿 BC 方向向右平移，可使 $\triangle BDF$ 与 $\triangle DCE$ 重合.

在$\triangle BDF$和$\triangle DCE$中，

$$\because \begin{cases} \angle B=\angle EDC, \\ BD=DC, \\ \angle BDF=\angle C, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle BDF \cong \triangle DCE$(ASA).

例 4 已知：如图 13－3－13，在$\triangle ABC$中，D，E分别是AB，AC的中点，$CF /\!/ AB$，交DE的延长线于点F.

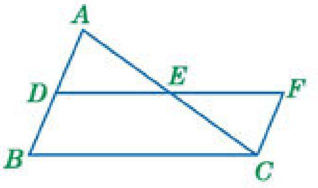


图 13－3－13

求证：$DE=FE$.

证明：$\because$ $CF /\!/ AB$(已知)，

$\therefore$ $\angle A=\angle ECF$(两直线平行，内错角相等).

在$\triangle EAD$和$\triangle ECF$中，

$$\because \begin{cases} \angle A=\angle ECF, \\ AE=CE, \\ \angle AED=\angle CEF\text{(对顶角相等)}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle EAD \cong \triangle ECF$(ASA).

$\therefore$ $DE=FE$(全等三角形的对应边相等).

观察可知，将$\triangle ECF$绕点E逆时针旋转$180°$，它可与$\triangle EAD$重合.

做一做

已知：如图 13－3－14，$AB /\!/ CD$，$AD /\!/ BC$.

求证：$AB=CD$，$AD=BC$.

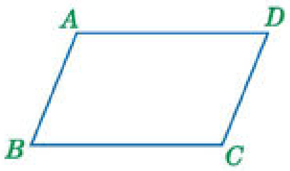
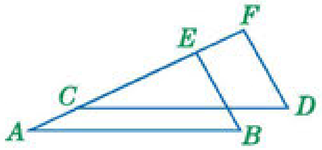


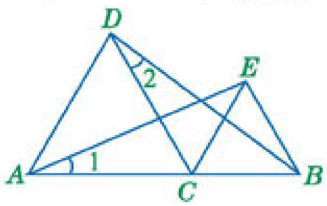
图 13－3－14

练 习

1. 已知：如图，$AC=EF$，$AB /\!/ CD$，$AB=CD$. 求证：$BE /\!/ DF$.



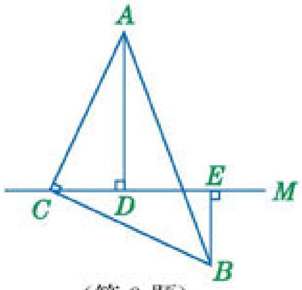
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$AC=DC$，$BC=EC$，$\angle ACD=\angle BCE$. 求证：$\angle 1=\angle 2$.

3. 已知：如图，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=BC$，$AD\perp CM$，$BE\perp CM$，垂足分别为 D，E. 求证：$CD=BE$.

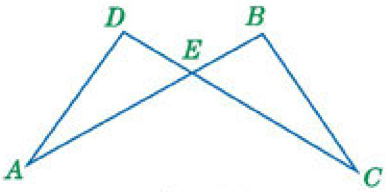


（第 3 题）

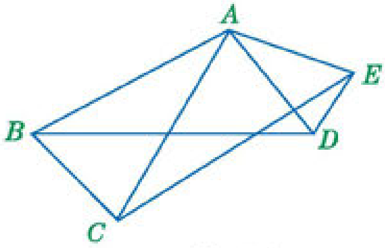
习题

A 组

1. 已知：如图，AB，CD 相交于点 E，$AD=CB$，$\angle D=\angle B$. 求证：$AB=CD$.



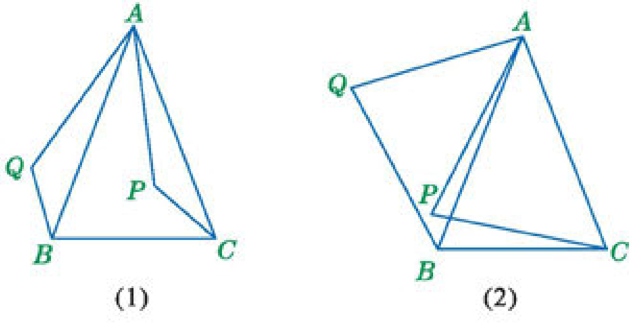
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB=AC$，$AD=AE$，$BD=CE$. 求证：$\angle BAC=\angle DAE$.

3. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，P 是任意一点，将 AP 绕点 A 顺时针旋转至 AQ，使$\angle QAP=\angle BAC$，连接 BQ，CP.



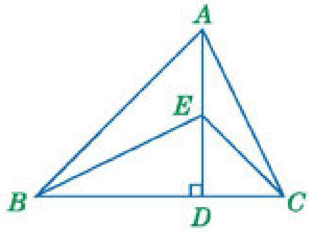
（第 3 题）

(1) 如图(1)，若点 P 在$\triangle ABC$的内部，则 BQ 与 CP 相等吗？若相等，请给出证明.

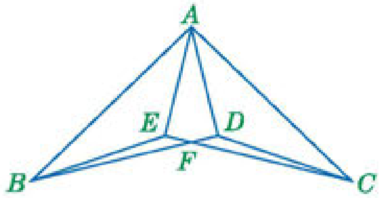
(2) 如图(2)，若点 P 在$\triangle ABC$的外部，则 BQ 与 CP 相等吗？若相等，请给出证明.

B 组

1. 已知：如图，$AD\perp BC$，垂足为 D，$AD=BD$，点 E 在 AD 上，$\angle ABD=\angle CED=45^\circ$，$\angle ABE=\angle ACE$. 请写出图中相等的线段，并进行证明.



（第 1 题）



（第 2 题）

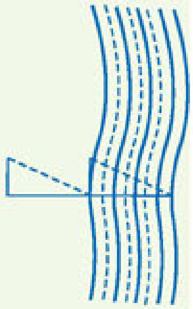
2. 已知：如图，$\triangle ABD\cong\triangle ACE$，$BD$，$CE$ 交于点 F. 请写出图中相等的线段，并进行证明.

读 一 读

拿破仑巧测河宽

1805 年，拿破仑率领的大军与反法联军分别在莱茵河的两岸隔河激战. 法军想使炮弹准确地落到对方阵地，就必须知道河有多宽，但直接测量是不可能的，怎么办呢？

拿破仑在岸边低头沉思，不时抬头观看对岸. 在某一时刻，他忽然发现自己的视线通过帽檐边沿正好看到对岸边线. 这时，拿破仑有了主意. 他保持头部姿势，一步一步向后退去，一直退到视线通过帽檐边沿正好落在己方岸边时立定. 这时，他让人把他到己方所在岸边的距离测量出来，按照这个距离射击，结果炮弹都落到了对方阵地上.



实际上，按拿破仑的方法，在己方岸边所测量的距离，就是莱茵河的宽度. 这实际上是利用了三角形全等的判定方法和性质.

随着科学技术的不断发展，这种测量方法的价值已不大了，但是要掌握先进的科学技术，就必须有坚实的基础知识和强烈的应用意识. 灵活运用基础知识解决实际问题，是提高我们创新能力的保证.

13.4 三角形的尺规作图

> 用直尺(没有刻度)和圆规作图，是一种具有特殊要求的作图方法．这种作图方法不必用具体数值，只按给定图形进行再作图．这也是它与画图的区别所在．

我们前面所画的图形大都是用刻度尺、三角尺、量角器和圆规等各种工具画出的．实际上，只用直尺(没有刻度)和圆规也可以画出一些图形，这种画图的方法被称为**尺规作图**．我们已经学过的尺规作图有：作一条线段等于已知线段，作一个角等于已知角．在这个基础上，我们就可以用尺规作三角形了．

由三角形全等的判定可以知道，每一种判定两个三角形全等的条件(SSS，SAS，ASA，AAS)，都只能作出唯一的三角形．

例 已知三边，用尺规作三角形．

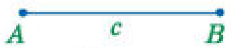
如图 13－4－1，已知线段 a，b，c．

求作：$\triangle ABC$，使 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$．

分析：由作一条线段等于已知线段，能够作出边 AB，即 A，B 两点确定．而 $BC=a$，$AC=b$，故以点 A 为圆心，b 为半径画弧，以点 B 为圆心，a 为半径画弧，两弧的交点就是点 C．

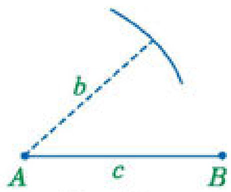
图 13－4－1

作法：



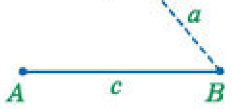
第一步

作线段 AB 等于 c．



第二步

以点 A 为圆心，b 为半径画弧．



第三步

以点 B 为圆心，a 为半径画弧，两弧交于点 C．

第四步

连接 AC，BC，$\triangle ABC$ 即为所求．

做一做

1. 已知两边及其夹角，用尺规作三角形.

如图 13－4－2，已知线段 a，b，$\angle\alpha$，求作$\triangle ABC$，使 $BC=a$，$AC=b$，$\angle ACB=\angle\alpha$.

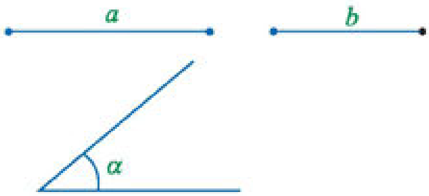


图 13－4－2

2. 已知两角及其夹边，用尺规作三角形.

如图 13－4－3，已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$，线段 a，求作$\triangle ABC$，使 $BC=a$，$\angle ABC=\angle\alpha$，$\angle ACB=\angle\beta$.

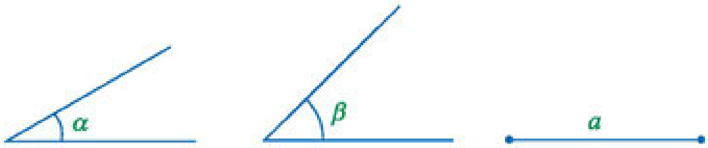


图 13－4－3

练 习

1. 已知线段 a，求作$\triangle ABC$，使 $AB=BC=AC=a$.

（第 1 题）

（第 2 题）

2. 已知线段 a 和$\angle\alpha$，求作$\triangle ABC$，使 $AB=AC=a$，$\angle A=\angle\alpha$.

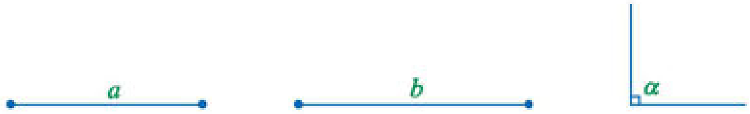
习 题

A 组

1. 已知线段 a，b，求作$\triangle ABC$，使 $AB=AC=a$，$BC=b$.

（第 1 题）

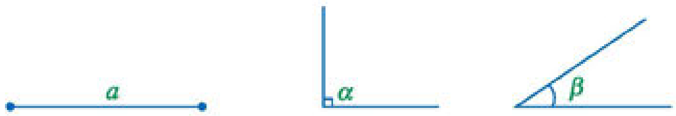
2. 已知线段 a，b 和直角 α，求作直角三角形 ABC，使 $\angle C=\angle\alpha$，$BC=a$，$AC=b$.



（第 2 题）

B 组

1. 已知线段 a，直角 α 和锐角 β，求作直角三角形 ABC，使 $\angle C=\angle\alpha$，$\angle A=\angle\beta$，$BC=a$.



（第 1 题）

2. 已知 $\triangle ABC$，求作 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 你有几种作法？

回顾与反思

一、知识结构

- 全等三角形
  - 性质
    - 全等三角形的对应边相等
    - 全等三角形的对应角相等
  - 判定
    - 三边对应相等的两个三角形全等(SSS)
    - 两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(SAS)
    - 两角及其夹边对应相等的两个三角形全等(ASA)
    - 两角及其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等(AAS)
  - 三角形的尺规作图

互逆

证明

二、总结与反思

本章的主要内容是命题与证明、全等三角形的性质及判定、三角形的尺规作图.

推理是数学的基本思维方式，也是一种基本的数学思想方法，在本章中，我们主要是进行演绎推理，即证明．证明是说明一个命题正确性的重要方法．证明的依据是已学过的定义、基本事实、法则和定理等．证明要合乎逻辑，证明过程中要做到步步有据.

1．命题、逆命题、证明.

一般地，命题是由条件和结论(有时是隐含的)两部分组成的．将一个命题的条件和结论互换，就得到这个原命题的逆命题．原命题和它的逆命题的真假没有必然的联系．若要说明一个命题是假命题，只要举反例即可；若要说明一个命题是真命题，则需要证明.

请你举出两对互逆命题，并说明其真假.

2. 全等三角形.

全等图形是能够完全重合的两个图形，而全等三角形是全等图形之一. 两个图形全等包含两方面：一是形状相同，二是大小相等. 两者缺一不可.

全等三角形的性质是________________________________.

判定两个三角形全等的条件是至少有三个元素对应相等，且其中至少有一个元素是边. 判定两个三角形全等的三个基本事实是________、________、________，三角形全等的判定定理是________.

请你想一想：为什么根据“角角角”“边边角”不能判定两个三角形全等?

3. 三角形的尺规作图.

已知三条边、两边及其夹角或两角及其夹边，都可以用尺规作三角形.

三、注意事项

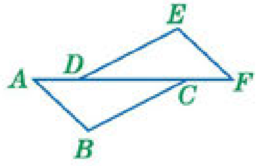
1. 用符号表示两个三角形全等时，一般要将对应顶点写在对应的位置上.

2. 证明过程中的每一步都要有根据，这些根据就是已学过的定义、基本事实、法则、定理和性质等.

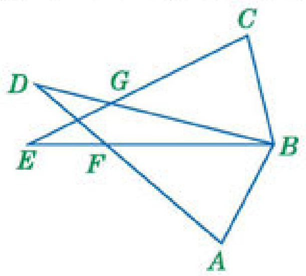
复 习 题

A 组

1. 已知：如图，$AD=CF$. 要使$\triangle ABC$与$\triangle FED$全等，应添加哪些条件?



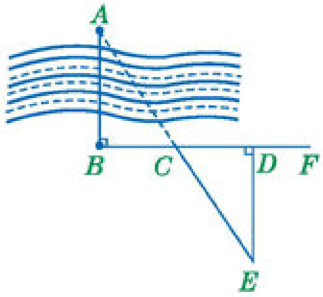
（第 1 题）



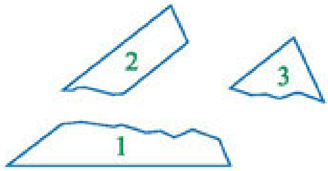
（第 2 题）

2. 已知：如图，AD与BE相交于点F，BD与CE相交于点G，$\angle D=\angle E$，$\angle A=\angle C$，$BA=BC$. 求证：$AF=CG$.

3. 小明同学想出了一种测量河宽的方法. 要测量河岸两侧A，B两点之间的距离(如图)，可以在AB的垂线BF上取两点C，D，使$CD=CB$；再画出BF的垂线DE，使A，C，E在一条直线上. 这时测得的DE的长就是AB的长. 你认为小明同学这样得到的结果正确吗? 为什么?



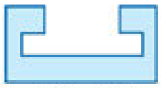
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 一个三角形工件，现已破碎成如图所示的三部分. 选用这三块中的哪一块，就能复原出这个三角形工件？说明你的理由.

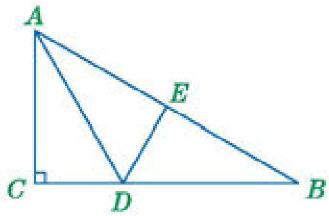
5. 某工件的内槽截面如图所示，利用你所学过的全等三角形的知识设计一种测量工具，使它能测量出工件内槽的宽度. 写出你的设计方案和根据.



（第 5 题）

B 组

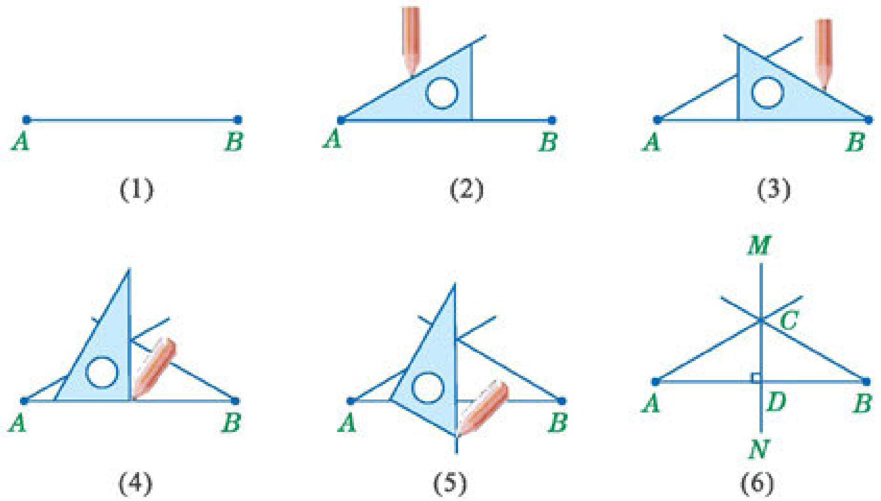
1. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle BAC=2\angle B$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$ 于点E. AE 和 BE 相等吗？如果相等，请给出证明.



（第 1 题）

2. 全等三角形对应边上的高相等吗？如果相等，请写出已知、求证，并进行证明.

3. 如图，已知线段 AB，小明用三角尺画出了如下的图形：



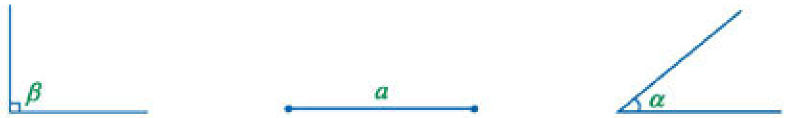
（第 3 题）

(1) 直线 MN 与线段 AB 垂直吗?

(2) AD 与 BD 相等吗?

对上面的问题能给予肯定的结论吗? 如果你认为是肯定的结论，请进行证明.

4. 如图，已知直角 β. 利用它作一个直角三角形，使该直角三角形的斜边等于已知线段 a，一个锐角等于已知角 α.



(第 4 题)

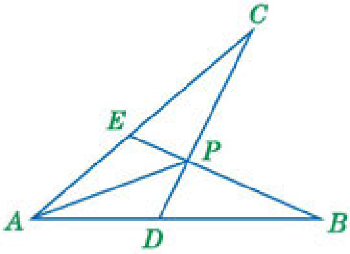
C 组

1. 已知：如图，$AB=AC$，$AD=AE$，BE 与 CD 相交于点 P.

(1) 求证：$PC=PB$.

(2) 求证：$\angle CAP=\angle BAP$.

(3) 由(2)的结论，你能设计一种画角的平分线的方法吗?



(第 1 题)

2. 先画一个三边互不相等的$\triangle ABC$，然后再作一个三角形，使所作的三角形和$\triangle ABC$ 有一个公共的顶点 C，且与$\triangle ABC$ 全等. 请以尽可能多的方法作出图形，并说明全等的理由.

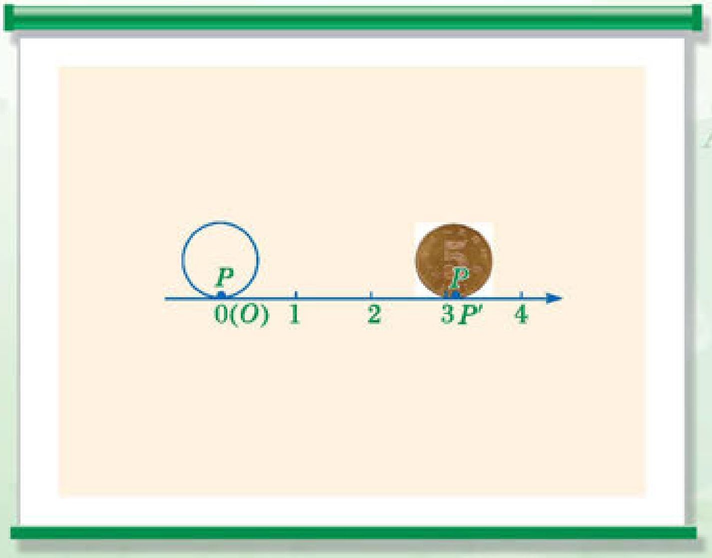
第十四章

实　数

在本章中，我们将学习

- 平方根和立方根
- 实数
- 近似数
- 用计算器求平方根和立方根

设一枚5角硬币的直径为1个单位长度. 将这枚硬币放置在平面内一条数轴上，使硬币边缘上的一点P与原点O重合. 让这枚硬币沿数轴的正方向无滑动滚动一周，这时点P转到数轴上点P'的位置. 线段OP'的长是多少？点P'表示怎样的数？



14.1 平方根

已知一个数，我们就可以求出这个数的平方．反过来，如果已知某个数的平方，又能否求出这个数呢？

小明家有一块面积为 100 m^2 的正方形花圃．花圃周围要用护栏围起来，需要护栏多少米？

要求出护栏的长，需要知道正方形花圃的边长．

求花圃的边长就是已知一个数的平方等于 100，求这个数．

做一做

1．$\frac{3}{5}$和$-\frac{3}{5}$的平方等于多少？10 和-10 的平方等于多少？

2．平方等于$\frac{9}{25}$的数有哪些？平方等于 100 的数呢？

3．满足 $x^2=25$ 的 x 的值是多少？

一般地，如果一个数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个数 x 就叫做 a 的**平方根**(square root)，也叫做 a 的二次方根．

例如，16 的平方根为 4 和-4，$\frac{9}{25}$的平方根为$\frac{3}{5}$和$-\frac{3}{5}$，100 的平方根为 10 和-10．

一起探究

1．填写下表：

x	…	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	3	…
x^2	…								…

2．观察填写后的表格，探究：

(1) 正数的平方根有几个，它们之间有什么关系？

(2) 0 有平方根吗？如果有，它是什么数？

（3）负数有平方根吗？

一个正数有两个平方根，它们互为相反数.
0 只有一个平方根，是 0 本身.
负数没有平方根.

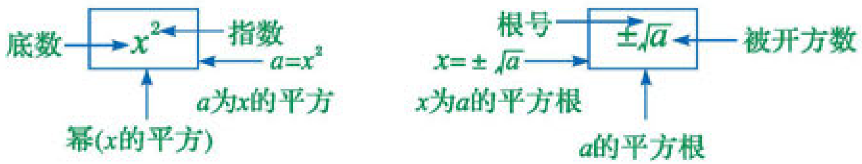
一个正数有两个平方根：一个正数，一个负数. 我们把正数 a 的正的平方根用符号"$\sqrt{a}$"表示，读作"根号 a"；把正数 a 的负的平方根用符号"$-\sqrt{a}$"表示，读作"负根号 a".

正数 a 的两个平方根记为$\pm\sqrt{a}$. 其中，a 称为被开方数.

如 4 的平方根为$\pm\sqrt{4}$，被开方数是 4；0.01 的平方根为$\pm\sqrt{0.01}$，被开方数是 0.01.

大家谈谈

观察框图，说一说求一个数的平方运算和求一个数的平方根运算具有怎样的关系.



我们把求一个数的平方根的运算，叫做**开平方**(extraction of square root).

我们可以借助平方运算来求一个正数的平方根.

> 对于正数来说，开平方与平方互为逆运算.

例 1 求下列各数的平方根：

（1）81；　　（2）$\frac{36}{121}$；　　（3）0.04.

解：（1）因为$(\pm9)^2=81$，所以 81 的平方根为±9，即

$$\pm\sqrt{81}=\pm9.$$

（2）因为$\left(\pm\frac{6}{11}\right)^2=\frac{36}{121}$，所以$\frac{36}{121}$的平方根为$\pm\frac{6}{11}$，即

$$\pm\sqrt{\frac{36}{121}}=\pm\frac{6}{11}.$$

（3）因为$(\pm0.2)^2=0.04$，所以0.04的平方根为±0.2，即

$$\pm\sqrt{0.04}=\pm0.2.$$

练习

1. 将适合下面各等式的数分别填在括号内：

$(\quad)^2=36$；　$(\quad)^2=49$；　$(\quad)^2=121$；

$(\quad)^2=0.16$；　$(\quad)^2=0.006\ 4$；　$(\quad)^2=10^8$.

2. 求下列各数的平方根：

（1）25；（2）144；（3）0.49；（4）0.81；（5）$\frac{9}{64}$；（6）$\frac{169}{121}$.

3. 回答下列问题：

（1）12是144的平方根吗？

（2）169的负的平方根是哪个数？

（3）±0.3是0.9的平方根吗？为什么？

习题

A　组

1. 填写下表：

x	5	-8	$\frac{2}{5}$			
x^2				0.09	49	196

2. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）1是1的平方根.　　（2）1的平方根是1.

（3）$(-2)^2$的平方根是-2.　　（4）-1的平方根是-1.

3. 求下列各数的平方根：

（1）225；　（2）1 600；　（3）$\frac{49}{81}$；　（4）0.36；　（5）0.014 4.

4. 一个正方形鱼池的边长是60 m，另一个正方形鱼池的面积比它大4 500 m^2，求这个较大的鱼池的边长.

B 组

1. 求下列各数的平方根：

(1) $\frac{169}{900}$；　(2) 19 600；　(3) $(-1.7)^2$；　(4) 10^{-6}.

2. 学校小会议室的面积为 18 m^2，小亮数了一下地面铺的正方形地板砖，正好是 50 块. 每块地板砖的边长是多少？

一个正数的两个平方根互为相反数. 我们把一个正数 a 的正的平方根 $\sqrt{a}$ 叫做 a 的**算术平方根**(arithmetic square root).

当求得一个正数的算术平方根后，它的负的平方根可相应求得.

例如，9 的算术平方根为 3，它的负的平方根就是 -3，即

$$\sqrt{9}=3，-\sqrt{9}=-3.$$

$\frac{25}{4}$的算术平方根为$\frac{5}{2}$，它的负的平方根就是$-\frac{5}{2}$，即

$$\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}，-\sqrt{\frac{25}{4}}=-\frac{5}{2}.$$

0 的平方根只有一个，就是 0，我们也说 0 的算术平方根为 0，即

$$\sqrt{0}=0.$$

做一做

求下列各数的算术平方根：

(1) 144；　(2) 0.01；　(3) $\frac{4}{49}$；　(4) 13^2；　(5) $(-16)^2$.

由平方根的意义，易知：当 $a>0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$.

例 2　计算下列各式：

(1) $\sqrt{1.69}$；　(2) $-\sqrt{225}$；

(3) $\pm\sqrt{\frac{9}{49}}$；　(4) $-\sqrt{(-17)^2}$.

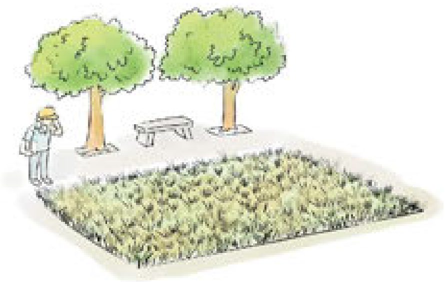
解：(1) $\sqrt{1.69}=\sqrt{1.3^2}=1.3$.

(2) $-\sqrt{225}=-\sqrt{15^2}=-15$.

(3) $\pm\sqrt{\frac{9}{49}}=\pm\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\pm\frac{3}{7}$.

(4) $-\sqrt{(-17)^2}=-\sqrt{17^2}=-17$.

例 3 某小区有一块长方形草坪．为了加强保护，小区管理人员准备用篱笆沿草坪边缘将其围起来．已知该长方形草坪的长是宽的 4 倍，草坪的面积是 900 m^2．求所需篱笆的总长度．



解：设这块长方形草坪的宽为 x m，则长为 $4x$ m.

因为长方形草坪的面积是 900 m^2，所以

$$4x\cdot x=900,$$

即

$$x^2=225.$$

所以 $x=\pm\sqrt{225}=\pm\sqrt{15^2}=\pm15$.

$x=-15$ 不合题意，舍去.

所以 $x=15$，$2\times(15+4\times15)=150$(m).

答：所需篱笆的总长度是 150 m.

练　习

1. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{256}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{144}}$；　(3) $\pm\sqrt{\frac{81}{4}}$；

(4) $-\sqrt{0.16}$；　(5) $\sqrt{2\,500}$；　(6) $-\sqrt{0.004\,9}$.

2. 求下列各数的算术平方根：

(1) $\frac{25}{121}$；(2) $0.000\,1$；(3) 900；(4) $\frac{169}{16}$；(5) 2^{-2}；(6) $(-2)^2$.

3. 求下列各式中 x 的值：

（1）$x^2=64$；　　（2）$x^2=\frac{25}{81}$；　　（3）$x^2=1.21$.

习　题

A　组

1. 求下列各数的算术平方根：

（1）256；　（2）0.16；　（3）$\frac{49}{64}$；　（4）$\left(\frac{3}{2}\right)^2$；　（5）$\left(-\frac{5}{13}\right)^2$.

2. 求下列各式中 x 的值：

（1）$x^2=49$；　　（2）$x^2-36=0$；

（3）$9x^2=25$；　　（4）$4x^2-81=0$.

3. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt{8\ 100}$；　　（2）$-\sqrt{2\frac{1}{4}}$；

（3）$\pm\sqrt{\frac{25}{196}}$；　　（4）$\sqrt{0.012\ 1}$.

4. （1）一个正数的平方等于196，求这个数.

（2）一个负数的平方等于$\frac{121}{36}$，求这个数.

（3）一个数的平方等于1.44，求这个数.

B　组

1. 一个正方体的表面积是486，求这个正方体的棱长.
2. 用一个边长为2的正方形和五个边长为1的正方形可以拼成一个大正方形吗？如果能拼成，请你画出所拼大正方形的示意图，并直接写出大正方形的边长.

14.2 立方根

利用数的平方运算可以求出一个数的平方根. 已知一个数的立方，能不能求出这个数呢?

观察与思考

如图 14-2-1，已知小正方体的棱长为 2，那么它的体积是多少? 反过来，如果大正方体的体积 $V=27$，你能不能求出它的棱长 x 呢?

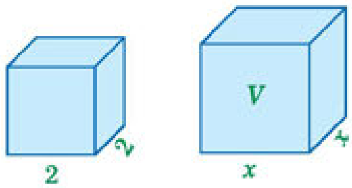


图 14-2-1

小亮是这样想的：由已知小正方体的棱长为 2，可以求出它的体积为 $2^3=8$；同样，根据正方体的体积公式以及立方运算，由大正方体的体积，也可以求出它的棱长.

他是这样做的：因为

$$3^3=27,$$

所以，这个大正方体的棱长为 3.

你认为小亮的想法和做法有没有道理? 你是怎么做的?

试着做做

求满足下列各式的 x 的值：

(1) $x^3=-1$；(2) $x^3=64$；(3) $x^3=0.008$；(4) $x^3=-\frac{1}{125}$.

一般地，如果一个数 x 的立方等于 a，即 $x^3=a$，那么这个数 x 就叫做 a 的**立方根**(cube root)，也叫做 a 的三次方根.

例如，-1 的立方根为 -1，64 的立方根为 4，0.008 的立方根为 0.2，$-\frac{1}{125}$ 的立方根为 $-\frac{1}{5}$.

大家谈谈

1. 一个正数有几个立方根？正数的立方根是正数还是负数？
2. 一个负数有几个立方根？负数的立方根是正数还是负数？
3. 0 的立方根是什么数？

> **一个正数有一个正的立方根.**
> **一个负数有一个负的立方根.**
> **0 的立方根是 0.**

我们把数 a 的立方根用符号“$\sqrt[3]{a}$”来表示，读作“三次根号 a”. 其中，a 称为被开方数，3 称为根指数.

例如，$\sqrt[3]{-1}=-1$，$\sqrt[3]{64}=4$，$\sqrt[3]{0.008}=0.2$，$\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}=-\frac{1}{5}$.

求一个数的立方根的运算，叫做**开立方**(extraction of cubic root).

开立方和立方互为逆运算. 借助立方运算，可以求一个数的立方根.

例 1 求下列各数的立方根：

(1) $\frac{8}{27}$；　　(2) -8；　　(3) -0.064.

解：(1) 因为$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，所以$\frac{8}{27}$的立方根为$\frac{2}{3}$，即

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}.$$

(2) 因为 $(-2)^3=-8$，所以-8 的立方根为-2，即

$$\sqrt[3]{-8}=-2.$$

> 负数没有平方根，但是它有立方根.

(3) 因为$(-0.4)^3=-0.064$，所以-0.064 的立方根为-0.4，即

$$\sqrt[3]{-0.064}=-0.4.$$

易见：$\sqrt[3]{a^3}=a$，$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

这样，求一个负数的立方根，可以先求这个负数的绝对值的立方根，再取它的相反数.

例 2 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{-0.027}$；　　(2) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{216}}$.

解：(1) $\sqrt[3]{-0.027}=-\sqrt[3]{0.027}=-\sqrt[3]{0.3^3}=-0.3$.

(2) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{216}}=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{216}}=-\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{6}\right)^3}=-\dfrac{1}{6}$.

练　习

1. 求下列各数的立方根：

(1) $-\dfrac{1}{8}$；　　(2) 0.008；　　(3) -125；　　(4) $\dfrac{27}{64}$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{(-3)^3}$；　(2) $-\sqrt[3]{1\ 000}$；　(3) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{1\ 000}}$；　(4) $\sqrt[3]{0.343}$.

习　题

A 组

1. 求下列各数的立方根：

(1) -216；　　(2) -0.125；　　(3) $\dfrac{8}{343}$；　　(4) $\dfrac{64}{125}$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{-729}$；　　(2) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$；　　(3) $-\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$.

3. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^3=0.343$；　　(2) $x^3=(-8)^2$；　　(3) $x^3=-512$.

B 组

1. 有两个正方体形的纸盒，第一个纸盒的棱长是 6 cm，第二个纸盒的体积比第一个纸盒的体积大 127 cm^3. 求第二个纸盒的棱长.

2. 已知一个底面为正方形的长方体，高是底面边长的 2 倍，体积为 432 cm^3. 求这个长方体的表面积.

14.3 实　数

我们已经学习了有理数，但是，随着实际的需要和数学自身的发展，数的范围还需要扩充.

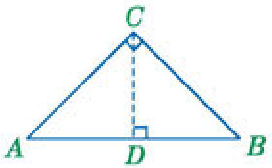
学习了平方根以后，小亮想到了一个问题：2 的平方根是怎样的数呢？

一起探究

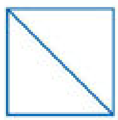
如图 14－3－1(1)所示，在半透明纸上画一个两条直角边都是 2 cm 的直角三角形 ABC，然后剪下这个三角形，再沿斜边上的高 CD 剪开后，拼成如图 14－3－1(2)所示的正方形.

(1) 这个三角形的面积和拼成的正方形的面积是不是相等？面积是多少？

(2) 如果设正方形的边长为 x cm，那么 x 与这个正方形的面积有怎样的关系？



(1)



(2)

图 14－3－1

事实上，因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2=2(\mathrm{cm}^2)$，所以 $S_{正方形}=2\ \mathrm{cm}^2$. 如果设正方形的边长为 x cm，那么 $x^2=2$. 因为正方形的边长是正数，所以 x 是 2 的算术平方根，即

$$x=\sqrt{2}.$$

$\sqrt{2}$是一个什么样的数呢？

大家谈谈

1. $\sqrt{2}$是整数吗？-3，-2，-1，0，1，2，3 的平方等于 2 吗？你认

为有平方后等于 2 的整数吗？

2. $\sqrt{2}$是分数吗？$-\frac{5}{3}$，$-\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{3}$的平方等于 2 吗？你认为有平方后等于 2 的分数吗？

3. $\sqrt{2}$会是有理数吗？

事实上，$\sqrt{2}$不是有理数.

借助计算机可以得到

$$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698\ 078\ 569\cdots.$$

它是一个无限不循环小数.

我们早就认识的圆周率 π，它也是一个无限不循环小数：

$$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 1\cdots.$$

观察与思考

有理数包括整数和分数两部分.

（1）整数可以写成小数的形式，如

$$-10=-10.0，-1=-1.0，0=0.0，50=50.0.$$

对于任意给定的一个整数，你能将它写成小数的形式吗？

（2）分数可以写成有限小数或无限循环小数，如

$$-\frac{1}{100}=-0.01，-\frac{3}{5}=-0.6，\frac{7}{2}=3.5，\frac{3}{16}=0.187\ 5，$$

$$-\frac{1}{3}=-0.333\ 33\cdots=-0.\dot{3}，\frac{2}{3}=0.666\ 66\cdots=0.\dot{6}，$$

$$\frac{7}{22}=0.318\ 18\cdots=0.3\dot{1}\dot{8}.$$

任意给定一个分数，你能将它写成有限小数或无限循环小数的形式吗？（可以借助计算器计算）

（3）有理数是不是总可以写成有限小数或无限循环小数的形式呢？

事实上，有理数总可以写成有限小数或无限循环小数的形式，而$\sqrt{2}$，π是无限不循环小数.

我们把无限不循环小数叫做**无理数**(irrational number).

其实，无理数有很多，像

$\sqrt{3}=1.732\ 05\cdots$，$\sqrt{5}=2.236\ 06\cdots$，$\sqrt{6}=2.449\ 48\cdots$，

$\sqrt[3]{2}=1.259\ 92\cdots$，$\sqrt[3]{3}=1.442\ 24\cdots$，$\sqrt[3]{10}=2.154\ 43\cdots$，

$1.212\ 212\ 221\ \cdots$(每两个 1 之间依次多一个 2)

等，都是无限不循环小数，它们都是无理数.

无理数包括正无理数和负无理数. 如$\sqrt{2}$，π，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$等，都是正无理数；$-\sqrt{2}$，$-\pi$，$-\sqrt{3}$，$-\sqrt{5}$，$-\sqrt{7}$等，都是负无理数.

一般地，如果 a 是一个正无理数，那么 $-a$ 是一个负无理数.

我们把有理数和无理数统称为**实数**(real number).

练 习

1. 判断下列说法正确与否. 如果不正确，请举反例说明.

(1) 无限小数都是无理数.

(2) 无限小数都是有理数.

(3) 带根号的数都是无理数.

(4) 实数都是有理数.

(5) 实数都是无理数.

2. 在下列各数中，哪些数是有理数，哪些数是无理数?

$\sqrt[3]{8}$，$0.848\ 2$，$-\dfrac{2}{13}$，$\sqrt[3]{-6}$，π，$\sqrt{10}$，$0.0\dot{1}\dot{5}$，

$1.010\ 010\ 001\ 000\ 01\cdots$(每两个 1 之间依次多一个 0).

习 题

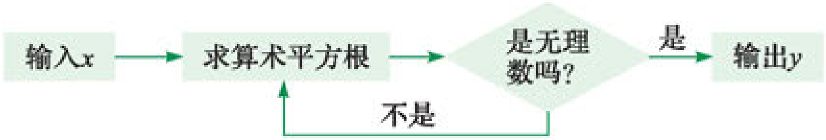
A 组

1. 在下列各数中，哪些数是有理数，哪些数是无理数?

$\sqrt{7}$，3.14，$2.\dot{8}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt[3]{12}$，$\dfrac{4}{7}$，$\sqrt[3]{4}$，$-\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{-8}$，0.205.

2. 有一个数值转换器，程序如图所示. 当输入的数 x 为 256 时，输出的数

y 是______________.

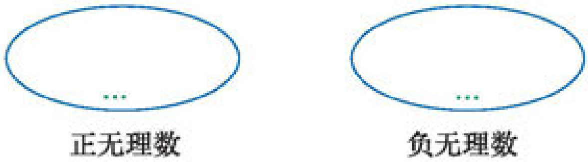


（第 2 题）

3. 把一个底面半径为 1，高为 4 的圆柱形铁质毛坯锻造成一个正方体零件(不计损耗，π 取 3)，求这个正方体的棱长.

B 组

1. 请在下列每一个圈中至少填入三个数：



2. 已知一个小正方体的棱长是 5 cm，一个大正方体的体积是小正方体体积的 2 倍. 求大正方体的棱长.

读 一 读

无 理 数

远在公元前 529 年～公元前 400 年间，古希腊有一个以哲学家、天文学家、数学家毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前 580 年至公元前 570 年之间～约公元前 500 年)为代表的学派，他们起初认为：宇宙的一切现象，都能归结为整数或整数之比，整数之比就是分数. 也就是说，宇宙的一切现象都能用有理数来表示.

但是，毕达哥拉斯学派成员之一的希伯苏斯(Hippasus)发现：正方形的对角线与其一边之比就不能用两个整数之比来表示. 这个发现使该学派的成员大为惊恐. 据说，希伯苏斯因为他的发现打破了毕达哥拉斯学派原来的信条而被同伴们抛入了大海.

此后，该学派的泰奥多勒斯又证明(按现在的说法)了$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$等不能表示为两个整数之比.

这样，希伯苏斯的发现得到了承认和验证，像这样的不能表示为两个整数之比的数(也就是无限不循环小数)，被称为无理数.

我们知道，任意一个有理数都可以用数轴上的一个点来表示. 那么，无理数能不能用数轴上的点来表示呢?

观察与思考

1. 如图 14－3－2 所示，将面积分别为 2 和 3 的两个正方形放置在数轴上，使得正方形的一个顶点和原点 O 重合，一条边恰好落在数轴正方向上，其另一个顶点分别为数轴上的点 A 和点 B.

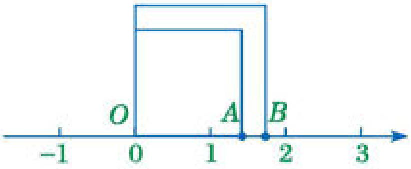


图 14－3－2

（1）线段 OA，OB 的长分别是多少?

（2）点 A，B 在数轴上对应的数分别是哪两个数?

2. 如图 14－3－3 所示，设一枚 5 角硬币的直径为 1 个单位长度，将这枚硬币放置在平面内一条数轴上，使硬币边缘上的一点 P 与原点 O 重合. 让这枚硬币沿数轴的正方向无滑动滚动一周，这时点 P 转到数轴上点 P' 的位置.

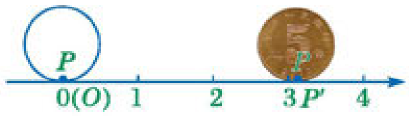


图 14－3－3

（1）线段 OP' 的长是多少?

（2）在数轴上与点 P' 对应的数是哪个数?

实际上，图 14－3－2 中小正方形的边长是 $\sqrt{2}$，所以线段 OA 的长为 $\sqrt{2}$，与点 A 对应的数是 $\sqrt{2}$；同理，线段 OB 的长为 $\sqrt{3}$，与点 B 对应的数是 $\sqrt{3}$；图 14－3－3 中线段 OP' 的长等于 π，与点 P' 对应的数是 π.

由此可知，无理数 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π 可以用数轴上的点来表示. 在图 14－3－2 所示的数轴上，按负方向取点 A'，使 $OA'=OA$，则点 A' 对应的数是 $-\sqrt{2}$.

同理可知，无理数 $-\sqrt{3}$，$-\pi$ 也可以用数轴上的点来表示.

事实上，每个有理数或无理数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的点表示的数是有理数或无理数.

实数和数轴上的点是**一一对应**(one-to-one correspondence)的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数.

任意一个实数都有绝对值、相反数和倒数(0 没有倒数)，它们和有理数的绝对值、相反数和倒数的意义是一样的.

大家谈谈

参照有理数的有关概念，谈谈实数的下列概念：

(1) 实数的绝对值.

(2) 互为相反数的实数.

(3) 一个实数的倒数.

一个正实数的绝对值是它本身.
一个负实数的绝对值是它的相反数.
0 的绝对值是 0.

实数是由有理数和无理数组成的，我们可对实数作如下分类：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ 0\\ \text{负有理数}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

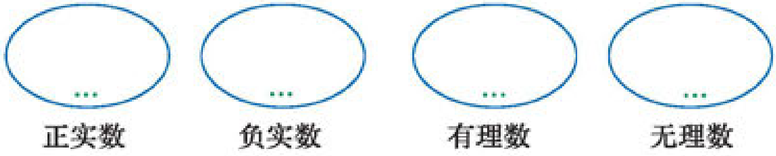
做一做

有理数、无理数都有正数和负数之分，请将实数按正实数和负实数另行分类.

练 习

1. 把下列各数分别填入相应的圈内：

$\frac{1}{2}$，0，15，$\sqrt{4}$，$-\sqrt{2}$，π，-3.14，$\frac{22}{7}$，$-\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[3]{27}$.



2. 求下列各数的相反数、倒数和绝对值：

(1) $-\frac{8}{9}$；(2) $\sqrt{17}$；(3) $-\sqrt{9}$；(4) $\sqrt[3]{-3}$；(5) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$；(6) $-\pi$.

习 题

A 组

1. 已知下列各数：

$$-\frac{1}{2},\ \sqrt{7},\ 3,\ 0,\ \frac{4}{3},\ \sqrt[3]{-8},\ 0.205,\ -\pi,\ -\sqrt{15},\ \sqrt[3]{-16}.$$

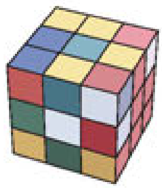
(1) ________________是有理数. (2) ________________是无理数.

(3) ________________是正实数. (4) ________________是负实数.

2. 求下列各数的相反数、倒数和绝对值：

(1) $\frac{12}{7}$； (2) $\sqrt{6}$； (3) $\sqrt[3]{2}$； (4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$； (5) $\frac{\pi}{2}$.

3. 如图，已知一个大正方体是由 27 个相同的小正方体组成的. 如果每个小正方体的体积为 2 cm^3，那么这个大正方体的体积是多少立方厘米，它的棱长是多少厘米？



（第 3 题）

B 组

1. 判断下列说法正确与否. 如果不正确，请举例说明.

(1) 所有有理数都可用数轴上的点来表示.

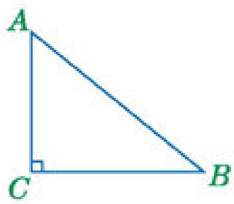
(2) 数轴上的所有点表示的数都是有理数.

(3) 数轴上的所有点表示的数都是实数.

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle C=90°$.

(1) 如果$S_{\triangle ABC}=1$，求 AC 的长.

(2) 如果$S_{\triangle ABC}=3$，求 AC 的长.



（第 2 题）

观察与思考

1．在图 14－3－2 所示的问题情境中，由两个正方形的面积(3 和 2)的大小，能不能得到它们边长($\sqrt{3}$和$\sqrt{2}$)的大小？

2．将面积分别为 a 和 b($a>b$)的两个正方形，按图 14－3－2 所示的方式摆放，它们的边长$\sqrt{a}$和$\sqrt{b}$的大小关系是怎样的？

一般地，已知两个正数 a 和 b，如果 $a>b$，那么$\sqrt{a}>\sqrt{b}$；反过来，如果$\sqrt{a}>\sqrt{b}$，那么 $a>b$.

数轴上的两点，右边的点表示的数大于左边的点表示的数.

做一做

请你根据图 14－3－4 所示的数轴上点的位置，将下列各数用“＜”按从小到大的顺序排列起来：

$$-\sqrt{3}，\sqrt{2}，3，\sqrt{3}，0，\sqrt{5}，-\sqrt{8}，-\sqrt{5}.$$

图 14－3－4

例 1　比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $2\frac{2}{3}$和$\sqrt{7}$；　　(2) $-\sqrt{10}$和$-\pi$.

解：(1) 因为$\left(2\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$，$(\sqrt{7})^2=7=\frac{63}{9}$，而

$$\frac{64}{9}>\frac{63}{9},$$

所以

$$\sqrt{\frac{64}{9}}>\sqrt{7},$$

即 $2\frac{2}{3}>\sqrt{7}$.

(2) 因为$(\sqrt{10})^2=10$，$\pi^2=(3.141\,5\cdots)^2$，而

$$10>3.15^2>\pi^2,$$

所以

$$\sqrt{10}>\pi.$$

从而

$$-\sqrt{10}<-\pi.$$

例 2 判断下列各实数在哪两个相邻的整数之间：

(1) $\sqrt{5}$； (2) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

解：(1) 因为

$$4<5<9,$$

所以

$$2<\sqrt{5}<3,$$

即$\sqrt{5}$在 2 和 3 之间.

(2) 因为

$$0<\frac{2}{3}<1,$$

所以

$$0<\sqrt{\frac{2}{3}}<1.$$

从而

$$-1<-\sqrt{\frac{2}{3}}<0,$$

即$-\sqrt{\frac{2}{3}}$在-1 和 0 之间.

做一做

比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $\sqrt{5}$和 2； (2) $\sqrt{5}-1$ 和 1； (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$和 0.5.

练 习

1. 判断下列各实数在哪两个相邻的整数之间：

$$\sqrt{3},\ \sqrt{13},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{57}.$$

2. 比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $\sqrt{7}$和$\sqrt{6\frac{1}{2}}$；　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$和$\frac{1}{2}$；　(3) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$和$-\sqrt{\frac{2}{5}}$.

3. 将下列各式中的绝对值符号化去：

(1) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$；　(2) $\left|\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{1}{2}\right|$.

习题

A 组

1. 分别写出所有符合下列各条件的数：

(1) $-\sqrt{5}$和$\sqrt{10}$之间的整数.　(2) 小于$\sqrt{47}$的正整数.

(3) 绝对值小于$\sqrt{21}$的整数.　(4) 大于 2 小于 3 的一个无理数.

2. 比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $-\sqrt{2}$和$-\sqrt{3}$；　(2) $\sqrt{3}$和 $3-\sqrt{2}$；

(3) $\sqrt{15}$和 $3\frac{4}{5}$；　(4) $-\sqrt{7}$和-2.45.

3. 已知 x 为整数，且满足$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$. 求 x 的值.

B 组

1. 已知 x 为整数，且 $x<\sqrt{19}+2<x+1$. 求 x 的值.

2. 把下列各数用“$<$”按从小到大的顺序排列起来：

$$5-\sqrt{2},\ \sqrt{26},\ 2+\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 2+\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

3. 两个底面均为正方形的长方体，一个高为 8，体积为 27，另一个高为 6，体积为 24. 比较这两个长方体的底面边长的大小.

14.4 近似数

在进行实数的计算时，有时需要估计实数的范围或者按一定的精确度取近似的数，这就是我们将要学习的近似数.

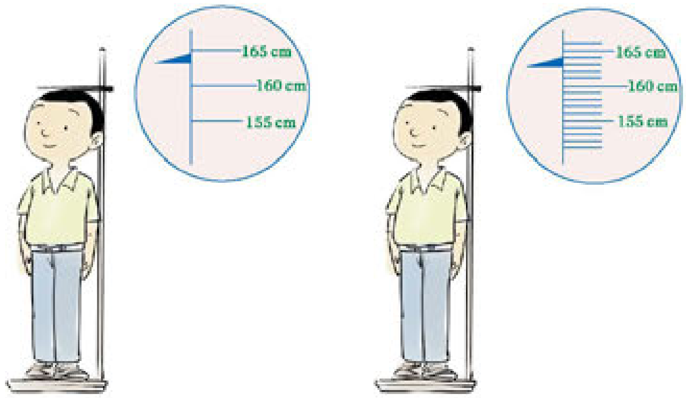
我们知道：

$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698\ 078\ 569\cdots$,

$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\cdots$.

在实际计算中，不可能(也没必要)将它们所有数位上的数字都写出来，往往取它的一个近似的数值即可.

下面是小亮两次测量身高情况的示意图：



一起探究

1. 根据上面左图读出的数据，小亮的身高是 1.63 m；根据上面右图读出的数据，小亮的身高是 1.628 m. 这两个数据都是准确的吗？

2. 1.63 中的三个数字，哪些数字是准确的，哪个数字不一定准确？对于 1.628 中的四个数字，哪些数字是准确的，哪个数字不一定准确？

通常，我们用 1.63 m 来表示小亮的身高就足够了.

例如$\sqrt{2}$，根据计算要求，一般取 1.4，1.414，…作为它的近似值. 又

如 π，一般取它的近似值 3，3.14，3.141 6，等等.

像这样，接近实际的数或在计算中按要求所取的与某个准确数接近的数，我们把它叫做**近似数**(approximate number).

大家谈谈

在下列问题中，哪些数是准确数，哪些数是近似数?

由测量产生的数据，一般都有误差，这些数都不是准确数.

(1) 妈妈花 10 元钱买了 2 kg 香蕉.

(2) 某教学楼共有 5 层，每层的楼梯都是 28 级台阶. 经测量，每级台阶的高是 12 cm，从而教学楼的高度是 $5\times28\times0.12=16.8(\mathrm{m})$.

(3) 小亮用直尺测量一本数学课本的厚度是 1.05 cm，由此，他认为 10 本这样的数学课本摞起来的高度就是 10.5 cm.

除了测量，在生产与生活中也会经常遇到或用到近似数. 例如，2010 年我国国内生产总值达 397 983 亿元，国家财政收入达 83 101 亿元. 这里的 397 983 亿和 83 101 亿都是近似数.

在很多情况下，常采用四舍五入法得到一个数的近似数.

例 将圆周率 π 按下列要求取近似数：

(1) 精确到个位；　　(2) 精确到十分位.

解：(1) π 的十分位(即小数点后面第一位)上是“1”，按四舍五入法应舍去，所以 $\pi\approx3$.

(2) π 的百分位(即小数点后面第二位)上是“4”，按四舍五入法应舍去，所以 $\pi\approx3.1$.

一般地，一个近似数四舍五入到哪一位，就说这个数精确到哪一位.

做一做

将 $\sqrt{5}=2.236\ 067\ 97\cdots$ 按要求取近似数：

(1) 精确到个位；(2) 精确到百分位；(3) 保留四位小数.

练 习

1. 下列各数，哪些是准确数，哪些是近似数？

(1) 王敏同学的身高是 1.72 m.

(2) 小明家里有 4 口人.

(3) 检查一双没洗过的手，发现带有各种细菌 80 万个.

(4) 我国的人口有 14 亿.

2. 用四舍五入法写出下列各数的近似数：

(1) 1.538(精确到 0.01)；　　(2) 0.365 4(精确到 0.001)；

(3) 15.96(精确到十分位)；　　(4) 257.47(精确到个位).

习 题

A 组

1. 下列各数都是用四舍五入法得到的近似数，请你写出它们各是精确到哪一位：

(1) 某地区成年男性平均身高为 1.697 m，平均体重为 67.7 kg.

(2) 2010 年我国城镇居民家庭人均可支配收入为 19 109 元.

(3) 珠穆朗玛峰是世界第一高峰，海拔高度为 8 848.86 m.

2. 按括号内的要求，写出下列各数的近似数：

(1) 1.546(精确到 0.1)；　　(2) 32.023 49(精确到 0.01)；

(3) 20 249(精确到万位)；　　(4) 203.630 1(精确到个位).

3. 1 小时等于多少秒？24 小时等于多少秒？100 万秒等于多少天？(结果保留整数)

B 组

1. 一个圆形游泳池的直径为 32.7 m，求这个圆形游泳池的面积.（π 取 3.14，结果保留两位小数）

2. 一根一次性筷子的长、宽、高大约为 0.5 cm，0.4 cm，20 cm，估计 1 000 万双一次性筷子要用多少木材. 需要砍伐多少棵半径为 0.1 m，高为10 m(除去不可用的树梢)的大树才能得到这些木材？(结果保留整数)

14.5 用计算器求平方根与立方根

我们已经会用计算器进行有理数的混合运算．那么，怎样用计算器求实数的平方根与立方根呢？

下面我们就以 A 型计算器为例，说明如何使用计算器求一个正数的算术平方根．

试着做做

按要求用计算器求下列各数的值，并将计算结果填在表格中：（结果精确到 0.001）

输入数	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
按键顺序	$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$	$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$	$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$
计算结果				

例 1 用计算器求下列各式的近似值：（精确到 0.001）

（1）$\sqrt{\frac{7}{13}}$；　（2）$\sqrt[3]{120}$；　（3）$\sqrt[3]{-\frac{5}{8}}$；　（4）$\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^3}$.

解：（1）按键顺序：$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{7}\ \boxed{a^b/c}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

显示结果：0.733 799 386

所以$\sqrt{\frac{7}{13}}\approx 0.734$.

（2）按键顺序：$\boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{0}$

$\boxed{=}$

显示结果：4.932 424 149

所以$\sqrt[3]{120}\approx 4.932$.

> 2ndF 是第二功能键，按下此键后，计算器将按键盘上红字所显示的功能进行计算．

（3）按键顺序：$\boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{a^b/c}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$

显示结果：$-0.854\ 987\ 973$

所以$\sqrt[3]{-\frac{5}{8}}\approx-0.855$.

(4) 按键顺序：$\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{(}$ $\boxed{7}$ $\boxed{a^b/c}$ $\boxed{8}$ $\boxed{)}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

显示结果：$0.818\ 487\ 553$

所以$\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^3}\approx0.818$.

做一做

用计算器求下列各式的值：(结果精确到 0.001)

(1) $\sqrt{50}$； (2) $\sqrt[3]{5}$； (3) $\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^3}$； (4) $\sqrt[3]{\left(-\frac{15}{7}\right)^5}$.

例 2 某喷水池中央的顶端放置了一大理石球，已知球的质量公式为 $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$. 其中，m(kg)表示球的质量，r(m)表示球的半径，ρ(kg/m^3)为大理石的密度. 如果球的质量 m 为400 kg，大理石的密度 ρ 为 2 600 kg/m^3，那么这个大理石球的半径 r 是多大？(π 取 3.14，结果精确到 0.01 m)

解：由公式 $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$，得

$$r=\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}.$$

因为 $m=400$ kg，$\rho=2\ 600$ kg/m^3，$\pi=3.14$，所以

$$r=\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}=\sqrt[3]{\frac{3\times400}{4\times3.14\times2\,600}}\approx0.332\,460\,015\approx0.33(\text{m}).$$

答：这个大理石球的半径约为 0.33 m.

练习

1. 用计算器求下列各式的值：(精确到 0.001)

$$\sqrt{300},\ \sqrt{\frac{7}{12}},\ -\sqrt[3]{0.9},\ -\sqrt{\frac{123}{5}},\ \sqrt[3]{0.562}.$$

2. 已知一长方体形工件的体积为 25 cm^3，长、宽、高分别为 a cm，b cm，c cm，且 $a:b:c=2:1:3$. 请算出这个工件的表面积.（结果精确到 0.1 cm^2）

习题

A 组

1. 用计算器求下列各式的值：(精确到 0.001)

$$\sqrt{5},\ -\sqrt[3]{16},\ \sqrt{\frac{20}{11}},\ -\sqrt{0.025\,7},\ \sqrt[3]{-29.5},\ \sqrt[3]{\frac{391}{16}}.$$

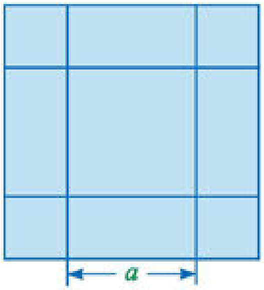
2. 求下列各式中 x 的值：(结果精确到 0.01)

(1) $x^3+20=0$； (2) $5x^3-12=0$.

3. 已知自由落体公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$. 其中，g(m/s^2)是重力加速度，$g=9.8\ \text{m/s}^2$，t(s)是物体降落的时间，h(m)是物体在时间 t 内降落的高度. 如果 $h=300$ m，那么降落的时间 t 是多少？(结果精确到 0.1 s)

B 组

1. 如图，面积为 30 m^2 的正方形四个角上的小正方形的面积均是 2 m^2. 利用计算器求 a 的值.（结果精确到 0.1 m）



(第 1 题)

2. 一个圆柱的底面圆的直径与它的高相等，它的体积为 10 cm^3，一个正方体的体积也为 10 cm^3. 请你通过计算比较该圆柱的底面圆的直径与正方体棱长的大小.

读一读

圆周率 π 的近似值

同一个圆的周长与它的直径之比是一个定值，叫做圆周率，用 π 来表示．它是一个无理数．几千年来，人们为了寻求更精确的 π 的近似值，进行了不懈的研究．

在古代，人们早就有“周三径一”的说法．这是人们为 π 确定的第一个近似值，即 $\pi\approx3$．

公元 150 年左右，古希腊的托勒密得到 $\pi\approx3.141\ 6$．

公元 263 年，我国数学家刘徽运用他所创造的“割圆术”，计算出圆内接正一百九十二边形的面积，得到

$$3.14+\frac{64}{62\ 500}<\pi<3.14+\frac{169}{62\ 500}.$$

公元 466 年左右，我国数学家祖冲之(429 年～500 年)求得

$$3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7.$$

祖冲之对 π 精确计算的纪录，在世界上保持了近千年．

1424 年，中亚细亚数学家阿尔·卡西求得

$$\pi\approx3.141\ 592\ 653\ 589\ 793.$$

1706 年，丁·马青求得了 π 的 100 位小数．

1874 年，威廉·桑克斯计算出 π 值至小数点后第 527 位．

后来，费林生与连契把 π 值计算到了小数点后第 808 位．

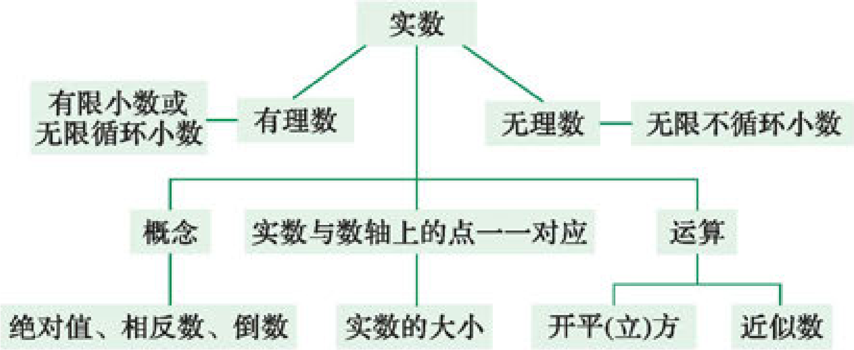
从 20 世纪中叶起，人们开始用计算机计算 π 的近似值，其纪录不断被打破．到 1999 年，有人已用计算机把 π 的近似值精确到小数点后第 2 061亿位．现在，这样的计算主要是用于衡量计算机的运算速度和精确度．

圆周率小数点后 200 位为：

$\pi\approx3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399$
$375\ 105\ 820\ 974\ 944\ 592\ 307\ 816\ 406\ 286\ 208\ 998\ 628\ 034\ 825\ 342$
$117\ 067\ 982\ 148\ 086\ 513\ 282\ 306\ 647\ 093\ 844\ 609\ 550\ 582\ 231\ 725$
$359\ 408\ 128\ 481\ 117\ 450\ 284\ 102\ 701\ 938\ 521\ 105\ 559\ 644\ 622\ 948$
$954\ 930\ 381\ 96.$

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

在本章中，我们认识了无理数，把数从有理数扩充到了实数．实数与数轴上的点具有一一对应关系：任意一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上任意一点都表示一个实数．这种对应关系使得“数”与“形”紧密结合起来，充分体现了“数形结合”的数学思想，为数学研究带来很大方便．

1．无理数是无限不循环小数；有理数是整数和分数，或者说是有限小数和无限循环小数．有理数和无理数统称为实数．

2．平方与开平方互为逆运算，立方与开立方互为逆运算．我们通常借助于平方运算来求非负数的平方根，借助于立方运算来求一个数的立方根．

在实数范围内，非负数开平方和任意数开立方都是有意义的．

3．在实数范围内，绝对值、相反数、倒数和其在有理数范围内的意义是一样的．

实数的绝对值的意义是____________________________；

互为相反数的实数的意义是__________________________．

4．在比较实数大小时，经常用到：如果 $0\leqslant a<b$，那么$\sqrt{a}<\sqrt{b}$．

请比较$\sqrt{15}$和 4 的大小：________．

5．近似数．通常按四舍五入法，根据要求的精确度，对一个数取其近似数．

如果要保留两位小数，那么$\sqrt{3}$和$\sqrt{5}$的近似数分别是_______和_______．

三、注意事项

对于实数，特别是其中的无理数，在很多情况下是取它的近似值．在实

际问题或有关计算中，只要满足精确度的要求，有关的数就可以用其适当的近似值来代替.

复 习 题

A 组

1. 求下列各数的算术平方根和平方根：

(1) 36；(2) 0.64；(3) $\frac{25}{16}$；(4) 7；(5) $\frac{9}{2}$；(6) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$.

2. 求下列各数的立方根：

(1) -1；(2) $\frac{1}{8}$；(3) 0.125；(4) $(-3)^3$；(5) $-\frac{27}{125}$；(6) 4^3.

3. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$；(2) $-\sqrt{\frac{25}{144}}$；(3) $\sqrt[3]{\frac{10^3}{27}}$；(4) $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^3}$.

4. 在下列各数中，哪些是无理数？

$$3.14，\sqrt{2}，\pi，1.414，\sqrt{4}，\sqrt[3]{2}，\sqrt[3]{8}，\frac{22}{7}.$$

5. 求下列各数的绝对值：

$$-\sqrt{0.1}，\sqrt[3]{-6}，1-\sqrt{3}，-\sqrt{(-2)^2}，\frac{\pi}{3}-1.2.$$

6. 比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $\sqrt{8}$和3；(2) -1.4和$-\sqrt{2}$；(3) $\sqrt{5}$和$\frac{9}{4}$；(4) $\sqrt{27}$和$\sqrt[3]{27}$.

7. 用计算器求下列各式的值：(结果精确到0.01)

(1) $\sqrt{2.45}$；(2) $-\sqrt{3\,144}$；(3) $\sqrt[3]{283.4}$；

(4) $\sqrt{(5.21)^3}$；(5) $\sqrt{6}\times\sqrt{2}-3$；(6) $3\sqrt{9}-\frac{\pi}{2}+0.5$.

8. 一个圆柱的体积是$54\pi\ \text{m}^3$，且底面圆的直径与圆柱的高相等. 求这个圆柱的底面半径.

B 组

1. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^2=81$；(2) $2x^2-3=29$；(3) $-4x^3=108$；(4) $8x^3-5=22$.

2. 用平方根表示下列各式中的 x：

(1) $x^2=2$； (2) $x^2=6$； (3) $2x^2=7$； (4) $2x^2-1=9$.

3. 用立方根表示下列各式中的 x：

(1) $x^3=2$； (2) $x^3=-7$； (3) $3x^3=12$； (4) $2x^3-1=11$.

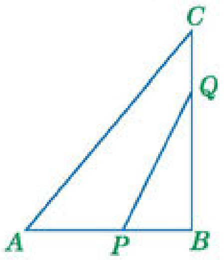
4. 有一面积为 64 cm^2 的正方形纸片. 如果将它做成一个圆柱的侧面，那么这个圆柱的底面圆的半径是多少？(结果保留一位小数)

5. 某地欲在广场建一个面积为 100 m^2 的花坛，花坛四周用铁栏杆围成. 有两种建造方案：正方形和圆形. 从节省材料的角度考虑，应选择哪种方案？(π 取 3.14)

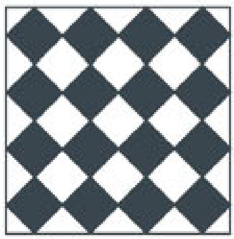
C 组

1. 已知 $x^2-9=0$，$16y^2-1=0$，求 $|x+y|$ 的值.

2. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=5$ cm，$BC=6$ cm，点 P 从点 B 开始沿 BA 以 1 cm/s 的速度向点 A 运动，同时，点 Q 从点 B 开始沿 BC 以 2 cm/s 的速度向点 C 运动. 几秒后，$\triangle PBQ$ 的面积为 9 cm^2？



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，有一边长为 5 m 的正方形客厅，它的地面由黑、白两种完全相同的正方形大理石方砖密铺而成. 客厅四角的三角形地砖面积均是大理石方砖面积的 $\dfrac{1}{4}$，客厅边上的三角形地砖面积均是大理石方砖面积的 $\dfrac{1}{2}$. 求这种大理石方砖的边长. (精确到 0.01 m)

第十五章

二次根式

在本章中，我们将学习

- 二次根式
- 二次根式的乘除运算
- 二次根式的加减运算
- 二次根式的混合运算

学校要修建一个占地面积为S m²的圆形喷水池，它的半径应为多少米？如果在这个圆形喷水池的外围增加一个占地面积为a m²的环形绿化带，那么所成大圆的半径应为多少米？

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$

15.1 二次根式

我们已经学习了数的开平方，并用$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$表示非负数 a 的算术平方根. 现在，我们学习二次根式及其性质.

一起探究

1. (1) 2，18，$\frac{8}{15}$，$\frac{3}{10}$的算术平方根是怎样表示的？

(2) 非负数 m，$p+q$，t^2-1 的算术平方根又是怎样表示的？

2. 学校要修建一个占地面积为 S m^2 的圆形喷水池，它的半径应为多少米？如果在这个圆形喷水池的外围增加一个占地面积为a m^{2}的环型绿化带，那么所成大圆的半径应为多少米？

在上面的问题中，我们得到了$\sqrt{2}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{\frac{8}{15}}$，$\sqrt{\frac{3}{10}}$，$\sqrt{m}$，$\sqrt{p+q}$，$\sqrt{t^2-1}$，$\sqrt{\frac{S}{\pi}}$，$\sqrt{\frac{S+a}{\pi}}$等式子，它们分别表示某个非负数的算术平方根.

一般地，我们把形如$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$的式子叫做**二次根式**(quadratic surd expression).

大家谈谈

1. 小亮和小颖对二次根式“$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$”分别有如下的观点. 你认同小亮和小颖的观点吗？请举例说明.

小亮的观点

因为$\sqrt{a}$表示的是非负数 a 的算术平方根，所以，根据算术平方根的意义，有

$$\sqrt{a}\geqslant 0.$$

小颖的观点

因为$\sqrt{a}$表示的是非负数 a 的算术平方根，所以，根据算术平方根和被开方数的关系，有

$$(\sqrt{a})^2=a.$$

2. 计算$\sqrt{a^2}\,(a\geqslant 0)$，并与大家交流你的结果.

事实上，对于二次根式，有

$$\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)\text{是一个非负数},$$
$$(\sqrt{a})^2=a\,(a\geqslant 0),$$
$$\sqrt{a^2}=a\,(a\geqslant 0).$$

做一做

化简：

(1) $(\sqrt{3})^2$； (2) $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$； (3) $\sqrt{5^2}$； (4) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$.

例 1 化简：

(1) $\sqrt{0.04}$； (2) $\left(3\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2$.

解：(1) $\sqrt{0.04}=\sqrt{0.2^2}=0.2.$

(2) $\left(3\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2=\left[3\times\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right]^2=\left(3\times\frac{1}{3}\right)^2=1^2=1.$

练 习

化简：

(1) $(\sqrt{2})^2$； (2) $\sqrt{0.04^2}$； (3) $\sqrt{0.64}$； (4) $\left(2\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2$.

习题

A 组

1. 化简：

(1) $\sqrt{\left(\frac{8}{17}\right)^2}$；　(2) $\sqrt{121}$；　(3) $\sqrt{225}$.

2. 化简：

(1) $4\sqrt{\left(\frac{3}{16}\right)^2}$；　(2) $(10\sqrt{1.69})^2$；　(3) $\left[\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^2$.

B 组

1. 做一个面积为 300 cm^2 的长方形镜框，使它长与宽的比为 3∶2. 镜框的宽应为多少厘米？

2. 有边长分别为 a cm 和 b cm 的两个正方形，还有一个大正方形，其面积为这两个正方形的面积之和. 这个大正方形的边长是多少？当 $a=3$ cm，$b=4$ cm 时，这个大正方形的边长又是多少？

一起探究

1. $\sqrt{4\times 9}$与$\sqrt{4}\times\sqrt{9}$是否相等？$\sqrt{25\times 49}$与$\sqrt{25}\times\sqrt{49}$呢？

2. 当 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 时，对$\sqrt{a\cdot b}$和$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$的关系提出你的猜想，并说明理由.

3. $\sqrt{\frac{4}{9}}$与$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$是否相等？$\sqrt{\frac{25}{49}}$与$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}$呢？

4. 当 $a\geqslant 0$，$b>0$ 时，对$\sqrt{\frac{a}{b}}$和$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$的关系提出你的猜想，并说明理由.

事实上，$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. 理由如下：

(1) 因为当 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 时，

$$(\sqrt{a\cdot b})^2=a\cdot b,\ (\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=a\cdot b,$$

所以

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

（2）因为当 $a\geqslant0$，$b>0$ 时，

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b}，\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}，$$

所以

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

二次根式的性质

1. 积的算术平方根等于积中各因数的算术平方根的积，即

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,(a\geqslant0，b\geqslant0).$$

2. 商的算术平方根等于被除数的算术平方根与除数的算术平方根的商，即

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(\text{或}\sqrt{a\div b}=\sqrt{a}\div\sqrt{b})\,(a\geqslant0，b>0).$$

例 2 化简：

（1）$\sqrt{54}$；（2）$\sqrt{80}$；（3）$\sqrt{\frac{75}{8}}$；（4）$\sqrt{40.5}$.

解：（1）$\sqrt{54}=\sqrt{9\times6}=\sqrt{9}\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$.

（2）$\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.

（3）$\sqrt{\frac{75}{8}}=\sqrt{\frac{150}{16}}=\frac{\sqrt{25\times6}}{\sqrt{16}}=\frac{5\sqrt{6}}{4}$.

（4）$\sqrt{40.5}=\sqrt{\frac{81}{2}}=\sqrt{\frac{162}{4}}=\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{81\times2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

观察与思考

在例 2 中，观察每个小题化简前后被开方数的变化，请思考：

（1）化简前，被开方数是怎样的数？

（2）化简后，被开方数是怎样的数？它们还含有能开得尽方的因数吗？

一般地，如果一个二次根式满足下面两个条件，那么，我们把这样的二次根式叫做**最简二次根式**.

（1）被开方数的因数是整数，因式是整式；

（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

如 $3\sqrt{6}$，$4\sqrt{5}$，$\frac{5\sqrt{6}}{4}$，$\frac{9\sqrt{2}}{2}$，都是最简二次根式.

二次根式的化简过程就是将它化为最简二次根式的过程.

做一做

化简：

（1）$\sqrt{18}$；　（2）$\sqrt{96}$；　（3）$\sqrt{\frac{1}{2}}$；　（4）$\sqrt{\frac{2}{5}}$.

练　习

1. 判断下列二次根式是不是最简二次根式. 若不是，请化简.

$$\sqrt{13}，\sqrt{45}，\sqrt{43}，\sqrt{0.2}，\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

2. 化简：

（1）$\sqrt{0.5}$；　（2）$\sqrt{\frac{1}{3}}$；　（3）$\sqrt{4.5}$；　（4）$\sqrt{\frac{9}{5}}$.

习　题

1. 下列二次根式的化简结果是不是最简二次根式？若不是，请进一步化简.

（1）$\sqrt{112}=2\sqrt{28}$；　（2）$\sqrt{\frac{28}{20}}=\sqrt{\frac{7}{5}}$；　（3）$\sqrt{1.5}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2. 化简：

（1）$\sqrt{48}$；　（2）$\sqrt{125}$；　（3）$\frac{1}{6}\sqrt{72}$；

（4）$3\sqrt{\frac{2}{3}}$；　（5）$4\sqrt{\frac{3}{8}}$；　（6）$10\sqrt{\frac{24}{5}}$.

15.2 二次根式的乘除运算

我们学过整式和分式的乘除运算，二次根式也可以进行乘除运算.

我们知道二次根式的性质：

$$\sqrt{a \cdot b}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0),$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a \geqslant 0,\ b>0).$$

反向利用它们，就可以进行二次根式的乘除运算了.

二次根式的乘法和除法

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}=\sqrt{a \cdot b}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$.
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (或 $\sqrt{a} \div \sqrt{b}=\sqrt{a \div b}$) $(a \geqslant 0,\ b>0)$.

例 1 计算下列各式：

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$； (2) $\sqrt{8} \times \sqrt{32}$； (3) $\sqrt{20} \times \sqrt{50}$.

解：(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{2}=\sqrt{3 \times 2}=\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{8} \times \sqrt{32}=\sqrt{8 \times 32}=\sqrt{256}=16$.

(3) $\sqrt{20} \times \sqrt{50}=\sqrt{20 \times 50}=\sqrt{1\,000}=10\sqrt{10}$.

> 二次根式运算的结果，应化为最简二次根式.

例 2 计算下列各式：

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$； (2) $\sqrt{\dfrac{4}{5}} \div \sqrt{\dfrac{8}{5}}$； (3) $\sqrt{\dfrac{7}{6}} \div \sqrt{\dfrac{5}{8}}$.

解：(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) $\sqrt{\dfrac{4}{5}} \div \sqrt{\dfrac{8}{5}}=\sqrt{\dfrac{4}{5} \div \dfrac{8}{5}}=\sqrt{\dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{8}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $\sqrt{\dfrac{7}{6}} \div \sqrt{\dfrac{5}{8}}=\sqrt{\dfrac{7}{6} \div \dfrac{5}{8}}=\sqrt{\dfrac{7}{6} \times \dfrac{8}{5}}=\sqrt{\dfrac{28}{15}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{15}}=\dfrac{2\sqrt{105}}{15}$.

在本例的解答过程中，将$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$分别化成了$\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{2\sqrt{105}}{15}$，也就是将分母中含二次根式的式子化为分母中不含二次根式的式子．像这样，把分母中的二次根式化去，叫做**分母有理化**（rationalization of denominator）．

大家谈谈

请就小明和大刚分别计算

$$\sqrt{2}\times\sqrt{18}，\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$$

的做法给予评价，并谈谈你的想法．

小明的做法（先运算后化简）

解：$\sqrt{2}\times\sqrt{18}$
$=\sqrt{2\times18}$
$=\sqrt{36}$
$=6.$

$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3.$

大刚的做法（先化简后运算）

解：$\sqrt{2}\times\sqrt{18}$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{2\times9}$
$=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$
$=6.$

$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3.$

练　习

计算下列各式：

（1）$\sqrt{5}\times\sqrt{10}$；　（2）$3\sqrt{3}\times\sqrt{15}$；　（3）$\frac{2}{\sqrt{12}}$；　（4）$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

习　题

A　组

1．计算下列各式：

（1）$\sqrt{9}\times\sqrt{64}$；　（2）$\sqrt{8}\times\sqrt{128}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{49}}$；　　　　　　　　(4) $\sqrt{\dfrac{5}{3}} \div \sqrt{\dfrac{15}{6}}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\sqrt{0.4}\times\sqrt{3.6}$；　　　　　　(2) $\sqrt{14}\times\sqrt{\dfrac{1}{7}}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{104}}{\sqrt{13}}$；　　　　　　　　(4) $\sqrt{45}\div\sqrt{\dfrac{9}{2}}$.

B 组

1. 已知一个长方形的长为$\sqrt{15}$，宽为$\sqrt{3}$. 求它的面积.

2. 现有面积都是 28 cm^2的长方形、正方形和圆各一个，其中长方形的长是宽的 2 倍. 试比较它们的周长的大小. 通过比较，你有什么发现？(π取 3.14，可借助计算器进行计算)

15.3 二次根式的加减运算

二次根式又该怎样进行加减运算呢?

试着做做

1. 计算下列各式:

(1) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}$;　(2) $\sqrt{12}+\sqrt{75}$;　(3) $6\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}}$.

2. 请将你的做法和大家进行交流.

实际上，对于(1)，有

$$\underbrace{5\sqrt{3}+2\sqrt{3}}_{\text{含相同二次根式}\sqrt{3}}=\underbrace{(5+2)\sqrt{3}}_{\text{合并}}=7\sqrt{3}.$$

就像整式合并同类项那样，被开方数相同的最简二次根式也可以合并.

对于(2)和(3)，同样有

$$\sqrt{12}+\sqrt{75}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3};$$

$$6\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}}=6\sqrt{7}-\frac{\sqrt{7}}{7}=\left(6-\frac{1}{7}\right)\sqrt{7}=\frac{41\sqrt{7}}{7}.$$

二次根式的加减运算，其实就是将被开方数相同的项进行合并. 为此，首先应将每个二次根式化为最简二次根式，然后将被开方数相同的最简二次根式的项进行合并.

例 1 计算下列各式:

(1) $2\sqrt{3}-3\sqrt{12}+5\sqrt{27}$;

(2) $\sqrt{8}+\sqrt{0.5}-\left(\sqrt{0.2}-\sqrt{\frac{1}{32}}\right)$.

解:(1)　$2\sqrt{3}-3\sqrt{12}+5\sqrt{27}$

$=2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+15\sqrt{3}$

$=11\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{8}+\sqrt{0.5}-\left(\sqrt{0.2}-\sqrt{\frac{1}{32}}\right)$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\left(\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$=2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{8}$

$=\frac{21\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{5}}{5}.$

在进行二次根式的有关运算时，一般先将根号下的小数化成分数.

做一做

计算下列各式：

(1) $2\sqrt{28}-3\sqrt{63}+5\sqrt{49}$；　(2) $\sqrt{24}+\sqrt{\frac{1}{6}}-\left(\sqrt{\frac{5}{6}}+\sqrt{0.96}\right)$.

例 2 计算下列各式：

(1) $2\sqrt{12}-3\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{27}$；

(2) $(\sqrt{48}-10\sqrt{0.2})-3\left(\sqrt{45}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

解：(1) $2\sqrt{12}-3\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{27}$

$=4\sqrt{3}-\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

$=0.$

(2) $(\sqrt{48}-10\sqrt{0.2})-3\left(\sqrt{45}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

$=4\sqrt{3}-10\times\frac{\sqrt{5}}{5}-3\left(3\sqrt{5}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$=4\sqrt{3}-2\sqrt{5}-9\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$=5\sqrt{3}-11\sqrt{5}.$

练　习

1. 下列计算是否正确？为什么？

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$；　(2) $\sqrt{5-2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$；

(3) $\sqrt{4}+\sqrt{25}=\sqrt{4+25}$；　　(4) $\frac{\sqrt{36}+\sqrt{12}}{2}=\sqrt{18}+\sqrt{6}$.

2. 将下列各式化成最简二次根式，然后求它们的和.

$$\sqrt{0.02},\ \sqrt{0.2},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sqrt{72},\ \sqrt{125},\ \sqrt{242}.$$

3. 计算下列各式：

(1) $5\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}$；　　(2) $\sqrt{54}-\sqrt{\frac{6}{11}}+\sqrt{0.06}$.

习　题

A　组

1. 计算下列各式：

(1) $\sqrt{3}+\frac{1}{5}\sqrt{75}-\sqrt{108}$；　　(2) $\sqrt{2}-4\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{128}$；

(3) $\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{80}-\sqrt{245}$；　　(4) $12\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{24}-\sqrt{150}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\sqrt{18}-(2\sqrt{75}-\sqrt{27})$；　　(2) $\left(\sqrt{24}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{6}\right)$.

3. 计算下列各式：

(1) $\sqrt{10}-2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{1\,000}\right)+16\sqrt{\frac{1}{32}}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{45}-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{125}\right)$.

B　组

1. 已知三角形的三边长分别为 $7\sqrt{50}$，$3\sqrt{72}$，$4\sqrt{98}$，求三角形的周长.

2. 计算下列各式：

(1) $\frac{1}{2}(\sqrt{32}+\sqrt{64})-\frac{1}{5}(\sqrt{50}-\sqrt{75})$；

(2) $\sqrt{0.2}-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{0.45}+\sqrt{90}\right)$.

15.4 二次根式的混合运算

在含有二次根式的加、减、乘、除运算的式子中，我们可以按一定的顺序进行运算，并将计算结果化为最简二次根式.

与数、整式和分式的混合运算一样，二次根式的混合运算，也应先算乘除，后算加减；有括号时，先算括号内的.

大家谈谈

计算下列各式：

(1) $\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{10})$；　　(2) $(6\sqrt{2}+3\sqrt{18})\div\sqrt{2}$；

(3) $(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)$；　　(4) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})$.

谈一谈你在运算时，用到了哪些运算律和乘法公式.

例 1 计算下列各式：

(1) $\sqrt{2}\times(\sqrt{8}-\sqrt{10})$；　　(2) $(\sqrt{24}+\sqrt{50})\div\sqrt{2}$.

解：(1) $\sqrt{2}\times(\sqrt{8}-\sqrt{10})$

$=\sqrt{16}-\sqrt{20}$

$=4-2\sqrt{5}$.

还可以：

$\sqrt{2}\times(\sqrt{8}-\sqrt{10})$

$=\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{5})$

$=4-2\sqrt{5}$.

(2) $(\sqrt{24}+\sqrt{50})\div\sqrt{2}$

$=\sqrt{24}\div\sqrt{2}+\sqrt{50}\div\sqrt{2}$

$=\sqrt{12}+\sqrt{25}$

$=2\sqrt{3}+5$.

还可以：

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{24}+\sqrt{50})\div\sqrt{2}\\
=&(2\sqrt{6}+5\sqrt{2})\div\sqrt{2}\\
=&2\sqrt{6}\div\sqrt{2}+5\sqrt{2}\div\sqrt{2}\\
=&2\sqrt{3}+5.
\end{aligned}
$$

例 2 计算下列各式：

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$； (2) $(\sqrt{3}+1)^2$.

解：(1)

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})\\
=&(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2\\
=&5-2\\
=&3.
\end{aligned}
$$

乘法公式在实数范围内也是成立的.

(2)

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{3}+1)^2\\
=&(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times1+1^2\\
=&4+2\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

做一做

计算下列各式：

(1) $\sqrt{5}\times(2\sqrt{5}-3\sqrt{15})$； (2) $(\sqrt{7}-1)^2$； (3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{12}+\sqrt{8})$.

例 3 计算下列各式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$； (2) $(5+\sqrt{3})(\sqrt{3}-3)$.

解：(1)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}-1}\\
=&\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\
=&\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}\\
=&\sqrt{2}+1.
\end{aligned}
$$

(2) $(5+\sqrt{3})(\sqrt{3}-3)$

$=5\sqrt{3}-15+(\sqrt{3})^2-3\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-12.$

练　习

计算下列各式：

(1) $\sqrt{5}\times(\sqrt{15}+\sqrt{35})$；　　(2) $(3\sqrt{24}+\sqrt{54})\div\sqrt{6}$；

(3) $(\sqrt{13}-2\sqrt{11})(\sqrt{13}+2\sqrt{11})$；(4) $(3\sqrt{2}-\sqrt{48})(\sqrt{18}-4\sqrt{3})$.

习　题

A 组

1. 计算下列各式：

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$；　　(2) $(\sqrt{15}-2\sqrt{5})\div\sqrt{5}$.

2. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$；　　(2) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

B 组

1. 已知 $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$b=2-\sqrt{3}$，试比较 a 与 b 的大小.

2. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}+1}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{8}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{12}+1}$.

回顾与反思

一、知识结构

- 二次根式$\sqrt{a}(a\geqslant0)$
  - 概念
    - 最简二次根式
    - 分母有理化
  - 性质
    - $\sqrt{a}\geqslant0(a\geqslant0)$;
    - $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$;
    - $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$;
    - $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$;
    - $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$.
  - 运算
    - 二次根式的乘除
    - 二次根式的加减

二、总结与反思

本章的内容，主要是学习被开方数为“数”的二次根式，因此，所学习的二次根式的有关概念以及加、减、乘、除运算，实质上是实数的算术平方根的有关概念和相关运算.

至此，从整式到分式，再到二次根式，我们对代数式的认识更加丰富了.

1．二次根式$\sqrt{a}(a\geqslant0)$具有双重意义：

（1）对非负数 a 的开平方运算；

（2）表示非负数 a 的算术平方根.

2．二次根式的性质，都是根据非负数的算术平方根的意义推导出来的.它们分别是____.

3．最简二次根式应满足的条件是________________________________.

4．二次根式的加减运算与整式的加减运算相类似，主要步骤是____.

5．二次根式的乘除运算法则是________________________________.

三、注意事项

1．在化简二次根式时，往往需要把被开方数进行因数分解.

2. 当一个式子的分母中含有二次根式时，要进行分母有理化.

3. 在进行二次根式的混合运算时，一定要按着这样的顺序进行：先算乘除，后算加减；有括号时，先算括号里面的.

4. 一般地，二次根式运算结果中的根式应化成最简二次根式.

复 习 题

A 组

1. 判断下列各式的计算结果是否正确：

(1) $\sqrt{7}+\sqrt{3}=\sqrt{10}$； (2) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}=\frac{2}{3}$；

(3) $2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}=6\sqrt{6}$； (4) $\sqrt{3}-\sqrt{2}=1$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{72}$；(2) $\sqrt{780}$；(3) $\sqrt{375}$；(4) $\sqrt{\frac{1}{18}}$；(5) $\sqrt{\frac{50}{16}}$；(6) $\sqrt{\frac{32}{45}}$.

3. 计算下列各式：

(1) $\sqrt{48}+2\sqrt{3}-\sqrt{75}$； (2) $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}-6\sqrt{\frac{1}{3}}$；

(3) $2\sqrt{8}-5\sqrt{32}-3\sqrt{5}$； (4) $\sqrt{40}-2\sqrt{\frac{1}{10}}+\sqrt{90}$.

4. 计算下列各式：

(1) $\sqrt{84}\times(-\sqrt{21})$； (2) $2\sqrt{18}\div\sqrt{32}$；

(3) $\sqrt{5}\div\sqrt{15}\times\sqrt{30}$； (4) $\sqrt{72}\div3\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{12}$；

(5) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})$； (6) $(\sqrt{48}+\sqrt{27}-\sqrt{12})\div\sqrt{6}$.

B 组

1. 计算下列各式：

(1) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$； (2) $\left(\sqrt{1\frac{2}{3}}-\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2$；

(3) $(\sqrt{50}+\sqrt{32})\div\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)$； (4) $(\sqrt{63}-\sqrt{28})\div\left(\sqrt{\frac{7}{4}}+\sqrt{7}\right)$.

2. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$；　　(2) $\dfrac{5}{\sqrt{13}}-\dfrac{6}{\sqrt{13}-3}$.

3. 当 $x=\sqrt{5}-1$ 时，求代数式 x^2+5x-6 的值.

4. 借助计算器计算下列各题：

(1) 座钟的钟摆摆动一个来回所需要的时间叫做这个座钟摆动的一个周期，其计算公式为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. 其中，$T$(s)表示周期，$l$(m)表示摆长，$g=9.80\ \mathrm{m/s^2}$. 假如一台座钟的摆长为 0.5 m，它摆动一个来回发出一次嘀嗒声，那么，在 1 min 内，该座钟大约发出了多少次嘀嗒声？（π 取 3.14，结果保留到个位）

(2) 交通警察通常根据后车轮刹车滑过的距离估计车辆行驶的速度，所用的经验公式是 $v=16\sqrt{df}$. 其中，v(km/h)表示车速，d(m)表示刹车后车轮滑过的距离，f 表示摩擦系数. 在某次交通事故调查中，测得 $d=20$ m，$f=1.2$，肇事车的车速大约是多少？（结果保留到百分位）

C 组

1. 已知 n 是正整数，$\sqrt{432n}$ 也是正整数，那么满足条件的 n 的最小值是多少？

2. 当 $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{11}-3)$，$y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{11}+3)$ 时，求代数式 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 的值.

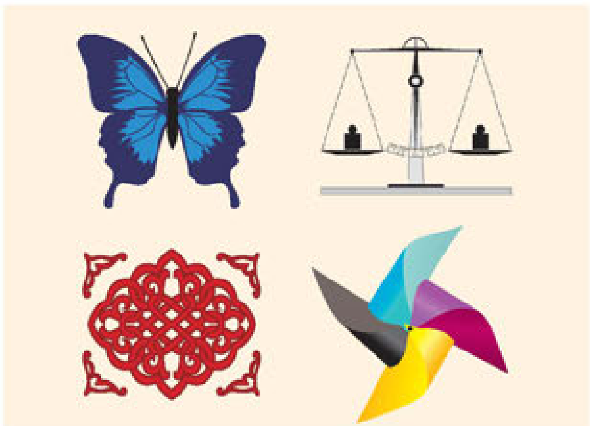
第十六章

轴对称和中心对称

在本章中，我们将学习

- 轴对称
- 线段的垂直平分线
- 角的平分线
- 中心对称图形
- 利用图形的平移、旋转和轴对称设计图案

你一定会感觉下面这些图形很美观！除色彩以外，这些图形的对称性起着重要的作用.



16.1 轴对称

在小学阶段，我们对轴对称已经有了初步认识．现在，我们进一步学习轴对称的性质和应用．

观察与思考

如图 16－1－1，观察这几张图片，它们是不是轴对称的，可通过什么方法进行说明？

图 16－1－1

一般地，如果一个图形沿某条直线对折后，直线两旁的部分能够完全重合，那么这个图形就叫做**轴对称图形**(axially symmetric figure)，这条直线叫做**对称轴**(axis of symmetry)．

轴对称图形是指一个图形的轴对称性，两个图形之间往往也具有这种对称性．

如图 16－1－2 中的两个图形，沿着图中的虚线对折后，这两个图形完全重合．

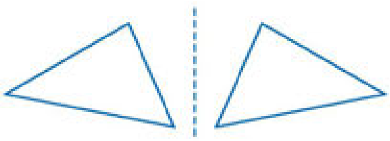


图 16－1－2

一般地，如果两个图形沿某条直线对折后，这两个图形能够完全重合，那么我们就说这两个图形成**轴对称**(axial symmetry)，这条直线叫做对称轴．

关于对称轴对称的点、对称的线段、对称的角分别叫做对应点、对应线段、对应角.

如图 16－1－3，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 成轴对称，直线 l 是对称轴. 在这两个成轴对称的三角形中，点 A 与点 A'，点 B 与点 B'，点 C 与点 C' 分别是对应点；线段 AB 与线段 $A'B'$，线段 AC 与线段 $A'C'$，线段 BC 与线段 $B'C'$ 分别是对应线段；$\angle A$ 与 $\angle A'$，$\angle B$ 与 $\angle B'$，$\angle C$ 与 $\angle C'$ 分别是对应角.

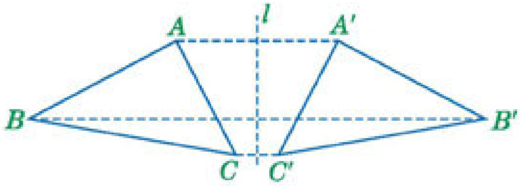


图 16－1－3

一起探究

如图 16－1－3，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 成轴对称，直线 l 是对称轴.

(1) 根据全等形的意义，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等吗？对应线段有怎样的数量关系？对应角呢？

(2) 对应点的连线 AA'，BB'，CC' 分别与对称轴 l 具有怎样的位置关系？

如果两个图形关于某一条直线成轴对称，那么，这两个图形是全等形，它们的对应线段相等，对应角相等，对应点所连的线段被对称轴垂直平分.

成轴对称图形的性质对于轴对称图形同样适用.

垂直且平分一条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线，简称**中垂线**(mid perpendicular). 如图 16－1－3，直线 l 是线段 AA' 的中垂线，也是线段 BB' 和 CC' 的中垂线.

线段是轴对称图形，线段的中垂线是它的对称轴.

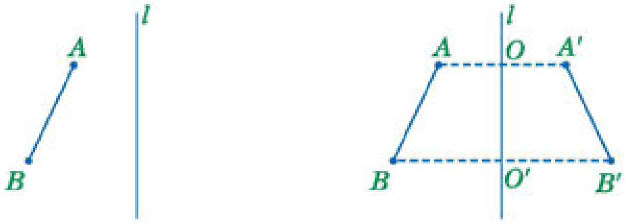
例 如图 16－1－4(1)，已知线段 AB 和直线 l，画出线段 AB 关于直线 l 的对称线段.

解：如图 16－1－4(2).

(1) 分别过点 A 和点 B 画直线 l 的垂线段 AO 和 BO'，垂足分别为 O 和 O'.

(2) 分别延长 AO 到点 A'，BO' 到点 B'，使 $A'O=AO$，$B'O'=BO'$.

（3）连接 $A'B'$.



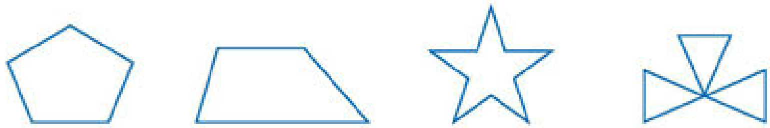
(1)　　　　　　(2)

图 16－1－4

线段 $A'B'$ 即为所求.

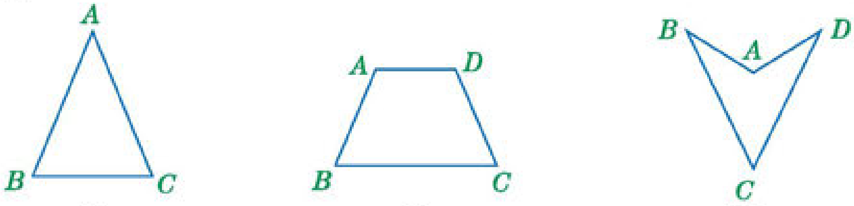
练　习

1. 图中哪些是轴对称图形？请画出轴对称图形的对称轴.



（第 1 题）

2. 请画出下列各对称图形的对称轴，并指出图中标出的点关于对称轴的对称点.



(1)　　　　　　(2)　　　　　　(3)

（第 2 题）

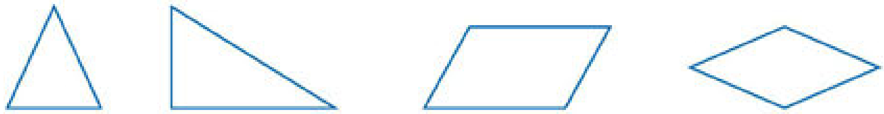
习　题

A　组

1. 如图.

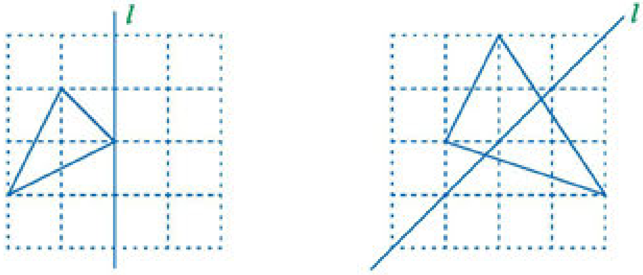
（1）哪些图形是轴对称图形？你是怎样判别的？

（2）请把轴对称图形的对称轴画出来.



（第 1 题）

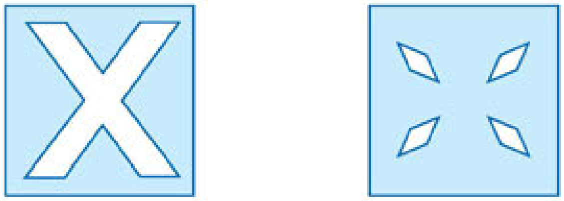
2. 在下列网格图中，分别画出所给图形关于直线 l 的对称图形.



(1)　　　　　　(2)

（第 2 题）

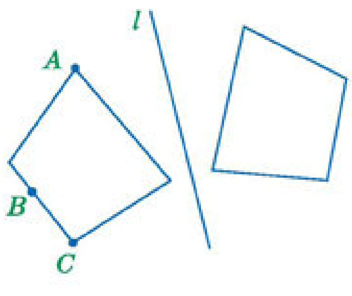
3. 请用折纸的方法剪出图中所示的图案，并试着剪出更美丽的对称图案.



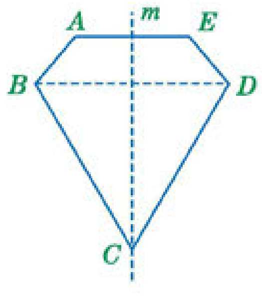
（第 3 题）

B 组

1. 如图，两个四边形关于直线 l 对称，请在图中标出点 A，B，C 的对称点 A'，B'，C'.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，若直线 m 是对称图形 $ABCDE$ 的对称轴，$\angle A=130°$，$\angle ABC=110°$，求$\angle BCD$ 的度数.

16.2 线段的垂直平分线

线段是最简单的轴对称图形，它的中垂线就是它的对称轴. 本节我们将探究线段垂直平分线的重要性质和应用.

一起探究

如图 16－2－1(1)，已知线段 AB 和它的中垂线 l，O 为垂足.

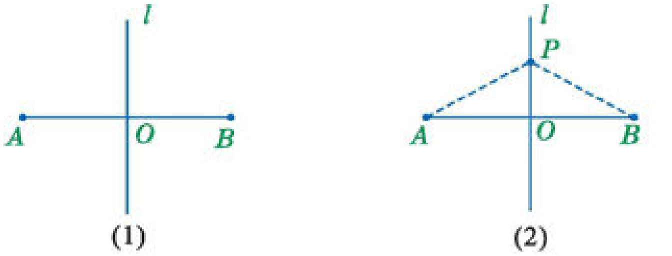


图 16－2－1

如图 16－2－1(2)，在直线 l 上任取一点 P，连接 PA，PB. 线段 PA 和线段 PB 有怎样的数量关系？提出你的猜想并说明理由.

事实上，因为线段 AB 是轴对称图形，中垂线 l 是它的对称轴，所以线段 AB 沿对称轴 l 对折后，点 A 和点 B 重合，线段 PA 和线段 PB 重合，从而 $PA=PB$.

对这个猜想的证明如下：

已知：如图 16－2－2，线段 AB 和它的垂直平分线 l，垂足为 O，点 P 为直线 l 上任意一点，连接 PA，PB.

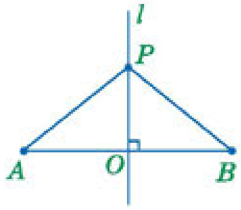


图 16－2－2

求证：$PA=PB$.

证明：在△PAO 和△PBO 中，

$$\because \begin{cases} AO=BO(\text{中垂线的意义}), \\ \angle POA=\angle POB=90^\circ(\text{同上}), \\ PO=PO(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ $\triangle PAO \cong \triangle PBO$(SAS).

∴ $PA=PB$(全等三角形的对应边相等).

线段垂直平分线的性质定理

线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

例 1 已知：如图 16-2-3，点 A，B 是直线 l 外的任意两点. 在直线 l 上，试确定一点 P，使 $AP+BP$ 最短.

图 16-2-3

解：如图 16-2-4，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$，交直线 l 于点 P，则 $AP+BP$ 最短.

理由如下：

∵ 点 A，A' 关于直线 l 对称(作法)，

∴ $AP=A'P$(线段垂直平分线的性质定理).

∴ $AP+BP=A'P+BP=A'B$(等量代换).

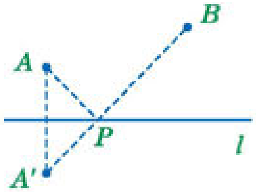


图 16-2-4

如图 16-2-5，在直线 l 上任取一点 P'，连接 AP'，BP'，$A'P'$，则

$A'P'+BP' \geqslant A'B$(两点之间线段最短).

即 $AP'+BP'=A'P'+BP' \geqslant A'B=AP+BP$.

∴ $AP+BP$ 最短.

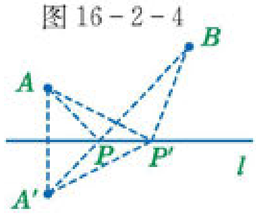


图 16-2-5

做一做

已知：如图 16-2-6，D，E 分别是 AB，AC 的中点，$CD \perp AB$ 于点 D，$BE \perp AC$ 于点 E.

求证：$AC=AB$.

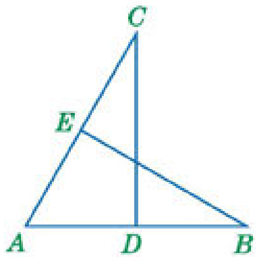


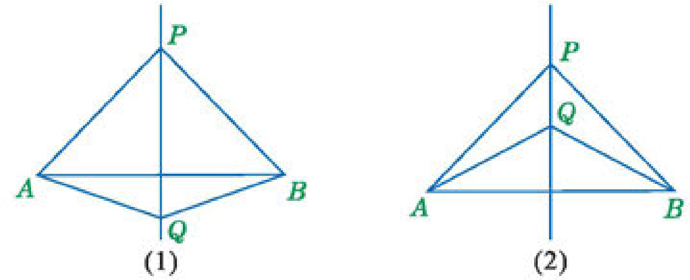
图 16-2-6

练 习

1. 已知：P，Q 为线段 AB 垂直平分线上的两点.

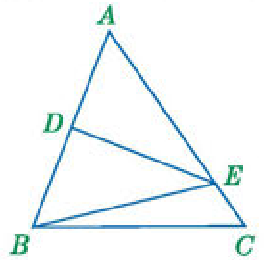
(1) 如图(1)，当点 P，Q 在线段 AB 的两侧时，你认为 $\angle PAQ$ 和 $\angle PBQ$ 相等吗？为什么？

(2) 如图(2)，当点 P，Q 在线段 AB 的同侧时，你认为 $\angle PAQ$ 和 $\angle PBQ$ 相等吗？为什么？



(第 1 题)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，线段 AB 的中垂线交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，$AC=14$，$\triangle EBC$ 的周长是 24．求 BC 的长．

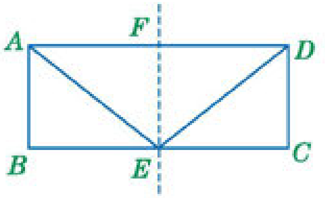


(第 2 题)

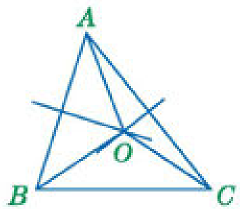
习 题

A 组

1. 如图，将长方形纸片 $ABCD$ 对折，使 AB 和 DC 重合，E，F 分别是折痕与边 BC，AD 的交点．$\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 全等吗？为什么？



(第 1 题)

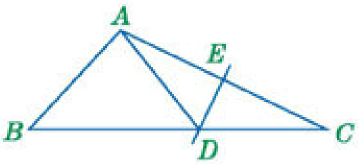


(第 2 题)

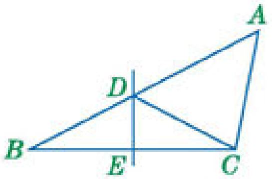
2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 的边 AB 的中垂线与边 AC 的中垂线相交于点 O．
求证：$AO=BO=CO$．

B 组

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AC的中垂线交BC于点D，交AC于点E，$AE=3$ cm，$\triangle ABD$的周长为13 cm. 求$\triangle ABC$的周长.



（第1题）



（第2题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，BC的中垂线交BC于点E，交AB于点D，$\angle B=28°$. 求$\angle ADC$的度数.

我们知道，线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等. 反过来，到线段两端距离相等的点在这条线段的垂直平分线上吗？

一起探究

1. 写出线段垂直平分线的性质定理的逆命题.

2. 结合图16－2－7，写出这个逆命题的已知和求证.

3. 猜想这个逆命题的真假，并试着说明理由.

4. 试着证明你的猜想.

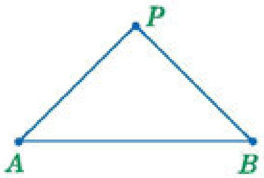


图16－2－7

已知：如图16－2－8，P为线段AB外一点，且$PA=PB$.

求证：点P在线段AB的垂直平分线上.

证明：设线段AB的中点为O，连接PO并延长.

在$\triangle POA$和$\triangle POB$中，

$$\because \begin{cases} PA=PB(\text{已知}), \\ PO=PO(\text{公共边}), \\ AO=BO(\text{中点的意义}), \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle POA \cong \triangle POB(\text{SSS})$.

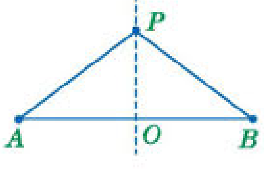


图16－2－8

∴ $\angle POA=\angle POB$(全等三角形的对应角相等).

∵ $\angle POA+\angle POB=180^\circ$(平角的意义),

∴ $2\angle POA=180^\circ$，$\angle POA=90^\circ$.

∴ 直线 PO 是线段 AB 的垂直平分线(中垂线的意义).

∴ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

线段垂直平分线性质定理的逆定理

到线段两端距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

例 2 已知：如图 16－2－9，在△ABC 中，AB，AC 的垂直平分线 DP 与 EP 相交于点 P.

求证：点 P 在 BC 的垂直平分线上.

证明：如图 16－2－10，连接 PA，PB，PC.

∵ DP，EP 分别是 AB，AC 的垂直平分线(已知)，

∴ $PB=PA=PC$(线段垂直平分线的性质定理).

∴ 点 P 在 BC 的垂直平分线上(线段垂直平分线性质定理的逆定理).

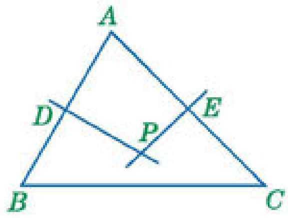


图 16－2－9

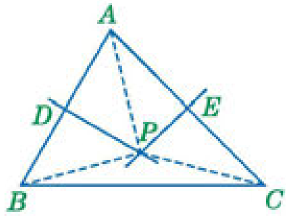


图 16－2－10

做一做

已知：如图 16－2－11，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=AD$，$AC\perp BD$，垂足为 O.

求证：$AO=OC$，$BO=OD$.

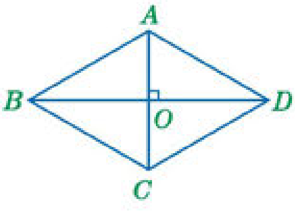
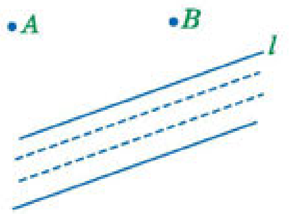


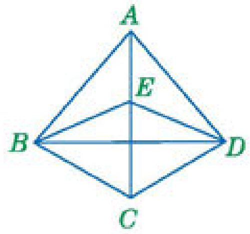
图 16－2－11

练　习

1. 如图，要在河边 l 上修建一个抽水站，将河水送到 A，B 两点处. 该站建在河边 l 的什么地方，可使铺设的两条直管道的长度相等？试在图中确定该点，并说明理由.



（第 1 题）



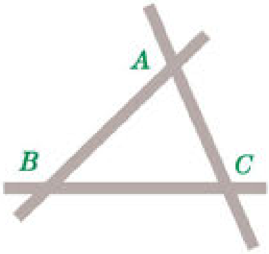
（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB=AD$，$BC=DC$，E 是 AC 上一点. 求证：$BE=DE$.

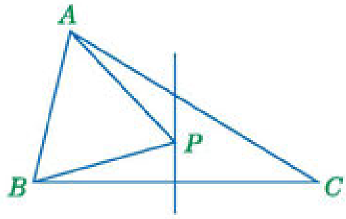
习 题

A 组

1. 如图，三条路围成一个三角地带，要在它的中间建一个市场，并且使市场到三个交叉路口的距离相等. 怎样才能找到这个市场的位置呢？请画出示意图，并说明你的理由.



（第 1 题）

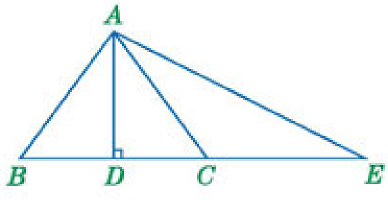


（第 2 题）

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 内部一点 P 在 BC 的中垂线上，且 $PA=PB$. 求证：点 P 在 AC 的中垂线上.

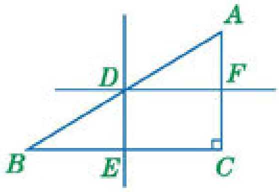
B 组

1. 如图，$AD\perp BC$，$BD=DC$，点 C 在 AE 的垂直平分线上. 请写出 $AB+BD$ 与 DE 的长度关系，并给予证明.



（第 1 题）

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，线段BC的垂直平分线交AB于点D，交BC于点E，$DF\perp AC$于点F，$AD=BD$. 求证：DF是线段AC的垂直平分线.



（第2题）

用直尺和圆规作图的问题，以前已经遇到过. 现在，我们可以进一步用尺规作有关图形.

例3 如图16-2-12，已知线段AB.

图16-2-12

求作：线段AB的垂直平分线.

分析：由线段垂直平分线性质定理的逆定理，只要作出到这条线段端点距离相等的两点，连接这两个点，即得所求作的直线.

作法：如图16-2-13.

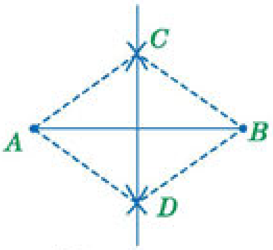


图16-2-13

（1）分别以点A和点B为圆心，$a\left(a>\frac{1}{2}AB\right)$为半径，在线段$AB$的两侧画弧，分别相交于点$C$，$D$.

（2）连接CD.

直线CD即为所求.

例4 如图16-2-14，已知直线AB及AB外一点P.

求作：经过点P，且垂直于AB的直线.

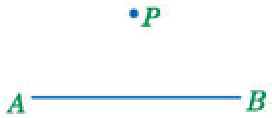


图16-2-14

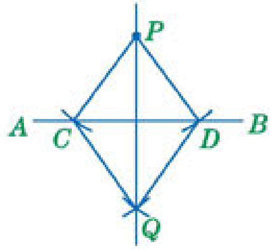


图16-2-15

分析：在直线AB上作出一条线段CD，使得点P在线段CD的垂直平分线上. 再作出到点C，D距离相等的点Q，连接PQ，直线PQ即为所求.

作法：如图16-2-15.

（1）以点P为圆心，适当长为半径画弧，交直线AB于点C，D.

（2）分别以点 C，D 为圆心，适当长为半径，在直线 AB 的另一侧画弧，两弧相交于点 Q.

（3）连接 PQ.

直线 PQ 即为所求.

做一做

已知：如图 16－2－16，点 P 在直线 AB 上.

求作：经过点 P，且垂直于 AB 的直线.（保留作图痕迹，不要求写出作法）

图 16－2－16

练　习

1. 如图，已知两点 A，B.

求作：直线 l，使点 A，B 关于 l 对称.（保留作图痕迹，不要求写出作法）

（第 1 题）

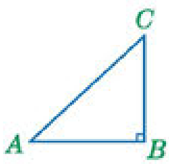
2. 求作：$\angle ABC=90^\circ$.（保留作图痕迹，不要求写出作法）

习　题

1. 如图，已知线段 AB.

求作：线段 AB 的中点.（保留作图痕迹，不要求写出作法）

（第 1 题）



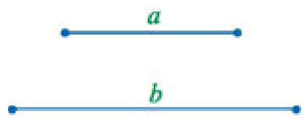
（第 2 题）

2. 如图，已知$\triangle ABC$，$\angle B=90^\circ$.

求作：以直线 BC 为对称轴，且与$\triangle ABC$ 对称的$\triangle A'B'C'$.（保留作图痕迹，不要求写出作法）

3. 如图，已知线段 a，b.

求作：以线段 a，b 为相邻两边的长方形.（保留作图痕迹，不要求写出作法）



（第 3 题）

16.3 角的平分线

角是轴对称图形吗？如果是轴对称图形，对称轴是哪条直线？角的平分线有哪些性质？这些都是我们需要学习研究的内容.

一起探究

1. 在一张半透明纸上画出一个角，将纸对折，使这个角的两边重合. 从中你能得出什么结论？

2. 按图 16－3－1 所示的过程，将你画出的$\angle AOB$依上述办法对折后，设折痕为直线OC；再折纸，设折痕为直线n，直线n与边OA，OB分别交于点D，E，与折线OC交于点P；将纸展开铺平后，猜想线段PD与线段PE，线段OD与线段OE分别具有怎样的数量关系，并说明理由.

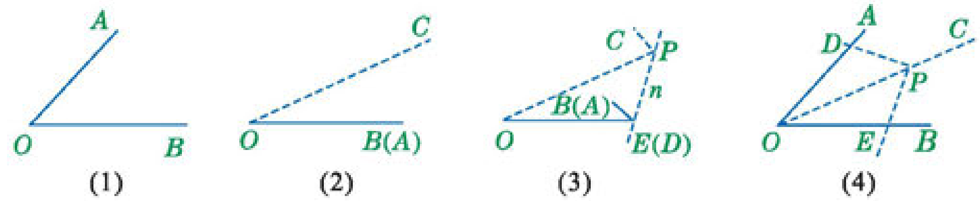


图 16－3－1

事实上，$\angle AOB$是轴对称图形，它的平分线OC是对称轴. 由折纸过程可知，$PD=PE$. 特别地，当折痕n与OB垂直时，可得出：角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

下面就来证明折纸过程中发现的结论.

已知：如图 16－3－2，OC是$\angle AOB$的平分线，P是OC上任意一点，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为D，E.

求证：$PD=PE$.

证明：在$\triangle PDO$和$\triangle PEO$中，

$$\because \begin{cases} \angle 1=\angle 2(\text{已知}), \\ \angle PDO=\angle PEO=90^\circ(\text{已知}), \\ OP=OP(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle PDO \cong \triangle PEO$(AAS).

$\therefore$ $PD=PE$(全等三角形对应边相等).

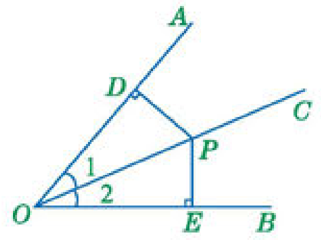


图 16－3－2

角平分线的性质定理

角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

线段垂直平分线的性质定理的逆命题是一个真命题(定理). 角平分线的性质定理的逆命题是真命题还是假命题呢?

做一做

(1) 写出角平分线的性质定理的逆命题.

(2) 根据这个逆命题的内容，画出图形.

(3) 结合图形，提出你对这个逆命题是否正确的猜想.

(4) 设法验证你的猜想.

事实上，角平分线的性质定理的逆命题是一个真命题.

角平分线性质定理的逆定理①

到角的两边距离相等的点在角平分线上.

例 如图 16－3－3，已知$\angle AOB$.

求作：$\angle AOB$ 的平分线.

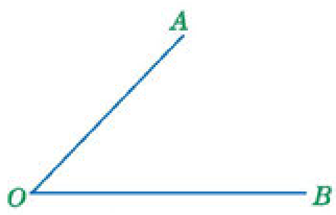


图 16－3－3

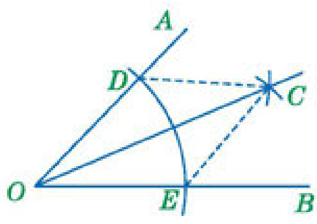


图 16－3－4

① 角平分线性质定理的逆定理将在第十七章给出证明.

作法：如图 16-3-4.

(1) 以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 OA，OB 于点D，E.

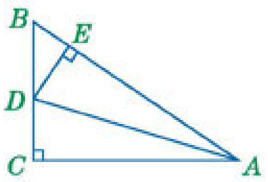
(2) 分别以点 D，E 为圆心，适当长为半径，在$\angle AOB$ 内部画弧，两弧相交于点 C.

(3) 作射线 OC.

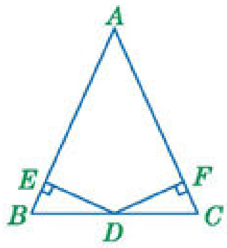
射线 OC 即为所求.

练习

1. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$，垂足为 E. 求证：$DE=DC$，$AC=AE$.



（第 1 题）



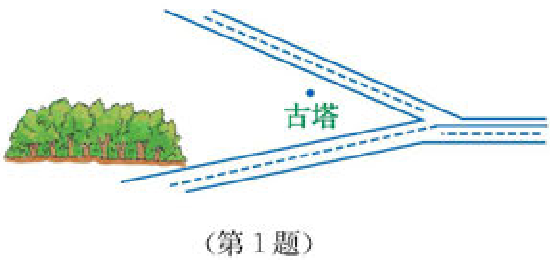
（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，D 为边 BC 的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E，F. 求证：点 D 在$\angle A$ 的平分线上.

习题

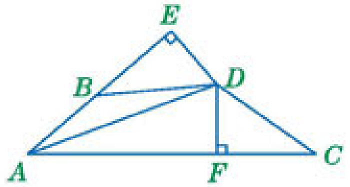
A 组

1. 某考古队为进行考古研究，要寻找一座古城遗址. 根据资料记载，这座古城在森林附近，到两条河岸的距离相等，到古塔的距离是 3 000 m. 根据这些资料，考古队很快就找到了这座古城的遗址. 你能运用所学过的知识在图上标出古城遗址吗？请你试一试.（比例尺为 1∶100 000）

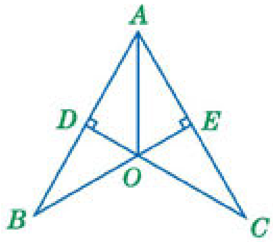


（第 1 题）

2. 已知：如图，AD 平分$\angle BAC$，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别为E，F，且 $BE=CF$. 求证：$BD=CD$.



（第 2 题）



（第 3 题）

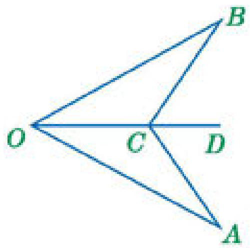
3. 已知：如图，$CD \perp AB$，$BE \perp AC$，垂足分别为 D，E，BE，CD 相交于点O. 求证：

（1）当$\angle BAO=\angle CAO$ 时，$OB=OC$.

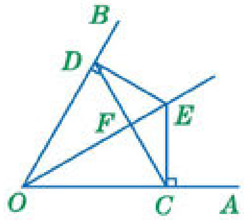
（2）当 $OB=OC$ 时，$\angle BAO=\angle CAO$.

B 组

1. 已知：如图，C 是$\angle AOB$ 的平分线OD 上的一点，$\angle ACD=\angle BCD$. 求证：$OA=OB$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，E 是$\angle AOB$ 的平分线上的一点，$EC \perp OA$，$ED \perp OB$，垂足分别为 C，D，连接 CD，交 OE 于点F. 求证：

（1）$OC=OD$.

（2）$\angle ECD=\angle EDC$.

（3）OE 是线段CD 的垂直平分线.

3. 求证：在三角形中，两角平分线的交点到这个三角形三边的距离相等.

16.4 中心对称图形

我们已经学习了轴对称图形和两个图形成轴对称，下面将学习中心对称图形和两个图形成中心对称.

观察与思考

1. 如图 16－4－1，观察这几幅图片，将它们分别绕各自标示的“中心点”旋转 180°后，能不能与它们自身重合?

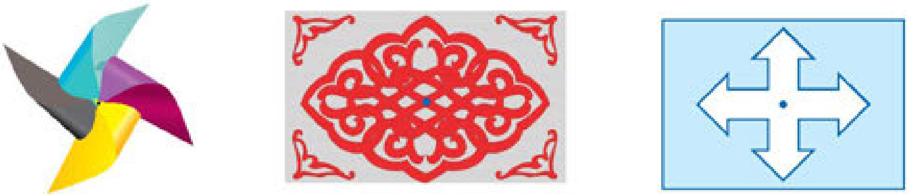


图 16－4－1

2. 如图 16－4－2，已知线段 AB 和它的中点 O. 当线段 AB 绕点 O 旋转 180°后，这条线段能不能与它自身重合?

3. 你还能举出具有上述特征的图形的例子吗?

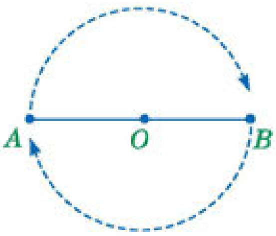


图 16－4－2

图 16－4－1 和图 16－4－2 中的图形，分别绕各自的“中心点”(或中点)旋转 180°后，都能与它们自身重合.

像这样，如果一个图形绕某一个点旋转 180°后能与它自身重合，我们就把这个图形叫做**中心对称图形**(a figure central symmetry)，这个点叫做它的**对称中心**(center of symmetry)，其中对称的点叫做对应点.

线段是中心对称图形，线段的中点是它的对称中心，两个端点为一对对应点.

中心对称图形是指一个图形的中心对称性，两个图形之间往往也具有这种对称关系.

做一做

1. 如图 16-4-3，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点 A，C，F，D 在同一条直线上，O 为线段 CF 的中点，$AC=DF$，$BC=EF$，$\angle ACB=\angle DFE$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转 180° 后，它能与 $\triangle DEF$ 重合吗？如果能重合，那么线段 AB，AC，BC 分别与哪些线段重合，点 A，B，C 分别与哪些点重合？

2. 请你再画出两个具有上述特征的图形.

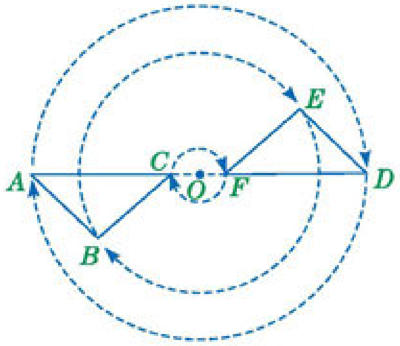


图 16-4-3

如果一个图形绕某一点旋转 180° 后与另一个图形重合，我们就把这两个图形叫做**成中心对称**，这个点叫做对称中心，其中成中心对称的点、线段和角，分别叫做对应点、对应线段和对应角.

如图 16-4-3，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 成中心对称，点 O 为对称中心. 点 A，B，C 的对应点分别为点 D，E，F；线段 AB，AC，BC 的对应线段分别为线段 DE，DF，EF；$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对应角分别为 $\angle D$，$\angle E$，$\angle F$.

大家谈谈

1. 如果将成中心对称的两个图形看成一个图形，那么这个图形是不是中心对称图形？

2. 我们已经学习过图形的旋转，中心对称图形和图形的旋转之间有什么关系？

3. 对于图形的旋转，有基本性质：“一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心的距离相等，两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等.”中心对称图形具有怎样的性质？

将你的想法和大家进行交流.

在成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，并且被对称中心平分.

例 如图 16－4－4，已知线段 AB 和点 O，画出线段 AB 关于点 O 的中心对称图形.

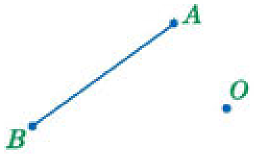


图 16－4－4

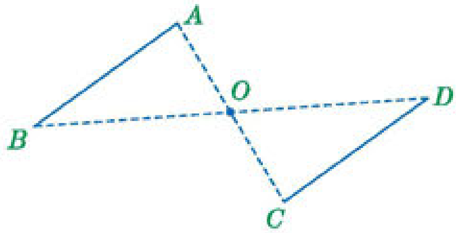


图 16－4－5

解：如图 16－4－5.

(1) 连接 AO，BO，并延长 AO 到点 C，延长 BO 到点 D，使得 $OC=OA$，$OD=OB$.

(2) 连接 CD.

线段 CD 即为所求.

练 习

1. 请你举出生活中两个图形成中心对称的实例.

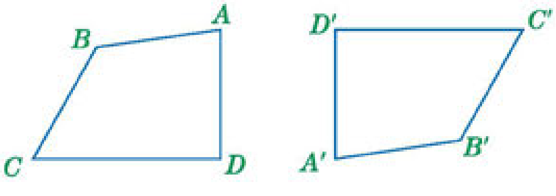
2. 在如图所示的四张扑克牌中，你认为哪一张的牌面是中心对称图形？是中心对称图形的，指出它的对称中心.

（第 2 题）

习 题

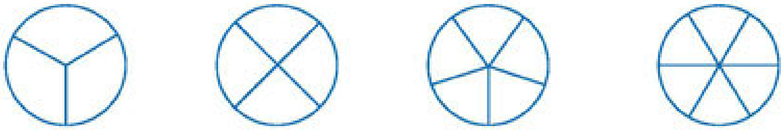
A 组

1. 如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 是成中心对称的两个图形，请你试着确定其对称中心的位置.



（第 1 题）

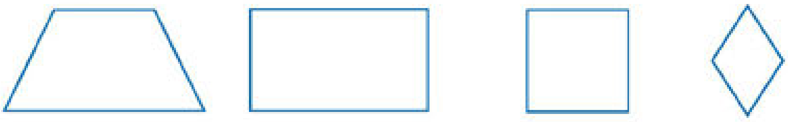
2. 指出图中的中心对称图形.



(1) (2) (3) (4)

（第 2 题）

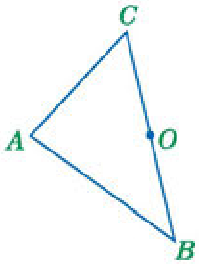
3. 指出图中的中心对称图形，并画出其对称中心.



(1) (2) (3) (4)

（第 3 题）

4. 如图，请你画出$\triangle ABC$关于边BC的中点O成中心对称的图形.



（第 4 题）

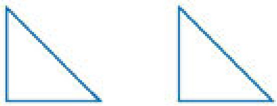
B 组

1. 将图中的两个全等的等腰直角三角形分别拼接成满足下列条件的图形，并画出拼成的图形.

   (1) 是轴对称图形，但不是中心对称图形.

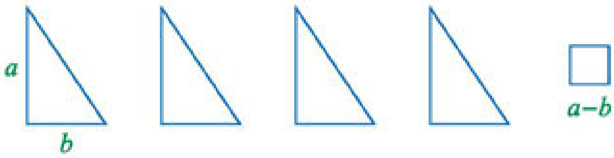
   (2) 是中心对称图形，但不是轴对称图形.

   (3) 既是轴对称图形，又是中心对称图形.



（第 1 题）

2. 用图中四个全等的直角三角形和一个正方形拼接成一个中心对称图形，并画出你所拼接的图形.



（第 2 题）

16.5 利用图形的平移、旋转和轴对称设计图案

在日常生产和生活中，人们常常利用图形的平移、旋转和轴对称来设计一些图案.

试着做做

1. 如图 16－5－1，请将这个图形沿箭头所示的方向和距离平移三次.（保留原图痕迹）

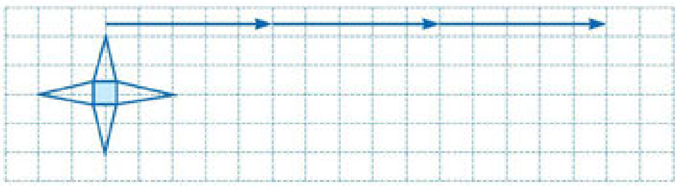


图 16－5－1

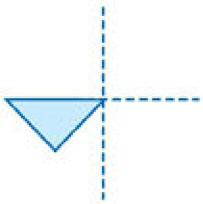


图 16－5－2

2. 如图 16－5－2，将这个三角形绕两条虚线的交点，先旋转 90°，再将整个图形旋转 180°，画出旋转后的图形.（保留原图痕迹）

观察与思考

1. 观察图 16－5－3 和图 16－5－4 中的两组图案，请你分别说说由图案(1)到图案(2)的变化过程.

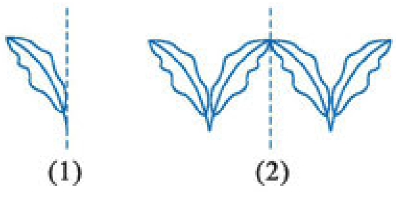


图 16－5－3

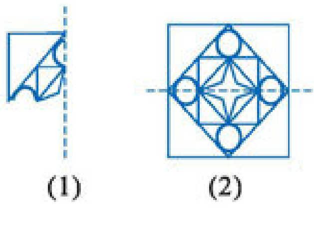
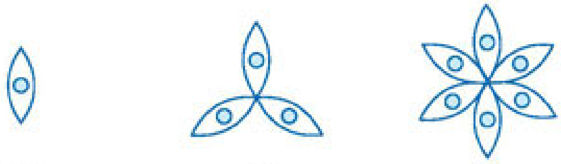


图 16－5－4

2. 观察图 16－5－5，请你说说由图案(1)到图案(2)，再到图案(3)的变化过程.



(1)　　(2)　　(3)

图 16－5－5

做一做

如图 16－5－6，在同一平面内有一些几何图形，请利用图形的平移、旋转和轴对称，设计一个你想象中的“房屋示意图”.

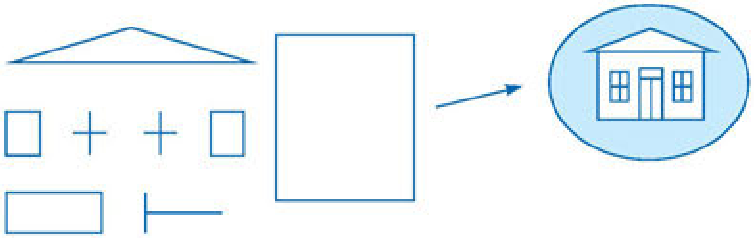
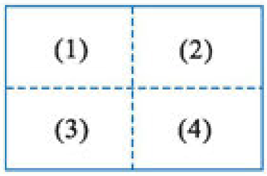
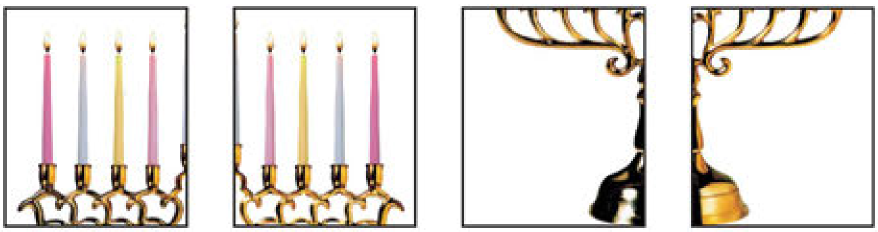


图 16－5－6

练　习

1. 有一幅生活图片是轴对称图形，把它沿图示的虚线剪开后成为下面四幅图画. 请你根据图示的四个位置，在分割后的四幅图下写上相应的序号. 你认为原来这是一幅什么图片？



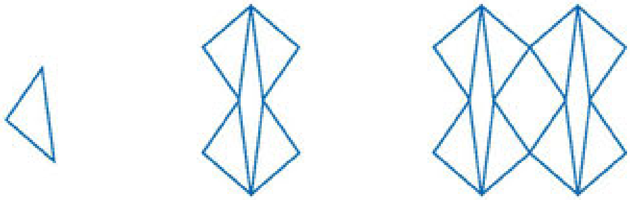


（第 1 题）

2. 观察图案.

（1）请你说说由图案(1)到图案(3)的变化过程.

（2）请你利用图案(1)再设计出一个图案.



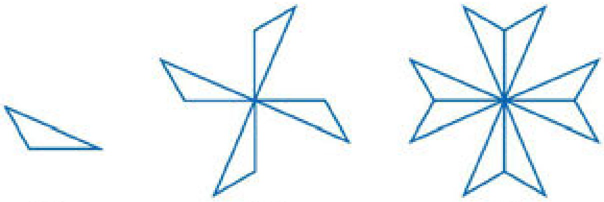
(1) (2) (3)

（第 2 题）

习题

A 组

1. 请你收集 3 个～5 个是轴对称图形的不同标志的图案，并找出它们的对称轴.
2. 观察图案，请你说说由图案(1)到图案(3)的变化过程.



(1) (2) (3)

（第 2 题）

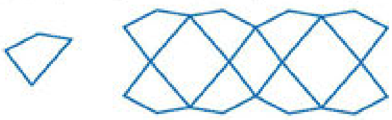
3. 利用线段、三角形和圆设计一个图案.

B 组

1. 观察图案.

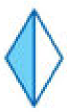
   (1) 请你说说由图案(1)到图案(2)的变化过程.

   (2) 请你利用图案(1)再设计出一个图案.



(1) (2)

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 利用所给图形，通过旋转和轴对称设计两个图案.

数学活动

中心对称图形与面积等分

如果将成中心对称的两个图形看成一个图形，那么这个图形是中心对称图形，且对称中心不变．反过来，如果将一个中心对称图形看成被过对称中心的任意一条直线分成的两个图形，那么这两个图形成中心对称，且对称中心也不变．

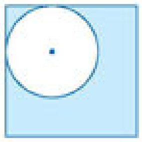
活动一：

先画图，再思考：

1．如何用一条直线将一个中心对称图形分成面积相等的两部分？

2．具有不同对称中心的两个中心对称图形，由这两个对称中心所确定的直线能不能将这两个中心对称图形同时分成面积相等的两部分？

3．图(1)是一个由正方形和圆构成的“组合图形”，如何用一条直线同时将正方形和圆分成面积相等的两部分？

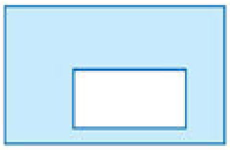


(1)

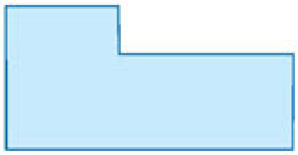
活动二：

1．图(2)是一个外轮廓和内部都是长方形的组合图形，图(3)是一个由两个长方形拼成的组合图形．

这两个组合图形本身并不是中心对称图形．请分别用一条直线将图(2)的阴影部分和图(3)分成面积相等的两部分．



(2)

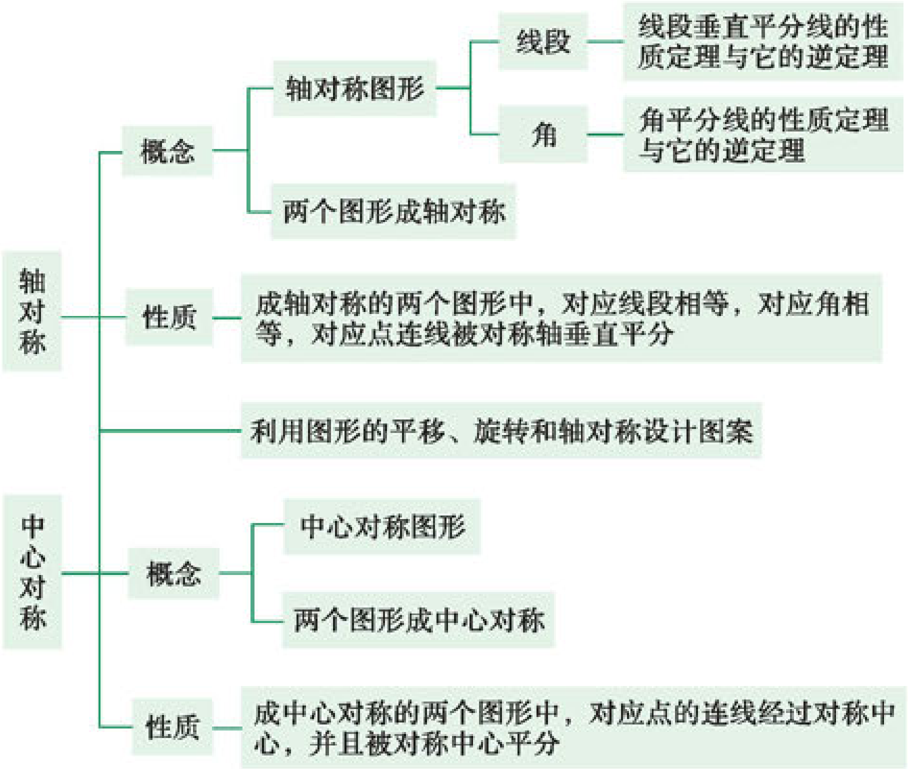


(3)

2．请你自己设计一个含两个中心对称图形的组合图形，并用一条直线将其分为面积相等的两部分．

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

在本章中，我们结合生活中广泛存在的对称现象，通过观察、思考、操作和探究等方式，学习了轴对称和中心对称的有关概念、性质，探索并证明了线段和角的有关性质，利用图形的平移、旋转和轴对称设计了一些简单图案.

图形的对称具有双重属性：一是从“形”上刻画图形自身的基本特征或两个图形之间的位置关系；二是从“量”上描述图形对应元素之间的数量关系. 这是用图形的对称性来研究图形性质的基础.

1. 轴对称.

(1) 轴对称图形或成轴对称的两个图形，关于对称轴两侧的对应部分，沿对称轴对折时能够重合. 因此，对应线段________，对应角________，对应图形是________________.

(2) 轴对称图形或成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴________.

(3) 轴对称图形指的是一个图形，反映的是这个图形自身的对称性；两

个图形成轴对称，反映的是两个图形之间的轴对称关系．二者既有联系也有区别：若将一个轴对称图形看成被对称轴分成的两个图形，则这两个图形成轴对称，对称轴不变；若将成轴对称的两个图形看成一个图形，则这个图形是轴对称图形，对称轴也不变.

2．中心对称.

（1）中心对称图形或成中心对称的两个图形，绕对称中心旋转 180°时，中心对称图形自身或成中心对称的两个图形能够重合．因此，对应线段________，对应角________，成中心对称的两个图形是____________.

（2）中心对称图形或成中心对称的两个图形中，对应点的连线被对称中心________________.

（3）中心对称图形指的是一个图形，反映的是这个图形自身的中心对称性；两个图形成中心对称，反映的是两个图形之间的中心对称关系．如果将成中心对称的两个图形看成一个图形，那么这个图形是中心对称图形，对称中心不变.

3．线段.

线段既是轴对称图形，也是中心对称图形．线段的垂直平分线是它的对称轴，中点是它的对称中心.

（1）线段垂直平分线的性质定理：________________________.

（2）线段垂直平分线性质定理的逆定理：____________________.

4．角.

角是轴对称图形，角的平分线是它的对称轴.

（1）角平分线的性质定理：____________________________.

（2）角平分线性质定理的逆定理：________________________.

5．设计图案.

利用图形的平移、旋转和轴对称设计图案，是人们在进行图案设计时经常使用的一种方法．作一个图形关于某条直线的轴对称图形，是逆用轴对称的性质来进行的；作一个图形关于某点的中心对称图形，是逆用中心对称的性质来进行的.

三、注意事项

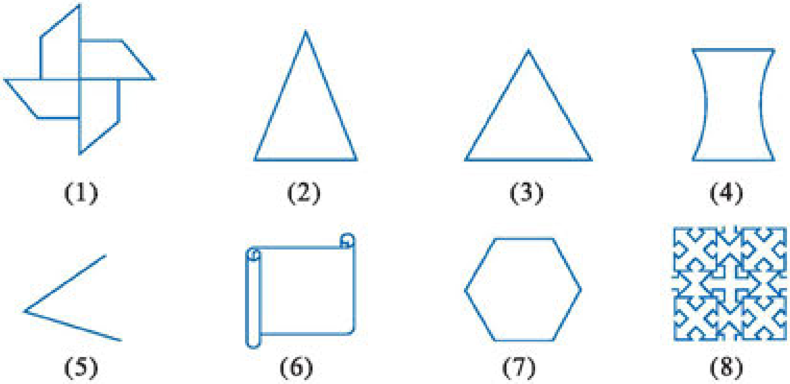
1．轴对称图形至少有一条对称轴，有时可能有多条．如三边相等的三角形，一共有 3 条对称轴，每条边的中垂线都是它的对称轴.

2．线段和角是构成几何图形的基本元素，线段中垂线的性质定理及其逆定理和角平分线的性质定理及其逆定理是进行推理论证的重要依据，在今后的学习中，应结合具体问题，注意应用.

复习题

A 组

1. 观察下列图形，请把符合要求的图形的标号填在相应的横线上.



（第 1 题）

没有对称轴的图形是________________.

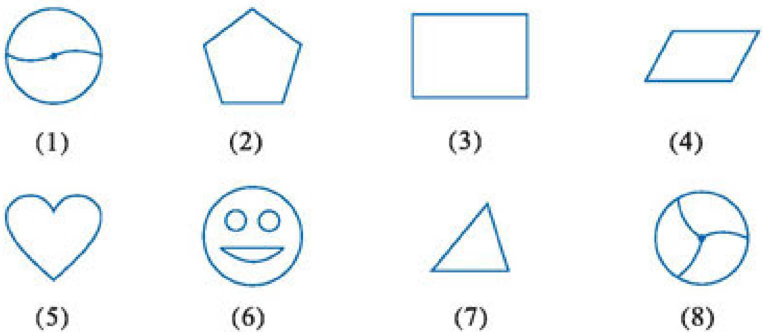
有一条对称轴的图形是______________.

有两条对称轴的图形是______________.

有三条对称轴的图形是______________.

有三条以上对称轴的图形是____________.

2. 观察下列图形，请把符合要求的图形的标号填在相应的横线上.



（第 2 题）

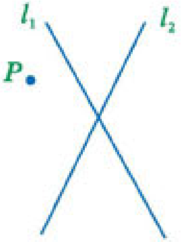
是轴对称图形的有____________________.

是中心对称图形的有____________________.

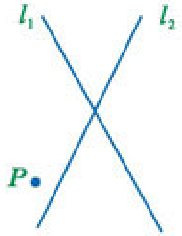
既是轴对称图形又是中心对称图形的有____________________.

既不是中心对称图形又不是轴对称图形的有____________________.

3. 请分别在图(1)、图(2)中画出点 P 关于直线 l_1 的对称点 P'，再画出点 P' 关于直线 l_2 的对称点 P''.



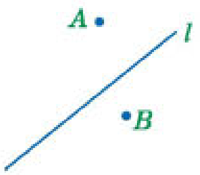
(1)



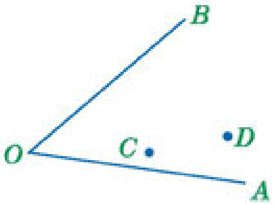
(2)

(第 3 题)

4. 如图，村庄 A，B 分别在笔直公路 l 的两侧. 一辆汽车在公路上行驶到什么位置时，它到这两个村庄的距离相等？请在图中标出该位置，并说明理由.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，点 C，D 在 $\angle AOB$ 的内部.

(1) 哪些点到点 C，D 的距离相等？请把符合要求的点画出来.

(2) 哪些点到 $\angle AOB$ 的两边的距离相等？请把符合要求的点画出来.

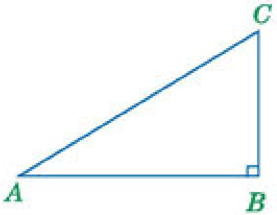
(3) 是否存在一点 P，既有 $PC=PD$，又有点 P 到 $\angle AOB$ 的两边的距离相等？如果存在，请把符合要求的点画出来.

6. 图中下面的轿车图片是由上面的轿车图片绕某点旋转 $180°$ 得到的. 请找出这个点.

(第 6 题)

B 组

1. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$. 在 BC 边上是否存在一点 D，使得点 D 到边 AB 和 AC 的距离相等？如果存在，请把这个点找出来；如果不存在，请说明理由.

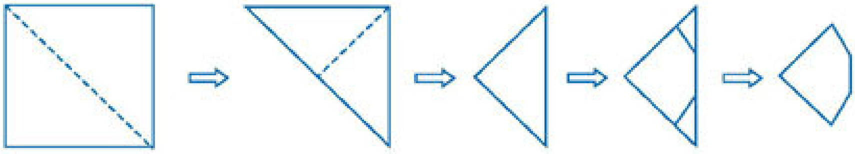


（第 1 题）

（第 2 题）

2. 如图，要在高压输电线的旁边修一个小型变电站．该变电站建在输电线旁边的什么地方，才能使变电站到 A 村和 B 村架设的电线线路最短？

3. (1) 把一张正方形薄纸片按图示方法对折，并剪去两个相同的角：



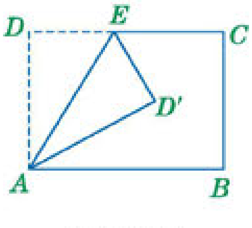
（第 3 题）

①你能猜出将纸片打开后的形状吗？请试着画出这个形状的图形．

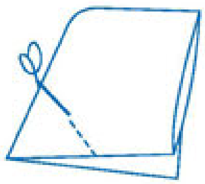
②这个图形是轴对称图形吗？如果是，请画出它的所有对称轴．

(2) 先用一张正方形的纸设计并剪出一个轴对称图形，然后与同学交流各自的剪法．

4. 如图，将长方形 $ABCD$ 沿 AE 折叠．已知 $\angle BAD'=30°$，求 $\angle AED$ 的度数．



（第 4 题）



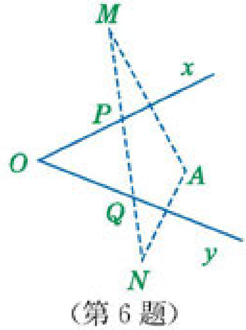
（第 5 题）

5. 如图，将一张长方形纸片对折两次，剪下一个角，然后展开．如果要剪出一个正方形，那么剪口线与折痕应该成多少度角？

6. 如图，Ox，Oy 是两条公路，在两条公路夹角内部的点 A 处有一油库．若在两公路上分别建一个加油站，并使运油的油罐车从油库出发先到一加油站，再到另一加油站，最后回到油库的路程最短，则加油站应如何选址？

(1) 作点 A 关于 Ox，Oy 对称的点 M，N．

(2) 连接 MN，与 Ox，Oy 分别交于点 P，Q．

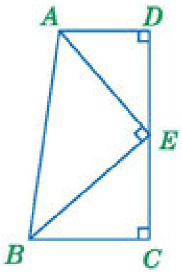


（第 6 题）

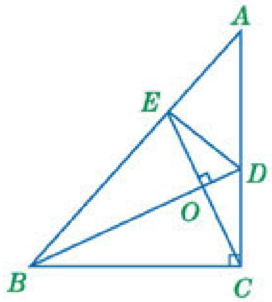
点 P，Q 就是所求的加油站的位置．请你根据作图的过程，说明确定点 P，Q 位置的合理性．

C 组

1．已知：如图，$\angle C=\angle D=90^{\circ}$，$AE$ 是 $\angle BAD$ 的平分线，交 CD 于点 E，且 $AE\perp BE$．求证：BE 平分 $\angle ABC$．



（第 1 题）



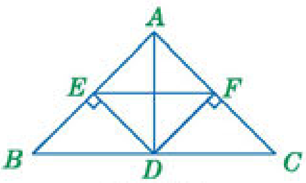
（第 2 题）

2．已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，E 为 AB 边上一点，且 $CE\perp BD$，垂足为 O．求证：

（1）BD 是线段 CE 的垂直平分线．

（2）$\angle ADE=\angle ABC$．

3．已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E，F．求证：AD 是线段 EF 的垂直平分线．

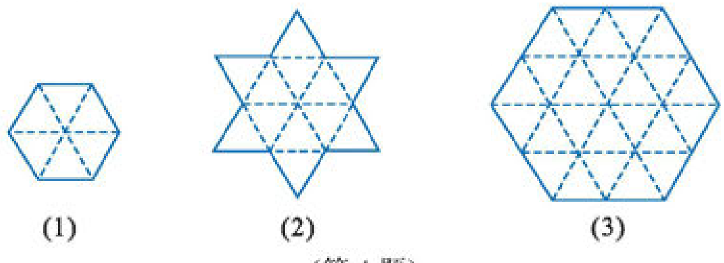


（第 3 题）

4．观察下列画图步骤，并回答问题．

步骤 1：以图(1)中六边形每条边所在的直线为对称轴，向图形外画与六边形的边重合的小三角形的轴对称图形，构成六角星形，如图(2)．

步骤 2：以图(2)中六角星形每条边所在的直线为对称轴，向图形外画与六角星形的边重合的小三角形的轴对称图形，构成较大的六边形，如图(3)．



（第 4 题）

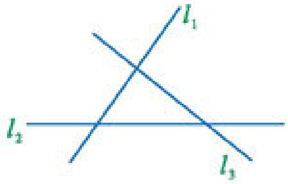
问题：

(1) 图(2)和图(3)中的小三角形各有多少个？

(2) 对图(3)所示六边形重复上述步骤1和步骤2，又可得到一个更大的六边形，这个六边形中的小三角形有多少个？

(3) 如果连续画下去，第 n 个图形和第 $(n+1)$ 个图形中，各含有小三角形多少个？

5. 如图，直线 l_1，l_2，l_3 表示三条相互交叉的公路．现要建立一个货物中转站，要求它到三条公路的距离相等，则可供选择的位置有几处？请在图中标出来．



（第 5 题）

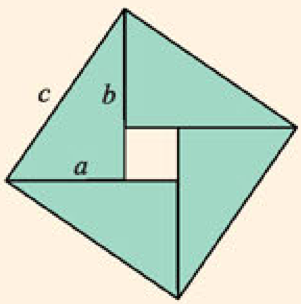
第十七章

特殊三角形

在本章中，我们将学习

- 等腰三角形
- 直角三角形
- 勾股定理
- 反证法

下图是用四个全等的直角三角形拼成的大正方形，中间的部分是一个小正方形．这个图形反映了直角三角形三边之间怎样的关系？

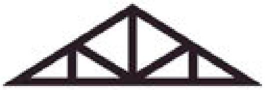


$$a^2+b^2=c^2$$

17.1 等腰三角形

等腰三角形是一类特殊的三角形，它具有一些特殊的性质．现在我们就来探究等腰三角形的性质．

在我们的身边，许多物体的形状是两边相等的三角形，如房屋的钢梁架、红领巾、交通标志的外沿形状等．



有两边相等的三角形叫做**等腰三角形**．在等腰三角形中，相等的两边叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角．

如图 17－1－1，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$．AB和AC是腰，BC是底边，$\angle A$是顶角，$\angle B$和$\angle C$是底角．

顶角是直角的等腰三角形叫做等腰直角三角形．

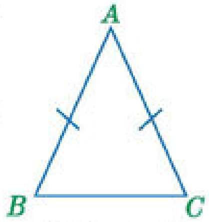


图 17－1－1

观察与思考

如图 17－1－1，$\triangle ABC$是等腰三角形，其中，$AB=AC$．

(1) 我们知道，线段BC为轴对称图形，中垂线为它的对称轴．由$AB=AC$，可知道点A在BC的中垂线上．据此，你认为$\triangle ABC$是轴对称图形吗？如果是，对称轴是哪条直线？

(2) $\angle B$和$\angle C$有怎样的关系？

(3) 底边BC上的高、中线及$\angle A$的平分线有怎样的关系？

不难发现，等腰三角形是轴对称图形，底边的垂直平分线是它的对称轴，$\angle B=\angle C$，底边上的高、中线和顶角的平分线三线重合．

下面，我们来证明等腰三角形的两个底角相等．

已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$．

求证：$\angle B=\angle C$．

证明：如图 17－1－2，作$\angle A$的平分线AD.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$$\because \begin{cases} AB=AC(\text{已知}), \\ \angle 1=\angle 2(\text{角平分线概念}), \\ AD=AD(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle ACD(\mathrm{SAS})$.

$\therefore\ \angle B=\angle C$(全等三角形的对应角相等).

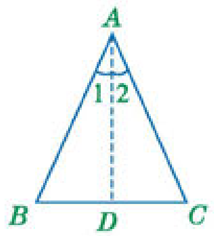


图 17－1－2

从上面的证明过程还知道：

$BD=CD$(全等三角形的对应边相等)，

$\angle ADB=\angle ADC$(全等三角形的对应角相等).

因为$\angle ADB+\angle ADC=180°$，所以

$$\angle ADB=\angle ADC=90°.$$

因此，$\angle A$的平分线AD，也是$\triangle ABC$底边BC上的中线和高.

等腰三角形的性质定理

等腰三角形的两个底角相等.（简称“等边对等角”）

等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高重合.（简称“三线合一”）

三边都相等的三角形叫做**等边三角形**. 等边三角形是等腰三角形的特例.

做一做

已知：如图 17－1－3，在$\triangle ABC$中，$AB=BC=AC$.

求证：$\angle A=\angle B=\angle C=60°$.

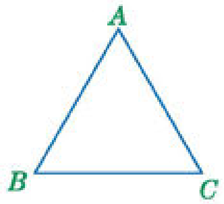


图 17－1－3

等边三角形的性质定理

等边三角形的三个角都相等，并且每一个角都等于 60°.

例 1 已知：如图 17－1－4，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD，CE分别为$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线.

求证：$BD=CE$.

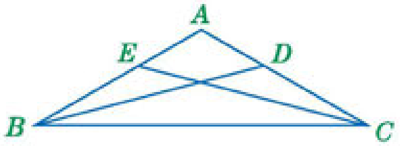


图 17－1－4

证明：$\because$ BD，CE分别为$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线，

$\therefore$ $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\because$ $\angle ABC=\angle ACB$(等边对等角)，

$\therefore$ $\angle ABD=\angle ACE$(等量代换).

$\because$ $AB=AC$(已知)，

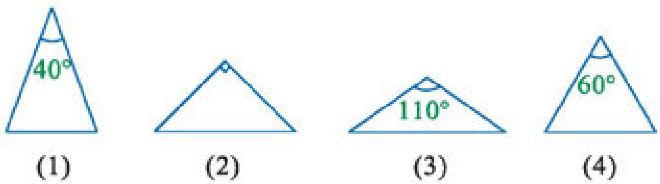
$\angle A=\angle A$(公共角)，

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$(ASA).

$\therefore$ $BD=CE$(全等三角形的对应边相等).

练　习

1. 下面各等腰三角形的顶角的度数如图所示. 请分别求出它们的底角的度数，并画出各等腰三角形的对称轴.



（第 1 题）

2. 已知各等腰三角形底角的度数分别是：

(1) 80°；　　(2) 50°；

(3) 45°；　　(4) 30°.

请分别求出它们顶角的度数.

3. 回答下列问题，并说明理由.

(1) 等腰三角形的底角可以是锐角吗？可以是直角或钝角吗？

(2) 等腰三角形的顶角可以是锐角吗？可以是直角或钝角吗？

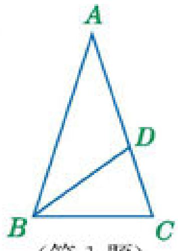
习题

A 组

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D在AC上，且$BD=BC=AD$.

   (1) 请指出图中所有的等腰三角形.

   (2) 求$\angle A$的度数.



(第 1 题)

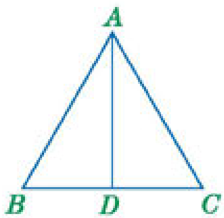
2. 解答下列问题：

   (1) 一个等腰三角形的一个内角是$80°$，求这个三角形另外两个内角的度数.

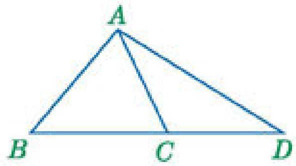
   (2) 一个等腰三角形的一个内角是$100°$，求这个三角形另外两个内角的度数.

   (3) 一个等腰三角形的底角是顶角的一半，求这个三角形各内角的度数.

3. 已知：如图，$\triangle ABC$是等边三角形，点D在BC上，$BD=DC$. 求$\angle CAD$的度数.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 已知：如图，在$\triangle ABD$中，$\angle B=50°$，点C在BD上，且$AB=BC$，$AC=CD$. 求$\angle D$的度数.

B 组

1. 一个等腰三角形一腰上的中线所在的直线把这个等腰三角形的周长分成15 cm和18 cm两部分. 求这个等腰三角形底边的长.

2. 等腰三角形两腰上的中线相等吗？等腰三角形两腰上的高相等吗？证明你的判断.

我们知道，等腰三角形的两个底角相等. 反过来，如果一个三角形有两个角相等，那么这个三角形是等腰三角形吗？

一起探究

已知：如图 17－1－5，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$.

（1）请你作出$\angle BAC$的平分线AD.

（2）将$\triangle ABC$沿AD所在直线折叠，$\triangle ABC$被直线AD分成的两部分能够重合吗？

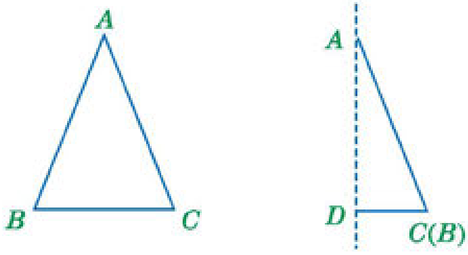


图 17－1－5

（3）由上面的操作，你是否发现了边AB和边AC之间的数量关系？

已知：如图 17－1－6，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$.

求证：$AB=AC$.

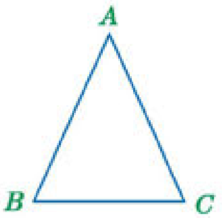


图 17－1－6

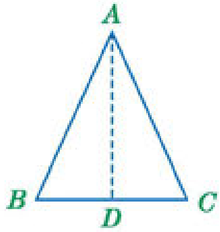


图 17－1－7

证明：如图 17－1－7，作$\angle A$的平分线，交BC于点D.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$$\because \begin{cases} \angle B=\angle C(\text{已知}), \\ \angle BAD=\angle CAD(\text{角平分线概念}), \\ AD=AD(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$(AAS).

$\therefore$ $AB=AC$(全等三角形的对应边相等).

等腰三角形的判定定理

如果一个三角形有两个角相等，那么这个三角形是等腰三角形．其中，两个相等的角所对的边相等．（简称“等角对等边”）

大家谈谈

1. 三个内角都相等的三角形是等边三角形吗？说出你的理由.
2. 有一个角是 60°的等腰三角形一定是等边三角形吗？说出你的理由.

等边三角形的判定定理

三个角都相等的三角形是等边三角形.
有一个角等于 60°的等腰三角形是等边三角形.

例 2 已知底边及底边上的高，用尺规作等腰三角形.

如图 17－1－8，已知线段 a 和 h.

图 17－1－8

求作：等腰三角形 ABC，使 $BC=a$，高 $AD=h$.

分析：先作出线段 $BC=a$，再作出 BC 的垂直平分线. 在这条垂直平分线上截取点 A，使点 A 到 BC 的距离$=h$，连接相关点即得.

作法：如图 17－1－9.

（1）作线段 $BC=a$.

（2）作 BC 的垂直平分线 MD，垂足为 D.

（3）在 DM 上截取 $DA=h$.

（4）连接 AB，AC.

$\triangle ABC$ 即为所求.

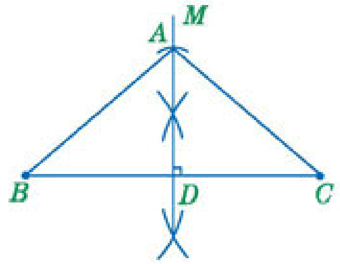
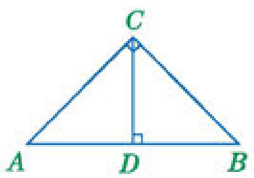


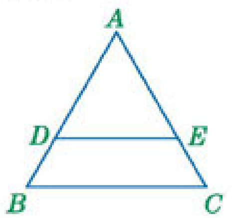
图 17－1－9

练　习

1. 如图，CD 是等腰直角三角形 ABC 斜边 AB 上的高. 请找出图中所有的等腰直角三角形（$\triangle ABC$ 除外），并说明理由.



（第 1 题）



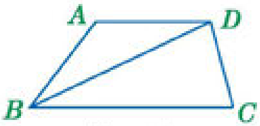
（第 2 题）

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$DE /\!/ BC$，分别交 AB，AC 于点 D，E. 求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形.

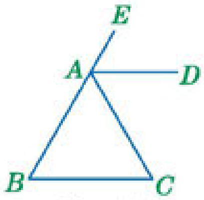
习题

A 组

1. 已知：如图，$AD \parallel BC$，BD 平分$\angle ABC$. 求证：$\triangle ABD$ 是等腰三角形.



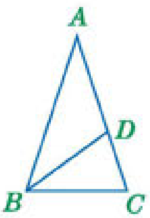
（第 1 题）



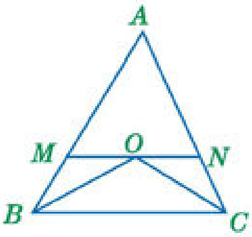
（第 2 题）

2. 已知：如图，E 为$\triangle ABC$ 的边 BA 延长线上的一点，$AD \parallel BC$，$\angle EAD = \angle CAD = 60°$. 求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形.

3. 已知：如图，$AB = AC$，$\angle A = \frac{1}{2}\angle C$，$BD$ 是$\angle ABC$ 的平分线. 求证：$BD = BC$.



（第 3 题）



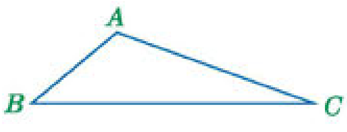
（第 4 题）

4. 如图，在$\triangle ABC$ 中，OB，OC 分别是$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线，$OM \parallel BC$，分别交 AB，AC 于点 M，N. 图中有几个等腰三角形？请写出来，并指出各等腰三角形的腰.

B 组

1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B = 40°$，$\angle C = 20°$. 请将这个三角形分成两个等腰三角形.

2. 你能用一张对边平行的纸条折出一个等腰三角形吗？请你试一试.



（第 1 题）

17.2 直角三角形

直角三角形是又一类特殊的三角形，它也应该有特殊的性质．直角三角形都有哪些性质呢？

我们知道，有一个角等于 $90°$ 的三角形叫做**直角三角形**．直角三角形可以用符号“Rt△”表示，如图17－2－1，直角三角形 ABC 可以表示为“Rt△ABC”．

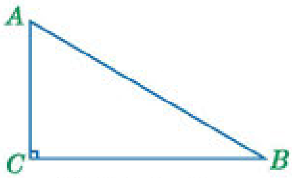


图 17－2－1

由三角形内角和定理，容易得到：

直角三角形的性质定理

直角三角形的两个锐角互余．

直角三角形性质定理的逆命题显然也是真命题．于是，有：

直角三角形的判定定理

如果一个三角形的两个角互余，那么这个三角形是直角三角形．

观察与思考

在一张半透明的纸上画出 Rt△ABC，$\angle C=90°$，如图 17－2－2(1)；将 $\angle B$ 折叠，使点 B 与点 C 重合，折痕为 EF，沿 BE 画出虚线 CE，如图 17－2－2(2)；将纸展开，如图 17－2－2(3)．

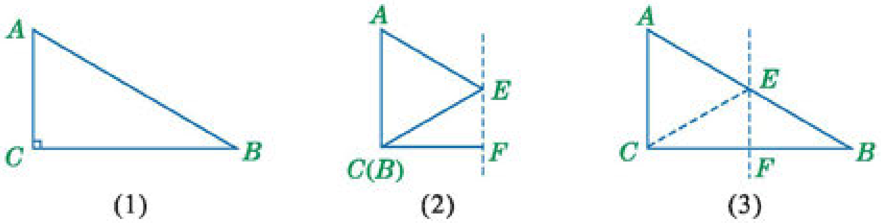


图 17－2－2

(1) $\angle ECF$ 与 $\angle B$ 有怎样的关系？线段 EC 与线段 EB 有怎样的关系？

(2) 由发现的上述关系以及 $\angle A+\angle B=\angle ACB$，$\angle ACE+\angle ECF=\angle ACB$，你能判断 $\angle ACE$ 与 $\angle A$ 的大小关系吗？线段 AE 与线段 CE 呢？从而你发现了什么结论？将你的结论与大家交流．

我们发现，$CE=AE=EB$，即 CE 是 AB 的中线，且 $CE=\frac{1}{2}AB$.

下面就来证明上面的“发现”.

已知：如图 17－2－3，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 为斜边 AB 上的中线.

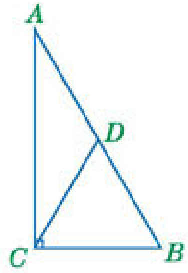


图 17－2－3

求证：$CD=\frac{1}{2}AB$.

证明：如图 17－2－4，过点 D，作 $DE/\!/BC$，交 AC 于点 E；作 $DF/\!/AC$，交 BC 于点 F.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle DFB$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle A=\angle FDB(\text{两直线平行，同位角相等}), \\ AD=DB(\text{中线的概念}), \\ \angle ADE=\angle B(\text{两直线平行，同位角相等}), \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AED\cong\triangle DFB(\mathrm{ASA})$.

$\therefore$ $AE=DF$，$ED=FB$.（全等三角形的对应边相等）

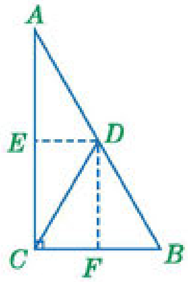


图 17－2－4

同理可证，$\triangle CDE\cong\triangle DCF$.

从而，$ED=FC$，$EC=FD$.

$\therefore$ $AE=EC$，$CF=FB$.（等量代换）

又$\because$ $DE\perp AC$，$DF\perp BC$，（两直线平行，同位角相等）

$\therefore$ DE 为 AC 的垂直平分线，DF 为 BC 的垂直平分线.

$\therefore$ $AD=CD=BD$(线段垂直平分线的性质定理).

$\therefore$ $CD=\frac{1}{2}AB$.

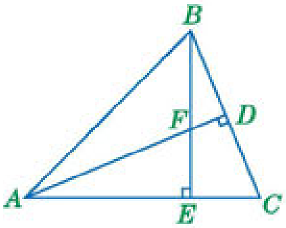
直角三角形的性质定理

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

做一做

证明：**在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半.**

练习



（第 2 题）

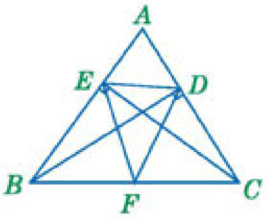
1. 求等腰直角三角形的两个锐角的度数.

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，AD，BE分别是边BC，AC上的高，AD，BE相交于点F，$AE=BE$. 求证：$\triangle AEF \cong \triangle BEC$.

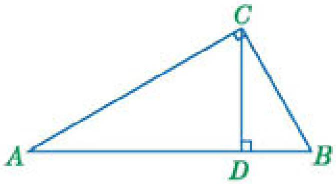
习题

A 组

1. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A=4\angle B$. 求$\angle A$，$\angle B$的度数.
2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，BD，CE分别是边AC，AB上的高，点F在BC上，$BF=CF$. 求证：$\triangle DEF$是等腰三角形.



（第 2 题）

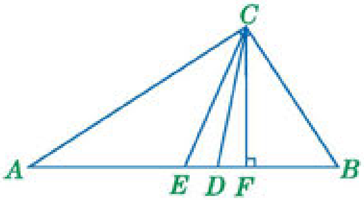


（第 3 题）

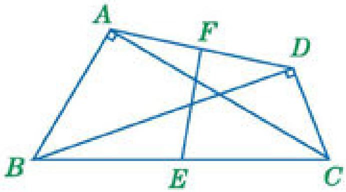
3. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，CD是边AB上的高，$\angle A=30°$. 求证：$BD=\dfrac{1}{4}AB$.

B 组

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，CD是$\angle ACB$的平分线，CE是边AB上的中线，CF是边AB上的高. 求证：$\angle ECD=\angle FCD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$\angle BAC=\angle BDC=90°$，点$E$在$BC$上，点$F$在$AD$上，$BE=EC$，$AF=FD$. 求证：$EF\perp AD$.

17.3 勾股定理

直角三角形的三边具有特殊的关系，刻画这种关系的命题就是著名的勾股定理.

一起探究

1. 如图 17－3－1(1)，每个小方格都是边长为 1 的小正方形，在所围成的△ABC 中，$\angle ACB=90°$. 图中以 AC，BC，AB 为边的正方形的面积分别是多少？这三个正方形的面积之间具有怎样的关系？

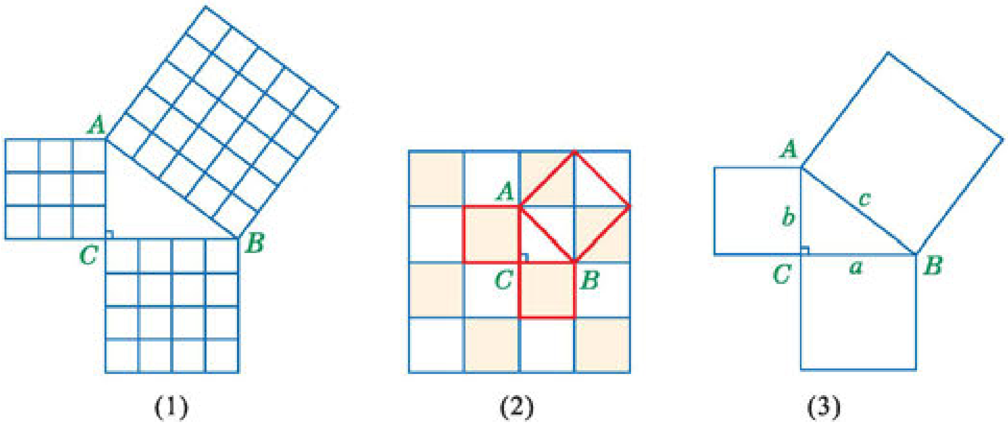


图 17－3－1

2. 图 17－3－1(2)是用大小相同的两种颜色的正方形地砖铺成的地面示意图，$\angle ACB=90°$. 分别以 AC，BC，AB 为边的三个正方形(红色框标出)的面积之间有怎样的关系？

3. 如图 17－3－1(3)，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，请你猜想：分别以 AC，BC，AB 为边的三个正方形的面积之间也具有图(1)和图(2)中三个正方形的面积之间所具有的关系吗？如果具有这种关系，请用图(3)中 Rt△ABC的边把这种关系表示出来.

通过探究可知：在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方.

试着做做

图 17－3－2 是用四个全等的直角三角形拼成的，其中，四边形 $ABDE$ 和四边形 $CFGH$ 都是正方形. 请你根据此图，利用它们之间的面积关系推导出：$a^2+b^2=c^2$.

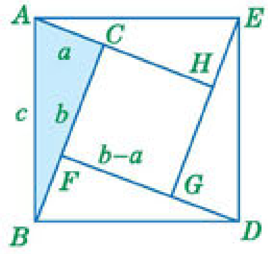


图 17－3－2

如图 17－3－3，我国古代把直角三角形较短的直角边叫做“勾”，较长的直角边叫做“股”，斜边叫做“弦”. 因此，直角三角形三边之间的关系称为**勾股定理**(gou-gu theorem).

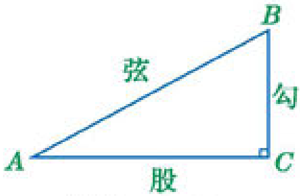


图 17－3－3

勾股定理

如果直角三角形两直角边分别为 a，b，斜边为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

勾股定理也可叙述为：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

做一做

请比较图 17－3－4(1)和(2)中两个正方形的面积，验证勾股定理.

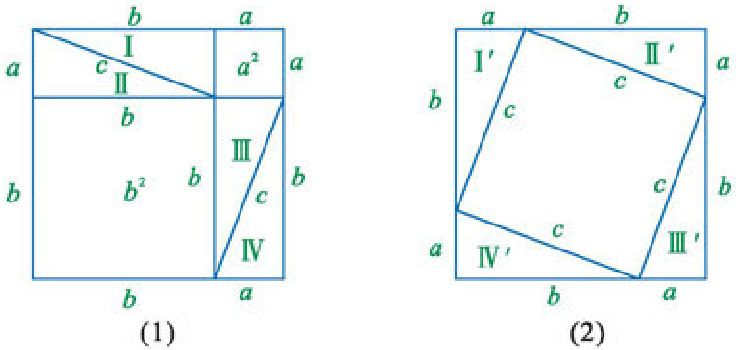


图 17－3－4

在直角三角形中，如果知道两条边的长，根据勾股定理，就可以求出第三边的长.

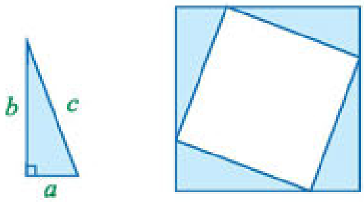
练习

1. 用四个图(1)所示的直角三角形拼成图(2). 在图(2)中，用“两个正方形的面积之差=四个直角三角形的面积之和”，验证勾股定理.

2. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$.

(1) 已知$a=5$，$c=7$，求b的值.

(2) 已知$b=60$，$c=61$，求a的值.



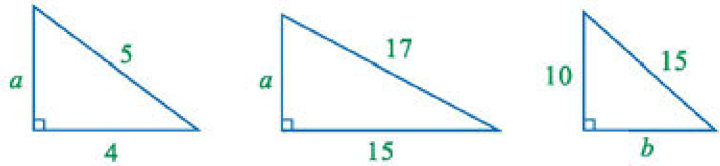
(1)　　(2)

（第1题）

习题

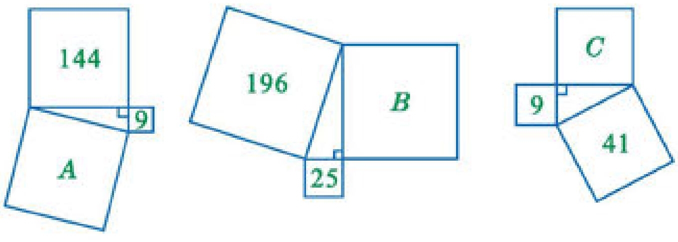
A 组

1. 求图中各直角三角形未知的边长.

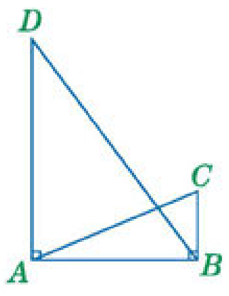


（第1题）

2. 图中数据分别表示其所在正方形的面积，请根据这些数据，分别求出未知的正方形面积A，B和C.



（第2题）

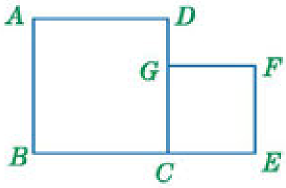


（第3题）

3. 如图，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$AC=13$，$BC=5$，$AD=16$. 求$BD$的长.

B 组

1. 已知一个直角三角形的斜边长为 $2n^2+2n+1(n>0)$，一条直角边长为 $2n^2+2n$. 求另一条直角边的长.
2. 如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 都是正方形，请你在图中再画出一个正方形，使它的面积等于已知的两个正方形的面积之和.



（第 2 题）

利用勾股定理，我们可以解决一些实际问题.

例 1 如图 17-3-5，为了测得湖边上点 A 和点 C 间的距离，一观测者在点 B 设立了一根标杆，使 $\angle ACB=90°$. 测得 $AB=200$ m，$BC=160$ m. 根据测量结果，求点 A 和点 C 间的距离.

解：在 $\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\angle ACB=90°$，

$\therefore$ $AC^2+BC^2=AB^2$（勾股定理）.

$\because$ $AB=200$ m，$BC=160$ m，

$\therefore$ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}$

$=\sqrt{200^2-160^2}$

$=120$(m).

答：点 A 和点 C 间的距离是 120 m.

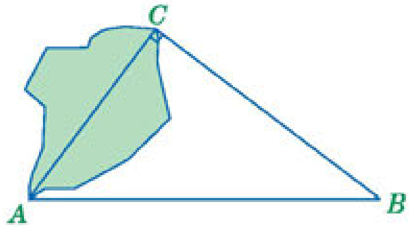


图 17-3-5

做一做

图 17-3-6 是某厂房屋顶的三角架的示意图. 已知 $AB=AC=17$ m，$AD\perp BC$，垂足为 D，$AD=8$ m. 求 BC 的长.

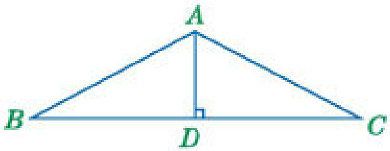


图 17-3-6

例 2 如图 17－3－7，在长为 50 mm，宽为 40 mm的长方形零件上有两个圆孔，与孔中心 A，B 相关的数据如图所示．求孔中心 A 和 B 间的距离．

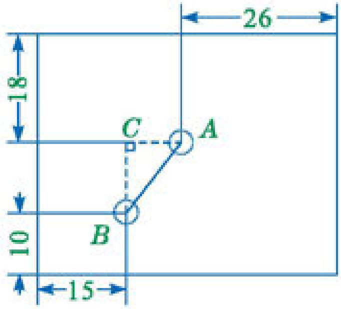


图 17－3－7

解：$\because$ $\triangle ABC$ 是直角三角形，

$\therefore$ $AB^2=AC^2+BC^2$．

$\because$ $AC=50-15-26=9(\text{mm})$，

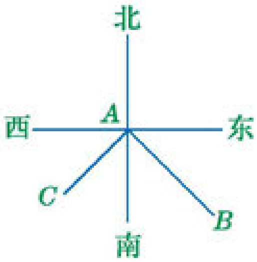
$BC=40-18-10=12(\text{mm})$，

$\therefore$ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15(\text{mm})$．

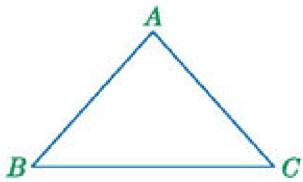
答：孔中心 A 和 B 间的距离是 15 mm．

练　习

1．如图，一艘轮船以 16 海里/时的速度离开港口 A 向东南方向航行，另一艘轮船同时以 12 海里/时的速度离开港口 A 向西南方向航行．它们离开港口 1.5 h 后，相距多远？



（第 1 题）



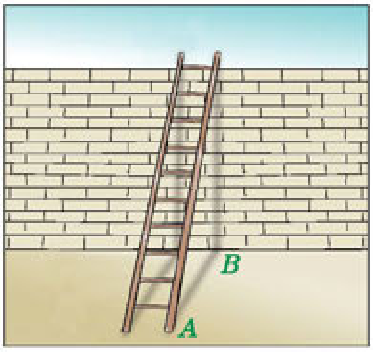
（第 2 题）

2．如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=12$，$BC=16$．求$\triangle ABC$ 的面积．

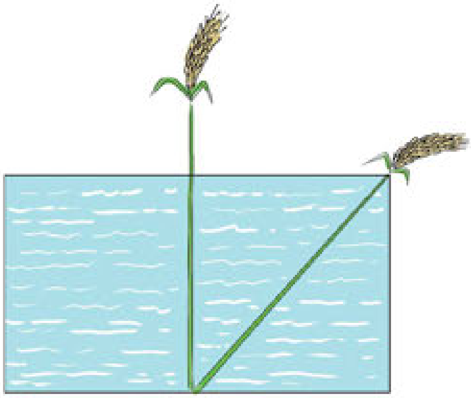
习　题

A 组

1．如图，一架梯子搭在墙上．已知梯子每两根横木之间的距离(包括一根横木的宽在内)以及梯子下端到第一根横木的距离都是 0.5 m，梯子下端 A 到墙脚 B 的距离是 3 m．求墙高．



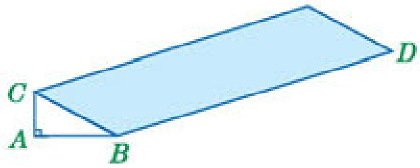
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 我国古代数学著作《九章算术》中记载着名为“池葭(jiā)出水”的一道趣题：有一个正方形的池子，边长为 1 丈，池中心有一株芦苇，露出水面 1 尺. 将芦苇拽至池边，它的末端刚好与水面相齐. 水有多深？芦苇有多长？求解此题.（“丈”和“尺”都是旧制长度单位，现已停止使用. 1 丈=10 尺，1 米=3 尺）

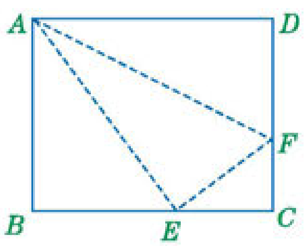
3. 如图所示是某学校存放学生自行车的车棚示意图，棚宽 $AB=3$ m，棚高 $AC=1.6$ m，棚长 $BD=15$ m. 求车棚顶的面积.



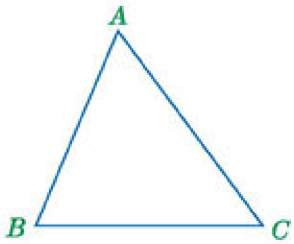
（第 3 题）

B 组

1. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=10$. 将长方形 $ABCD$ 沿直线 AF 折叠，使点 D 落在 BC 上的点 E 处. 求 CE 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在△ABC 中，$AB=13$，$BC=14$，$AC=15$. 求△ABC 的面积.

如果△ABC的三边a，b，c满足$a^2+b^2=c^2$，那么$\angle C$是直角吗？

在△ABC中，由边的关系$a^2+b^2=c^2$，推导出$\angle C$是直角较难做到．若作一个与△ABC全等的直角三角形，则可借助于全等的性质来说明$\angle C$是直角．

已知：如图17－3－8(1)，在△ABC中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，且$a^2+b^2=c^2$．

求证：$\angle C=90°$．

证明：如图17－3－8(2)．作△$A'B'C'$，使$\angle C'=90°$，$B'C'=a$，$C'A'=b$．由勾股定理，可得

$$A'B'^2=a^2+b^2.$$

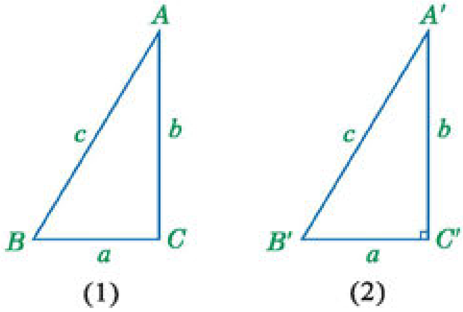


图17－3－8

∵ $a^2+b^2=c^2$，

∴ $A'B'^2=c^2$，

即 $A'B'=c$．

在△ABC和△$A'B'C'$中，

∵ $BC=B'C'=a$，$AC=A'C'=b$，$AB=A'B'=c$，

∴ △ABC≌△$A'B'C'$(SSS)．

∴ $\angle C=\angle C'=90°$(全等三角形的对应角相等)．

勾股定理的逆定理

如果三角形的三边a，b，c满足$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形．

例3 图17－3－9是一个机器零件示意图，$\angle ACD=90°$是这种零件合格的一项指标．现测得$AB=4$ cm，$BC=3$ cm，$CD=12$ cm，$AD=13$ cm，$\angle ABC=90°$．根据这些条件，能否知道$\angle ACD=90°$？

解：在△ABC中，

∵ $\angle ABC=90°$，

∴ $AC^2=AB^2+BC^2$(勾股定理)．

∵ $AB=4$，$BC=3$，

∴ $AC^2=3^2+4^2=5^2$．

$\therefore\ AC=5.$

在$\triangle ACD$中，

$\because\ AC=5,\ CD=12,$

$AD=13,$

$\therefore\ AC^2+CD^2=5^2+12^2=169,$

$AD^2=13^2=169.$

$\therefore\ AC^2+CD^2=AD^2.$

$\therefore\ \angle ACD=90^\circ$（勾股定理的逆定理）.

所以，根据这些条件，能知道$\angle ACD=90^\circ$.

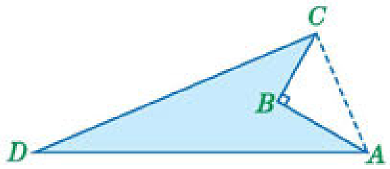


图 17-3-9

练 习

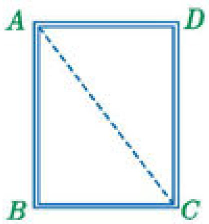
1. 下列每组数分别是一个三角形三条边的长，请你判断哪一组数对应的三角形是直角三角形，并说明理由.

(1) 0.5，1.2，1.3；

(2) 8，12，$4\sqrt{13}$；

(3) 4，5，6.

2. 工人师傅在制作铝合金窗框时，为保证窗框的四个角都是直角，有时采用如下的方法：如图，先量出框 AB 和框 BC 的长，再量出点 A 和点 C 间的距离，由此推断$\angle B$是不是直角. 这样做的依据是什么？



（第 2 题）

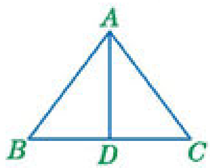
习 题

A 组

1. 判断三条边长分别为下列三个数的三角形是不是直角三角形，并说明理由.

(1) 8，15，17；　　(2) 20，21，29.

2. 如图，在$\triangle ABC$中，AD 是 BC 边上的中线. $BC=6$，$AD=4$，$AB=5$. 求证：$AB=AC$.



（第 2 题）

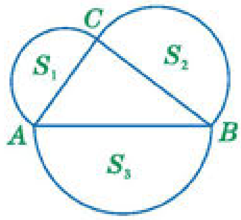
B 组

1. 判断以下列两组数为边长的三角形是不是直角三角形.

(1) $2m$，m^2-1，m^2+1；$(m>1)$

(2) $2mn$，m^2-n^2，m^2+n^2. $(m>n>0)$

2. 如图，分别以$\triangle ABC$的三边为直径向图形外作半圆，这三个半圆的面积分别为S_1，S_2，S_3，且$S_1+S_2=S_3$. $\triangle ABC$是不是直角三角形？说明理由.



（第 2 题）

读一读

勾股定理

在我国古代数学名著《周髀算经》的第一章中，记载着商高关于勾股形问题对周公的谈话："故折矩以为勾广三，股修四，径隅五."就是说，矩形以其对角相折所成的直角三角形，如果勾(短直角边)为 3，股(长直角边)为 4，那么弦(斜边)必定是 5. 这是勾股定理的一个特例. 因此，也有人称勾股定理为商高定理. 还有更古老的传说，讲述公元前 2000 年以前，中国的大禹就已经会用勾股定理来确定两地的地势差，并以此来治理洪水了. 我国三国时期的数学家赵爽在为《周髀算经》作注时，利用"弦图"巧妙地给出了勾股定理的证明. 这个证明是有史以来四百多种证明中最巧妙的证法之一.

公元前 6 世纪，古希腊数学家毕达哥拉斯发现，用黑、白两种颜色且大小相同的正方形石块铺成的路面，两个小正方形面积的和等于一个大正方形的面积(参照图 17－3－1(2)). 进而，又猜想这个关系对一般的直角三角形也是成立的，并证明了它. 因此，西方也称勾股定理为毕达哥拉斯定理.

17.4 直角三角形全等的判定

在一个直角三角形中，由勾股定理可知：如果两条边确定，那么第三边也随之确定. 由此可得出直角三角形全等的新的判定方法.

我们已经知道，三边对应相等的两个三角形全等. 由勾股定理可知，两边对应相等的两个直角三角形，其第三边一定相等. 从而，这两个直角三角形一定全等. 因此，斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等. 证明过程如下：

已知：如图 17－4－1，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90°$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

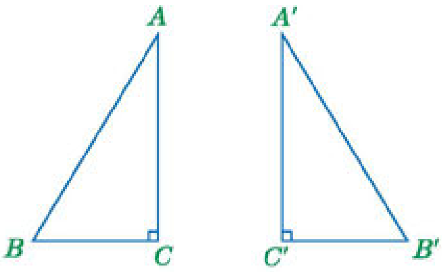


图 17－4－1

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

证明：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

∵ $\angle C=90°$，$\angle C'=90°$，

∴ $BC^2=AB^2-AC^2$，

$B'C'^2=A'B'^2-A'C'^2$（勾股定理）.

∵ $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，

∴ $BC=B'C'$.

∴ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（SSS）.

直角三角形全等的判定定理

斜边和直角边对应相等的两个直角三角形全等.

这个定理可以简写为“斜边、直角边”或“HL”.

例 1 已知一直角边和斜边，用尺规作直角三角形.

已知：如图 17－4－2，线段 a，c.

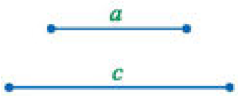


图 17－4－2

求作：$\triangle ABC$，使$\angle C=90°$，$BC=a$，$AB=c$.

分析：首先作出边 BC，由$\angle C$为直角可以作出另一直角边所在的射线，由 $AB=c$ 可以确定点 A.

作法：如图 17－4－3.

（1）作线段 $CB=a$.

（2）过点 C，作 $MC\perp CB$.

（3）以 B 为圆心，c 为半径画弧，交 CM 于点 A.

（4）连接 AB.

则$\triangle ABC$ 即为所求.

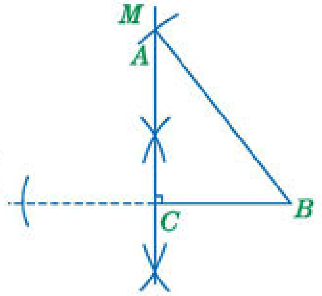


图 17－4－3

例 2 已知：如图 17－4－4，点 P 在$\angle AOB$ 的内部，$PC\perp OA$，$PD\perp OB$，垂足分别为 C，D，且 $PC=PD$.

求证：点 P 在$\angle AOB$ 的平分线上.

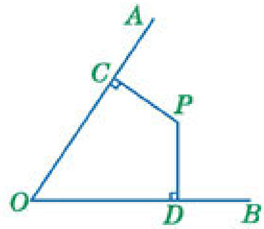


图 17－4－4

证明：如图 17－4－5，作射线 OP.

∵ $PC\perp OA$，$PD\perp OB$，

∴ $\angle PCO=\angle PDO=90°$.

在 Rt$\triangle OPC$ 和 Rt$\triangle OPD$ 中，

∵ $\begin{cases} PC=PD（已知），\\ OP=OP（公共边），\end{cases}$

∴ Rt$\triangle OPC\cong$Rt$\triangle OPD$(HL).

∴ $\angle POA=\angle POB$.

∴ OP 是$\angle AOB$ 的平分线，

即点 P 在$\angle AOB$ 的平分线上.

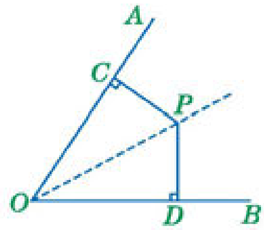


图 17－4－5

这样，我们就证明了角平分线性质定理的逆定理：到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

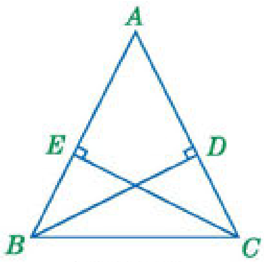
练　习

1．回答下列问题，并说明理由.

（1）有两条边分别相等的两个直角三角形是否全等？

（2）有一条边和一个锐角分别相等的两个直角三角形是否一定全等？

2．已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，垂足分别为 D，E，$BD=CE$．求证：$AB=AC$.

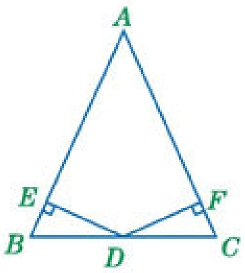


（第 2 题）

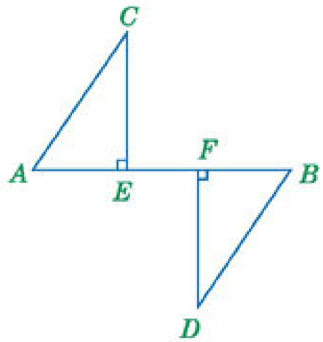
习 题

A 组

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，D为BC的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为E，F，$DE=DF$. 求证：$AB=AC$.



（第1题）



（第2题）

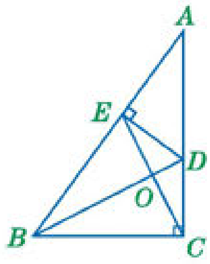
2. 已知：如图，$CE\perp AB$，$DF\perp AB$，垂足分别为E，F，$CE=DF$，$AC=BD$. 求证：

(1) $AE=BF$.

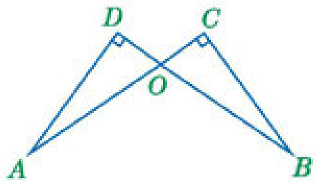
(2) $AC/\!/BD$.

B 组

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，D为AC上的一点，$DE\perp AB$，垂足为E，$BE=BC$，BD与CE相交于点O. 求证：$OE=OC$.



（第1题）



（第2题）

2. 已知：如图，$BD\perp AD$，$AC\perp BC$，垂足分别为D，C，且$AC=BD$. 求证：$AD=BC$.

17.5 反证法

在证明一些命题为真命题时，一般用直接证明的方法，但有时用间接的证明方法可能更方便. 反证法就是一种常用的间接证明方法.

在第九章中，我们已经知道“一个三角形中最多有一个直角”这个结论. 怎样证明它呢？

已知：如图 17－5－1，$\triangle ABC$.

求证：在$\triangle ABC$中，如果它含直角，那么它只能有一个直角.

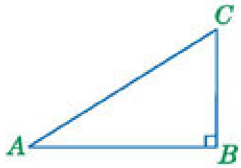


图 17－5－1

证明：假设$\triangle ABC$中有两个（或三个）直角，不妨设$\angle A=\angle B=90°$.

∵ $\angle A+\angle B=180°$,

∴ $\angle A+\angle B+\angle C>180°$.

这与“三角形的内角和等于 180°”相矛盾.

因此，三角形有两个（或三个）直角的假设是不成立的.

所以，如果三角形含直角，那么它只能有一个直角.

上面的证明过程，是先假设原命题结论不正确，然后从这个假设出发，经过逐步推理论证，最后推出与学过的三角形内角和定理相矛盾的结果. 因此，假设是错误的，原结论是正确的.

这种证明命题的方法叫做**反证法**(proof by contradiction). 反证法是一种间接证明的方法.

用反证法证明一个命题是真命题的一般步骤是：

第一步，假设命题的结论不成立.

第二步，从这个假设和其他已知条件出发，经过推理论证，得出与学过的概念、基本事实，已证明的定理、性质或题设条件相矛盾的结果.

第三步，由矛盾的结果，判定假设不成立，从而说明命题的结论是正确的.

例 1 用反证法证明平行线的性质定理一：两条平行线被第三条直线所截，同位角相等.

已知：如图 17－5－2．直线 $AB /\!/ CD$，直线 EF 分别与直线 AB，CD 交于点 G，H，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

证明：假设 $\angle 1 \neq \angle 2$.

过点 G 作直线 MN，使得 $\angle EGN=\angle 1$.

$\because$ $\angle EGN=\angle 1$，

$\therefore$ $MN /\!/ CD$（基本事实）.

又 $\because$ $AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore$ 过点 G，有两条不同的直线 AB 和 MN 都与直线 CD 平行.

这与“经过已知直线外一点，有且只有一条直线和已知直线平行”相矛盾.

$\therefore$ $\angle 1 \neq \angle 2$ 的假设是不成立的.

因此，$\angle 1=\angle 2$.

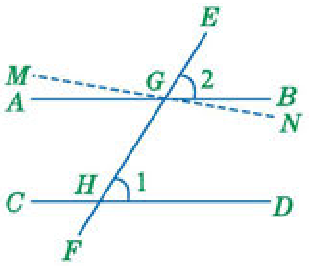


图 17－5－2

例 2 用反证法证明直角三角形全等的“斜边、直角边”定理.

已知：如图 17－5－3，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90°$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

证明：假设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等，即 $BC \neq B'C'$．不妨设 $BC<B'C'$．如图 17－5－3．在 $B'C'$ 上截取 $C'D=CB$，连接 $A'D$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'DC'$ 中，

$\because$ $AC=A'C'$，$\angle C=\angle C'$，$CB=C'D$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle A'DC'$(SAS).

$\therefore$ $AB=A'D$（全等三角形的对应边相等）.

$\because$ $AB=A'B'$（已知），

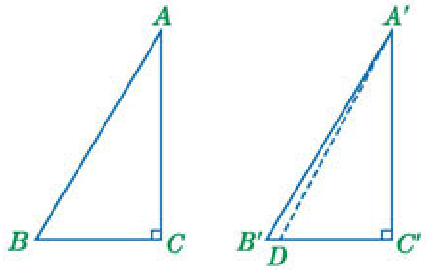


图 17－5－3

$\therefore$ $A'B'=A'D$(等量代换).

$\therefore$ $\angle B'=\angle A'DB'$(等边对等角).

$\therefore$ $\angle A'DB'<90°$(三角形的内角和定理),

即 $\angle C'<\angle A'DB'<90°$(三角形的外角大于和它不相邻的内角).

这与$\angle C'=90°$相矛盾.

因此，$BC\neq B'C'$的假设不成立，即$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不全等的假设不成立.

所以，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

做一做

用反证法证明：

(1) 如果 $a\cdot b=0$，那么 a，b 中至少有一个等于 0.

(2) 两条直线相交，有且只有一个交点.

练　习

已知：直线 $a\perp b$，直线 c 与 b 相交，且 c与b 不垂直. 用反证法证明：a 与 c 相交.

习　题

1. 已知：在$\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$. 用反证法证明：$\angle B\neq\angle C$.
2. 用反证法证明下列命题：

(1) 垂直于同一条直线的两条直线平行.

(2) 一个三角形中，最大的内角不小于 60°.

(3) 如果两条直线都平行于第三条直线，那么这两条直线也互相平行.

回顾与反思

一、知识结构

- 特殊三角形
  - 等腰三角形
    - 等腰三角形的性质
    - 等腰三角形的判定
  - 等边三角形
    - 等边三角形的性质
    - 等边三角形的判定
  - 直角三角形
    - 直角三角形的性质
    - 直角三角形的判定
    - 两个直角三角形全等的判定(HL)
    - 勾股定理
    - 勾股定理的逆定理

二、总结与反思

在本章中，我们学习的主要内容是等腰三角形的性质和判定、等边三角形的性质和判定、直角三角形的性质和判定、直角三角形全等的判定和勾股定理.

特殊三角形除了具有一般三角形的性质外，还具有它的特殊性. 三角形有边和角两类元素，边的特殊性决定了角的特殊性；反过来，角的特殊性也决定了边的特殊性. 如果设$\triangle ABC$中$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对应边分别为a，b，c，那么

$$b=c \Leftrightarrow \angle B=\angle C;$$

$$a=b=c \Leftrightarrow \angle A=\angle B=\angle C=60^\circ;$$

$$\angle A+\angle B=\angle C=90^\circ \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2.$$

$$\boxed{\text{直角三角形}} \underset{\text{由数到形}}{\overset{\text{由形到数}}{\rightleftarrows}} \boxed{a^2+b^2=c^2}$$

1. 等腰三角形.

等腰三角形具有轴对称性，底边的垂直平分线就是它的对称轴.

等腰三角形的等角对________________，等边对________________.

等边三角形有________条对称轴，它的三个内角________.

2. 直角三角形.

直角三角形的两个锐角________，斜边上的中线等于______________.

两锐角互余的三角形是________三角形.

勾股定理：____.

勾股定理的逆定理：____.

运用勾股定理可以解决已知直角三角形两边求第三边的问题，运用勾股定理的逆定理可以判定三角形是不是直角三角形.

判定两个直角三角形全等，除了“边边边”“边角边”“角边角”和“角角边”外，还有“斜边、直角边”定理.

3. 反证法是一种证明命题的方法，一般适用于直接证明有困难的命题.

三、注意事项

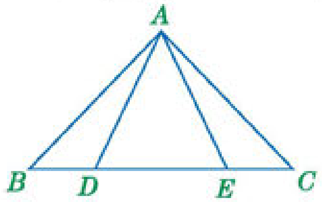
1. 等腰直角三角形同时具有等腰三角形和直角三角形的所有性质.

2. 已知三角形的三边，判定这个三角形是不是直角三角形，应先找出最大边，再计算最大边的平方是否等于另两边的平方和.

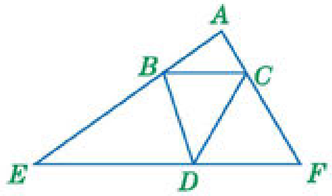
复 习 题

A 组

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D，E是BC边上的两点，且$BD=CE$. 求证：$AD=AE$.



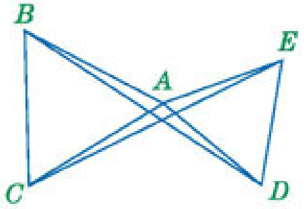
（第 1 题）



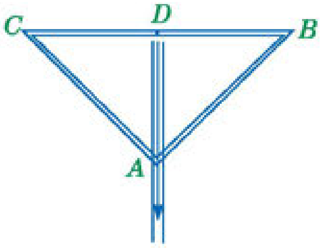
（第 2 题）

2. 已知：如图，$\triangle ABC$的$\angle ABC$和$\angle ACB$的外角的平分线交于点D，过点D作$EF\parallel BC$，分别交AB和AC的延长线于点E，F. 求证：$BE=DE$，$CF=DF$.

3. 已知：如图，$\triangle ABC$，$\triangle ADE$ 都是等边三角形. 求证：$\triangle ABD \cong \triangle ACE$.



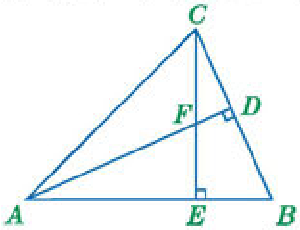
（第 3 题）



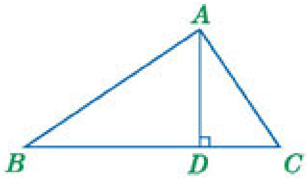
（第 4 题）

4. 如图所示是小明制作的一个简易的水平仪. 其中，$AC=AB$，D 为 BC 的中点，在点 D 处悬挂一个自然下垂的铅锤. 当点 A 恰好在铅垂线上时，BC 就处于水平位置. 请你说明理由.

5. 如图，在$\triangle ABC$ 中，边 BC，AB 上的高 AD，CE 交于点 F，$EF=EB$. 图中还有哪些相等的线段？请你写出来，并给出证明.



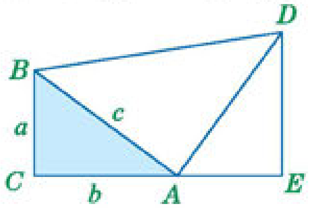
（第 5 题）



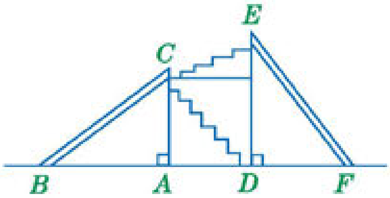
（第 6 题）

6. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$，垂足为 D，$\angle BAD=\angle C$. 求证：$\triangle ABC$ 为直角三角形.

7. 如图，以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 为直角边作等腰直角三角形 ABD，作 $DE \perp AC$，交 CA 的延长线于点 E. 利用面积证明勾股定理.



（第 7 题）



（第 8 题）

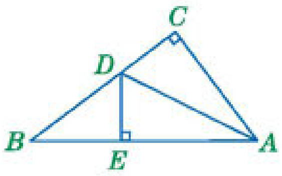
8. 已知：如图，BC 和 EF 是两个长度相等的滑梯，$AC=DF$. 求证：$\angle ABC+\angle DFE=90°$.

9. 已知直角三角形两直角边的长分别为 6 和 8，求斜边上的高.

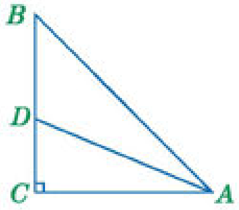
B 组

1. 如图，有一张直角三角形纸片，直角边 $AC=6$ cm，$BC=8$ cm. 现将直角

边 AC 沿$\angle CAB$的平分线 AD 折叠，使它落在斜边 AB 上，点 C 与点 E 重合，连接 DE. 求 CD 的长.



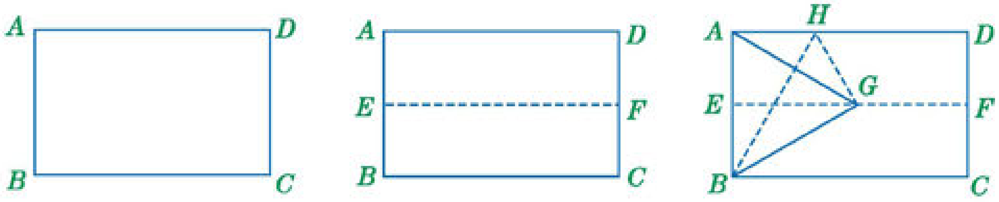
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=BC$，AD 是$\angle BAC$的平分线. 求证：$AC+CD=AB$.

3. 取一张长方形纸片 $ABCD$，如图(1)，按下列步骤进行操作：



(1)　　(2)　　(3)

（第 3 题）

(1) 将纸片对折，使较长的两边 BC，AD 重合，折痕为 EF，如图(2).

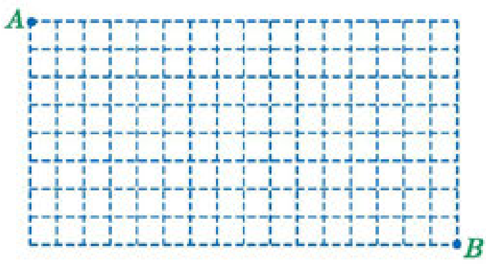
(2) 再折叠，使点 A 落在 EF 上的点 G 处，折痕为 BH，如图(3).

(3) 连接 AG，BG.

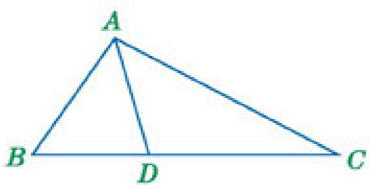
请证明$\triangle ABG$是等边三角形.

C 组

1. 如图，网格图中每一个小格都是边长为 1 的正方形. 请在网格图中找到一个格点 P，连接 PA 和 PB，使得 $PA=13$，$PB=5$.



（第 1 题）



（第 2 题）

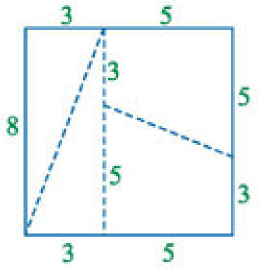
2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，AD 是$\angle BAC$的平分线. 求证：$AB+BD=AC$.

综合与实践一

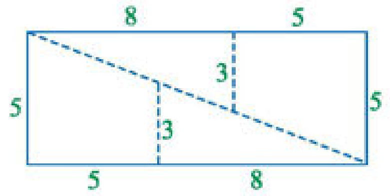
直觉的误导

一、问题

将一个边长为 8 cm 的正方形纸片按图(1)所示的虚线剪开，再把剪出的 4 块纸片按图(2)所示进行重新拼接.



(1)



(2)

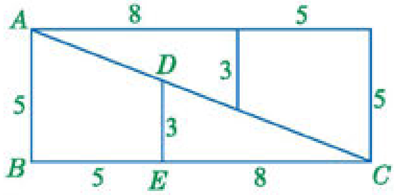
1. 图(1)中的正方形的面积是多少?

2. 凭观察，你认为图(2)中的图形是一个什么图形? 它的面积又是多少?

3. 图(1)和图(2)中的两个图形的面积是否相等? 若不相等，这可能吗? 为什么会出现这样的结果?

二、解决方案

1. 由观察，我们得出图(2)是一个长方形的结论，并由此得到原正方形的面积等于 64 cm^2，拼接后的长方形的面积等于 65 cm^2. 这是不可能的. 导致矛盾的原因，可能是长方形内有空隙.



(3)

2. 设法说明长方形内有空隙. 如图(3)，要说明长方形内有空隙，只需说明图形 $ABECD$ 构不成三角形即可，而要说明图形 $ABECD$ 构不成三角形，只需说明点 A，D，C 不在一条直线上即可.

三、可参考的知识与方法

1. 勾股定理.

2. 实数的大小比较.

3. 构成三角形的条件.

4. 供参考的数值：

$\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$，$\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$，$\sqrt{5^2+13^2}=\sqrt{194}$，

$(\sqrt{29}+\sqrt{73})^2=29+73+2\sqrt{29\times 73}=102+2\sqrt{2\,117}$，

$(\sqrt{194})^2=194$，$102+2\sqrt{2\,117}>102+2\sqrt{2\,116}=102+2\times 46=194$.

四、反思与交流

我的结果	
解决问题的主要过程与方法	
同学的意见和建议	
修改完善之处	
最终结果	
我的感悟	

综合与实践二

最优化种植方案

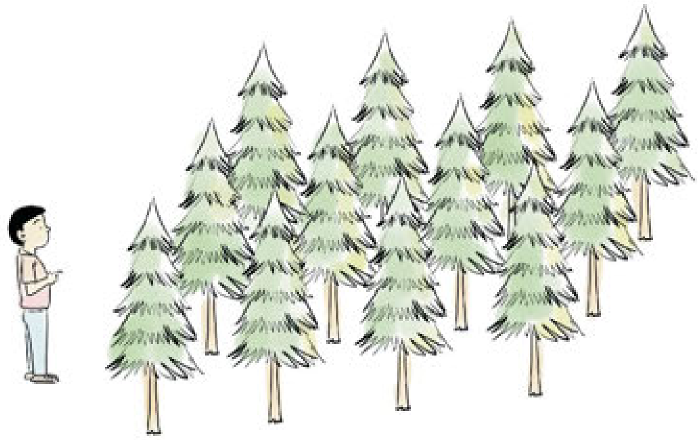
一、问题

有一块边长为 9.9 m 的正方形田地，计划栽种某种小树苗．要求如下：

1．树苗的株距不小于 1 m.

2．地边上可以栽种，但不能超过地边.

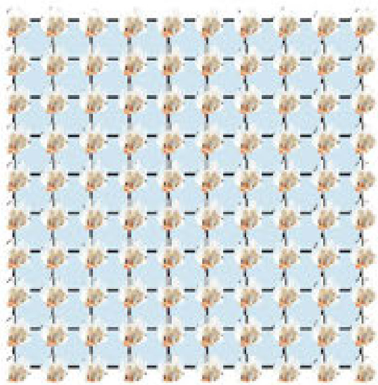
在符合栽种要求的条件下，如何确定栽种方案，可使所种树苗的株数最多(即最优种植方案)?



二、解决方案

1．将实际问题转化为数学问题．在纸上，用正方形表示正方形田地，距离为 1 cm 的长表示 1 m，用点表示栽种树苗的位置.

2．按"横为行，纵为列"画点，先进行试种，再检验你的栽种方案是否符合要求．如依行列，先按"等距"的方式栽种，示意图如下：



3. 如果你的方案尚有改进空间，那么对此方案再行修改.

4. 通过对不同方案的比较，从中选出最优方案.

5. 画出栽种的示意图，并进行说明.

三、可参考的数学知识与方法

1. 等腰三角形和等边三角形的性质及相关计算.

2. 直角三角形和勾股定理.

四、反思与交流

我的结果	
解决问题的主要过程与方法	
同学的意见和建议	
修改完善之处	
最终结果	
我的感悟	

编写后记

2001 年，国家正式启动了义务教育阶段的新一轮课程改革。有感于时代的召唤，我们这群研究和从事数学教育的工作者，满怀共同的梦想，成立了编写组，尝试进行义务教育七年级至九年级数学教科书的建设与编写。

2001 年 3 月份，编写组正式向教育部提出了编写立项申请。经专家评审，当年 12 月通过了立项。编写组从此开始编写工作。

2003 年 3 月，这套依据《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》编写的教科书，经全国中小学教材审定委员会审查通过，并公布于当年的订书目录中，作为义务教育课程标准实验教科书，供实验区选用。

2010 年 10 月，这套教科书开始修订准备。

2011 年 12 月，七年级上册和七年级下册的修订工作完成。

2012 年 3 月，按照《义务教育数学课程标准（2011 年版）》修订后的七年级上册和七年级下册，经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过。2013 年 3 月，八年级上、下册和九年级上、下册也顺利通过教育部基础教育课程教材专家工作委员会的审查。现在与大家见面的这本教科书就是修订后的八年级上册。

我们在编写教科书的过程中，得到了众多的专家、学者、数学教师的大力支持和热情帮助，特别是下面这些老师，更是我们应当感谢的：

王宝仓、杨志坚、孟庆林、张庆、仇岷、陈雪梅、石凌等，都是这套教科书原实验版本的编者，为教科书的编写作出了很大贡献；

刘璐、许艳秋、潘新学、王春丽、李春祥、魏元洪、张玲等，对这套教科书的实验给予了大力的支持和帮助；

郭荣华、王志宇、章巍、许春英、张燕飞、李永强、滕杰、张晓娴、牛翠英、杨金钗、刘建锋、靳春会、陈彦敏、徐在荣、王建华、张素平等，在这套教科书的修订过程中，参与讨论并提出了许多宝贵意见。

我们深知，教科书的编写和建设是一个长期的任务，更是一个不断完善、不断发展的过程。我们会继续努力，朝着精品教科书的建设目标奋力进取。我们也诚挚地希望广大的数学教师继续关注和支持这套教科书，使它越来越好。

编者

2013 年 3 月