绿色印刷产品

ISBN 978-7-5434-9538-8

定价: 7.40元

全国价格举报电话: 12358

义务教育教科书

数学

九年级 下册

河北教育出版社

教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

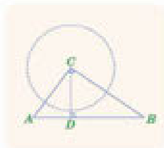
九年级 下册

河北教育出版社

义 务 教 育 教 科 书

数学

九年级 下册



河北教育出版社

收获在数学世界中

亲爱的同学们：

你们好！本学期是你们在初中的最后阶段，希望你们加倍珍惜，再接再厉，为初中学习生活画上圆满的句号。

当你们拿到这本九年级下册教科书时，以下这些栏目已陪伴了你们近三年的时光。

观察与思考：期待你们通过观察、感悟和思考，获得正确的数学认知。

一起探究：和大家一起探究并认识数学知识、思想和方法，这会使你们有更大的收获。

试着做做、做一做：动手试做，再做一做，这是学习数学不可缺少的。

大家谈谈：和同学们分享自己的学习成果，大家共同进步。

回顾与反思：把握整体内容，梳理知识脉络，总结思想方法，明确注意事项，这是不可或缺的学习环节。

在内容上，这本书共有四个篇章。

直线与圆的位置关系——探究图形与图形之间的位置关系是学习几何的主要任务之一。在这里，我们将探究点与圆、直线与圆的位置关系，从中会发现很多重要的性质和定理，学到很多重要的数学思想方法。

二次函数——它是又一类函数模型。二次函数的图像和性质可以用来解决许多现实问题，尤其是将它与一元二次方程结合起来，应用更加丰富广泛。

随机事件的概率——生活中几乎每时每刻都会遇到概率问题，具体事例不胜枚举。在这里，我们将初步学习和探究一些简单随机事件的概率，体会和掌握一些统计和概率的思想方法。

投影与视图——严格说来，这部分内容属于工程设计的范畴，因此也可以说它是几何的应用。从它自身的内容来说，也许知识并不太多，但重要的是它所体现的研究几何的一些基本思想方法，是其他内容不能代替的。学好它，对于我们全面理解和把握几何是十分有帮助的。

在初中阶段的最后一个学期，祝愿你们在数学上能有更大的进步，为今后的数学学习奠定坚实的基础。

你们的编者朋友

2014 年 9 月

目 录

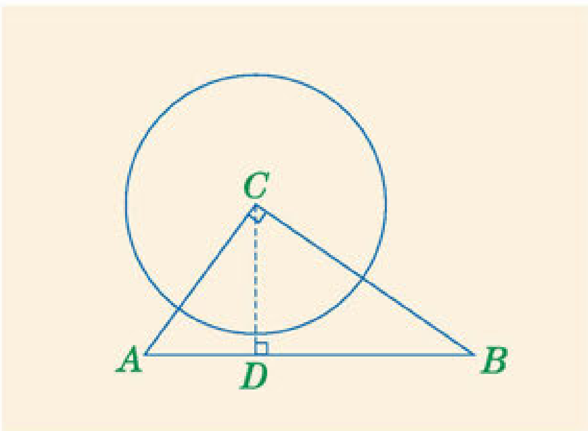
第二十九章

直线与圆的位置关系

在本章中，我们将学习

- 点与圆的位置关系
- 直线与圆的位置关系
- 切线的性质和判定
- 正多边形与圆

如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm. 当⊙C的半径变化时，⊙C与AB所在的直线有几种不同的位置关系？能用⊙C的半径与CD的数量关系描述这些位置关系吗？

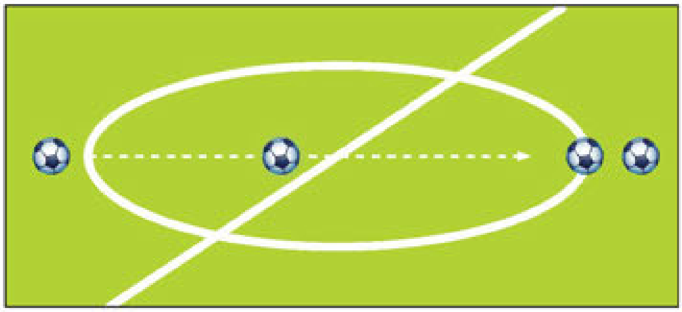


29.1 点与圆的位置关系

在平面上，点与直线有两种位置关系：点在直线上和点在直线外. 点与圆有怎样的位置关系呢？这就是本节所要探究的内容.

观察与思考

足球运动员踢出的足球在球场上滚动，在足球穿越中圈区(中间圆形区域)的过程中，可将足球看成一个点，这个点与圆具有怎样的位置关系？



在同一个平面内，点与圆有三种位置关系：点在圆外、点在圆上和点在圆内. 点 P 与 $\odot O$ 的位置关系如图 29－1－1 所示.

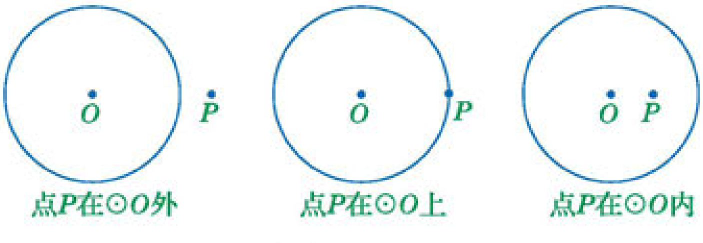
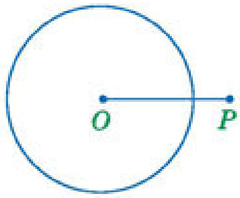
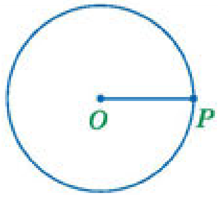
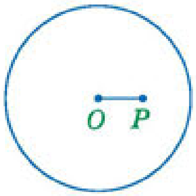


图 29－1－1

试着做做

已知点 P 和 $\odot O$，$\odot O$ 的半径为 r，点 P 与圆心 O 之间的距离为 d.

1. 请根据下列图形中点 P 与 $\odot O$ 的位置，在表格中填写 r 与 d 之间的数量关系.

语言描述	图形表示	r 与 d 之间的数量关系
点 P 在 $\odot O$ 外		
点 P 在 $\odot O$ 上		
点 P 在 $\odot O$ 内		

2. 当 d 与 r 分别满足条件 $d>r$，$d=r$，$d<r$ 时，请你指出点 P 与 $\odot O$ 的位置关系.

不难发现：

(1) 点 P 在 $\odot O$ 外 $\Leftrightarrow d>r$.

(2) 点 P 在 $\odot O$ 上 $\Leftrightarrow d=r$.

(3) 点 P 在 $\odot O$ 内 $\Leftrightarrow d<r$.

> 符号“$\Leftrightarrow$”读作“等价于”，它表示从左端可以推出右端，从右端也可以推出左端.

例 如图 29-1-2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=5$ cm，$BC=4$ cm，以点 A 为圆心、3 cm 为半径画圆，并判断：

(1) 点 C 与 $\odot A$ 的位置关系.

(2) 点 B 与 $\odot A$ 的位置关系.

(3) AB 的中点 D 与 $\odot A$ 的位置关系.

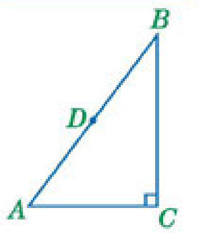


图 29-1-2

解：已知 $\odot A$ 的半径 $r=3$ cm.

(1) 因为 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3(\text{cm})=r$，所以点 C 在 $\odot A$ 上.

(2) 因为 $AB=5\text{ cm}>3\text{ cm}=r$，所以点 B 在 $\odot A$ 外.

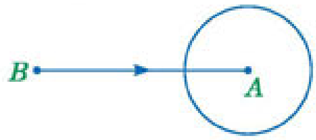
(3) 因为 $DA=\frac{1}{2}AB=2.5\text{ cm}<3\text{ cm}=r$，所以点 D 在 $\odot A$ 内.

练　习

1. 在直角坐标系中，以原点为圆心的⊙O 的半径为 5. 判断以下各点与⊙O 的位置关系：

$$A(4,\ 2),\ B(-3,\ 4),\ C(4,\ -4),\ D(1,\ 5).$$

2. 如图，某海域以点 A 为圆心、3 km 为半径的圆形区域为多暗礁的危险区，但渔业资源丰富. 渔船要从点 B 处前往点 A 处进行捕鱼，B，A 两点之间的距离是10 km. 如果渔船始终保持10 km/h的航速行驶，那么在什么时段内，渔船是安全的？渔船何时进入危险区域？

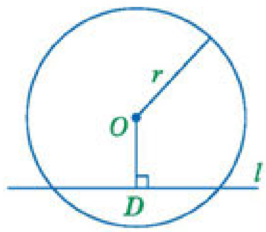


（第 2 题）

习　题

A　组

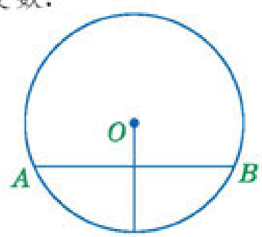
1. 如图，⊙O 的半径 $r=5$，圆心 O 到直线 l 的距离 $OD=3$. 在直线 l 上有 P，Q，R 三点，并且 $PD=4$，$QD>4$，$RD<4$. 点 P，Q，R 与圆的位置关系分别是怎样的？
2. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$. 现以点 A 为圆心画圆，使 B，C，D 三点至少有一点在圆内，且至少有一点在圆外. 试确定⊙A 的半径 r 的取值范围.



（第 1 题）

B　组

1. 已知 D 为线段 BC 的中点，以 BC 为直径画⊙D，再以 BC 为底边画等腰三角形 ABC.
   (1) 当点 A 在⊙D 上时，求等腰三角形 ABC 顶角的度数.
   (2) 当点 A 在⊙D 内时，求等腰三角形 ABC 顶角的取值范围.
   (3) 当点 A 在⊙D 外时，求等腰三角形 ABC 顶角的取值范围.
2. 如图，⊙O 的半径为 5，圆心 O 到弦 AB 的距离为 2. ⊙O 上到弦 AB 所在直线的距离为 2 的点有几个？



（第 2 题）

29.2 直线与圆的位置关系

直线与圆有怎样的位置关系？如何用数量关系来描述直线与圆的位置关系呢？

清晨，一轮红日从东方冉冉升起，太阳的轮廓就像一个运动的圆，从地平线下渐渐升到空中. 在此过程中，太阳轮廓与地平线有几种不同的位置关系呢？

一条直线与一个圆的位置关系，根据它们公共点的个数可分为三种情况：两个公共点、一个公共点、没有公共点.

当直线与圆有两个公共点时，我们称直线与圆**相交**；当直线与圆有唯一一个公共点时，称直线与圆**相切**，此时这个公共点叫做**切点**，这条直线叫做圆的**切线**；当直线与圆没有公共点时，称直线与圆**相离**.

直线 l 与⊙O 相交、相切和相离的三种位置关系，如图 29－2－1 所示.

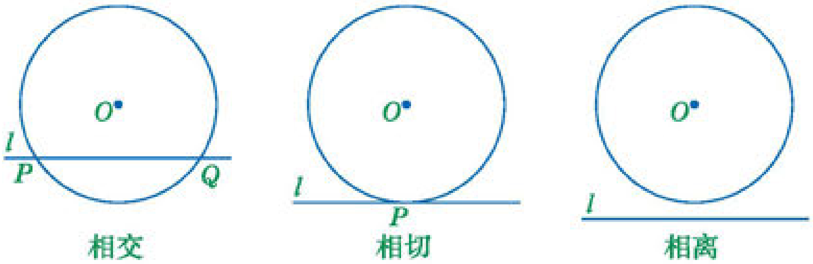


图 29－2－1

直线与圆的位置关系也可以用有关数量之间的关系来刻画.

观察与思考

如图 29－2－2，⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d.

（1）当 l 与⊙O 相交、相切或相离时，r 与 d 分别具有怎样的数量关系？

（2）当 $d<r$，$d=r$ 或 $d>r$ 时，l 与⊙O 分别具有怎样的位置关系？

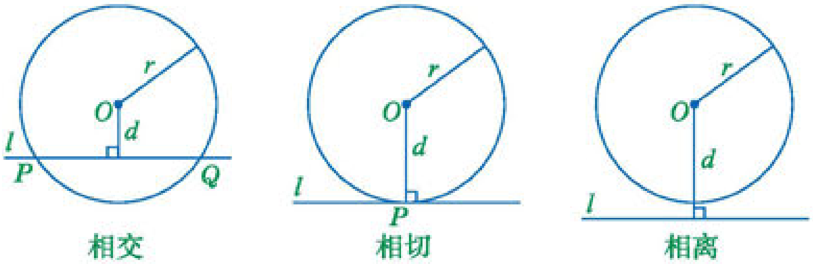


图 29－2－2

经观察，可得：

(1) 直线 l 与⊙O 相交⇔$d<r$.

(2) 直线 l 与⊙O 相切⇔$d=r$.

(3) 直线 l 与⊙O 相离⇔$d>r$.

例 如图 29－2－3，在 Rt△ABC 中，∠$C=90°$，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm. 以点 C 为圆心，2 cm，2.4 cm，3 cm 分别为半径画⊙C，斜边 AB 分别与⊙C 有怎样的位置关系？为什么？

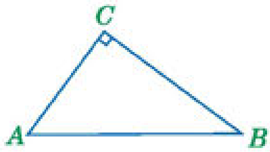


图 29－2－3

解：如图 29－2－4，过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D. 在 Rt△ABC 中，

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm}).$$

由三角形的面积公式，并整理，得

$$AC\cdot BC=AB\cdot CD.$$

从而

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\times 4}{5}=2.4(\text{cm}).$$

即圆心 C 到斜边 AB 的距离 $d=2.4$ cm.

当 $r=2$ cm 时，$d>r$，斜边 AB 与⊙C 相离.

当 $r=2.4$ cm 时，$d=r$，斜边 AB 与⊙C 相切.

当 $r=3$ cm 时，$d<r$，斜边 AB 与⊙C 相交.

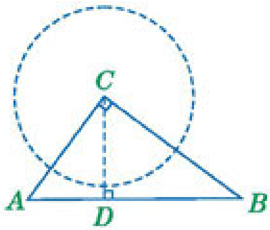
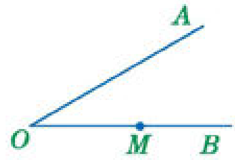


图 29－2－4

练 习

1. 已知一个圆的直径为 10. 如果这个圆的圆心到一条直线的距离分别等于 3，5，6，那么这条直线与这个圆的位置关系分别是怎样的？

2. 如图，$\angle AOB=30°$，M 为 OB 上一点，且 $OM=6$ cm. 以点 M 为圆心画圆，当其半径 r 分别等于 2 cm，3 cm，4 cm 时，直线 OA 与 $\odot M$ 分别有怎样的位置关系？为什么？

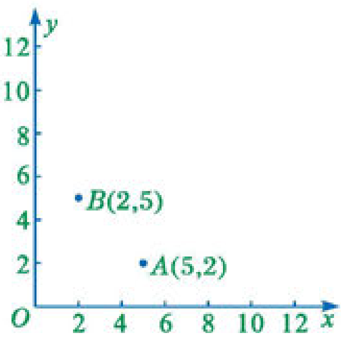


（第 2 题）

习题

A 组

1. 已知 $\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d. 如果直线 l 与 $\odot O$ 有公共点，那么 d 与 r 的数量关系是怎样的？
2. 如图，在直角坐标系中有 $A(5, 2)$ 和 $B(2, 5)$ 两点. 以点 A 为圆心、AB 的长为半径画圆. 试确定 x 轴和 y 轴分别与 $\odot A$ 的位置关系.



（第 2 题）

B 组

1. 在等腰三角形 ABC 中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC=4$. 试确定以点 A 为圆心、2 为半径的圆与 BC 的位置关系.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，O 为 AB 上一点，$OA=m$，$\odot O$ 的半径 $r=\frac{1}{2}$. 在下列条件下，分别求 m 的取值范围.

(1) AC 与 $\odot O$ 相离.

(2) AC 与 $\odot O$ 相切.

(3) AC 与 $\odot O$ 相交.

29.3 切线的性质和判定

我们知道，当直线与圆相切时，圆心到切线的距离等于圆的半径. 圆的切线还有哪些性质？如何判定一条直线是圆的切线呢？

在我们的生活中，经常会遇到直线与圆相切的情形. 如沿直线行驶的自行车车轮与车印，可以看成直线与圆相切的具体实例.

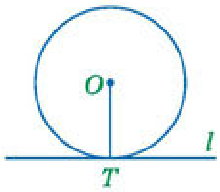


图 29－3－1

直线与圆相切时，还有哪些性质呢？

一起探究

如图 29－3－1，直线 l 为⊙O 的一条切线，切点为 T，OT 为半径. 在直线 l 上任取一点 P，连接 OP. 观察 OT 和 OP 的数量关系，猜想 OT 与切线 l 具有怎样的位置关系.

事实上，$OT \perp l$.

如图 29－3－2，假设 OT 与 l 不垂直. 过点 O 作 $OP \perp l$，垂足为 P. 因为 OP 是垂线段，所以 $OP < OT$(垂线段最短)，即圆心 O 到直线 l 的距离小于圆的半径. 由此得到直线 l 与⊙O 相交. 这和直线 l 与⊙O 相切矛盾，所以 $OT \perp l$.

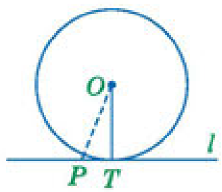


图 29－3－2

圆的切线垂直于过切点的半径.

观察与思考

如图 29－3－3，OA 为⊙O 的半径，直线 l 过点 A，且 $l \perp OA$.

（1）如果用 r 表示⊙O 半径的长，d 表示圆心 O 到直线 l 的距离，那么 r 与 d 具有怎样的数量关系呢？

（2）直线 l 是⊙O 的切线吗？

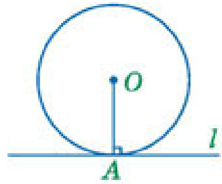


图 29－3－3

因为 $l \perp OA$，垂足为 A，所以 $d=r$，因此 l 与⊙O 相切.

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

做一做

如图 29－3－4，P 为⊙O 上的一点，请你用三角尺画出这个圆过点 P 的切线.

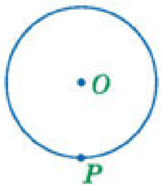
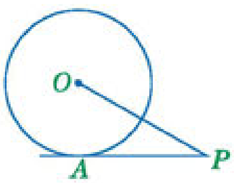


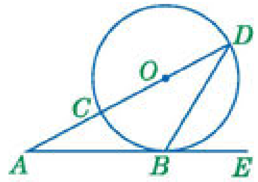
图 29－3－4

练　习

1. 如图，PA 为⊙O 的切线，切点为 A，$OP=2$，$\angle APO=30°$. 求⊙O 的半径.



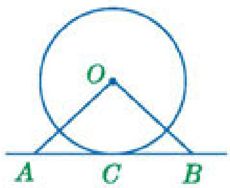
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，CD 为⊙O 的直径，点 A 在 DC 的延长线上，直线 AE 与⊙O 相切于点 B，$\angle A=28°$. 求$\angle DBE$ 的度数.

3. 如图，直线 AB 经过⊙O 上一点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$. 直线 AB 与⊙O 具有怎样的位置关系？请说明理由.

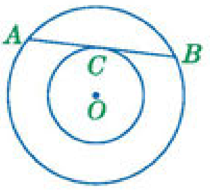


（第 3 题）

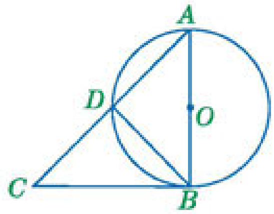
习 题

A 组

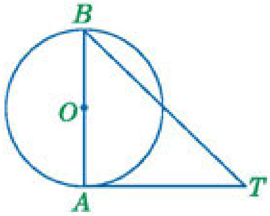
1. 如图，两个圆是以点 O 为圆心的同心圆，大圆的弦 AB 是小圆的切线，C 为切点. C 是 AB 的中点吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

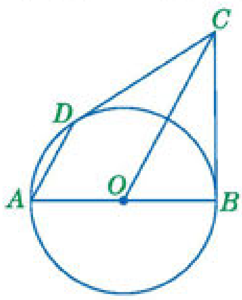


（第 3 题）

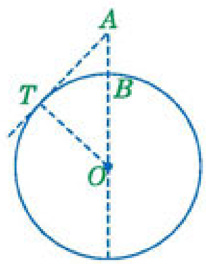
2. 如图，在$\odot O$ 中，AB 为直径，AD 为弦，过点 B 的切线与 AD 的延长线交于点 C，且 $AD=DC$. 求$\angle ABD$ 的度数.
3. 已知：如图，AB 为$\odot O$ 的直径，$\angle ABT=45^\circ$，$AT=AB$. 求证：AT 与$\odot O$ 相切.

B 组

1. 已知：如图，AB 为$\odot O$ 的直径，CB 为$\odot O$ 的切线，切点为 B，弦 AD 平行于 OC. 求证：CD 是$\odot O$ 的切线.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 上海东方明珠广播电视塔坐落于上海浦东新区陆家嘴，以其 468 m 的高度成为世界著名的高塔. 如图，$\odot O$ 表示过地球球心 O 的截面轮廓，点 A 表示该塔的顶端，AT 是信号覆盖半径. 请计算一下信号覆盖半径可以达到多少千米.（地球半径约为 6 370 km，结果精确到 0.1 km）

29.4 切线长定理*

过圆内一点的直线与圆不相切，过圆上一点只有一条圆的切线，过圆外一点有两条圆的切线．那么圆外的点到切点的两条线段之间具有怎样的数量关系呢？

一起探究

如图 29－4－1，已知⊙O 及圆外一点 P．如何过点 P 作出⊙O 的切线呢？

小亮是按下列步骤画图的：

①如图 29－4－2，连接 OP，以 OP 为直径作圆，交⊙O 于 A，B 两点．

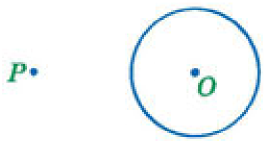


图 29－4－1

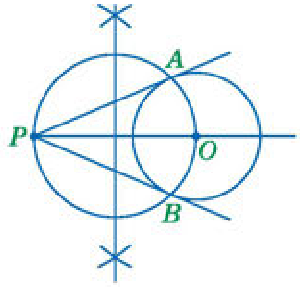


图 29－4－2

②连接 PA，PB．

小亮认为 PA，PB 就是⊙O 的切线．

(1) 你认为 PA，PB 是⊙O 的切线吗？若是，请说明理由．

(2) 猜想线段 PA，PB 具有怎样的数量关系．

事实上，PA，PB 都是⊙O 的切线，且 $PA=PB$．

下面我们证明：过圆外一点向圆所引的两条切线的长相等．

已知：如图 29－4－3，P 是⊙O 外一点，PA，PB 分别与⊙O 相切于点 A，B．

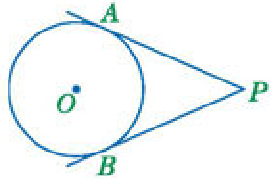


图 29－4－3

求证：$PA=PB$.

证明：如图 29-4-4，连接 OA，OB，OP.

在 Rt△OAP 和 Rt△OBP 中，

∵ PA，PB 分别与⊙O 相切于点 A，B，

∴ $PA\perp OA$，$PB\perp OB$.

∴ $\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$.

又∵ $OA=OB$，$OP=OP$，

∴ Rt△OAP≌Rt△OBP.

∴ $PA=PB$.

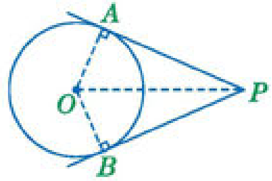


图 29-4-4

我们把线段 PA，PB 的长叫做点 P 到⊙O 的切线长.

切线长定理

过圆外一点所画的圆的两条切线的切线长相等.

在上面的探究过程中，还容易得到$\angle APO=\angle BPO$，即圆外一点与圆心的连线平分过这点的两条切线所形成的夹角.

例 1 已知：如图 29-4-5，过点 P 的两条直线分别与⊙O 相切于点 A，B，Q 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$上异于点 A，B 的任意一点，过点 Q 的切线分别与切线 PA，PB 相交于点 C，D.

求证：△PCD 的周长等于 $2PA$.

证明：∵ PA，PB，CD 都是⊙O 的切线，

∴ $PA=PB$，$CQ=CA$，$DQ=DB$.

∴ △PCD 的周长

$=PC+PD+CD$

$=PC+PD+CQ+DQ$

$=PC+PD+CA+DB$

$=PA+PB=2PA$.

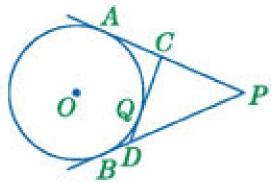


图 29-4-5

例 2 用尺规作圆，使其与已知三角形的三边都相切.

已知：如图 29-4-6，△ABC.

求作：⊙I，使它与△ABC 的三边都相切.

分析：要求作的圆与△ABC 的三边都相切，则这个圆的圆心到

$\triangle ABC$ 三边的距离都相等，所以圆心是三角形两个内角平分线的交点，圆的半径是交点到三角形一边的垂线段的长.

作法：如图 29－4－7.

（1）分别作$\angle B$ 和$\angle C$ 的平分线 BM 和 CN．设 BM 与 CN 交于点 I.

（2）过点 I 作 $ID \perp BC$，垂足为 D.

（3）以点 I 为圆心、ID 的长为半径作$\odot I$．$\odot I$ 即为所求.

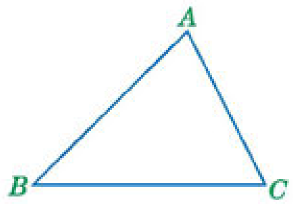


图 29－4－6

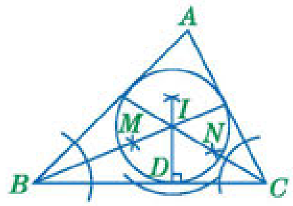


图 29－4－7

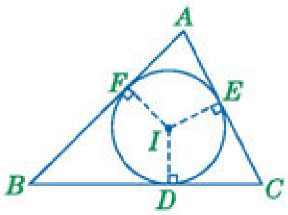


图 29－4－8

如图 29－4－8，作 $IE \perp AC$，$IF \perp AB$，垂足分别为 E，F．由作图过程可知 $ID=IE=IF$．因为$\odot I$ 的半径为 ID，所以$\odot I$ 与$\triangle ABC$ 的三边 AB，BC，AC 分别相切于点 F，D，E.

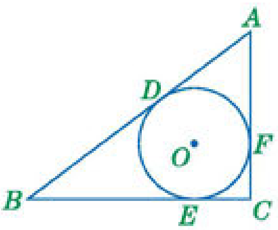
与三角形的三边都相切的圆有且只有一个，我们称这个圆为三角形的**内切圆**(incircle)，称这个圆的圆心为三角形的**内心**(incenter).

练　习

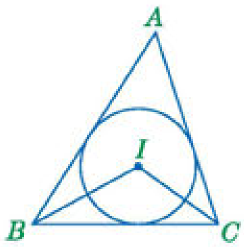
1．如图，$\odot O$ 为$\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D，E，F.

（1）图中有几对相等的线段？

（2）若 $AD=2$，$BE=3$，$CF=1$，求$\triangle ABC$ 的周长.



（第 1 题）



（第 2 题）

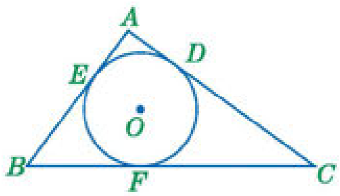
2．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=50°$，它的内心为 I．求$\angle BIC$ 的度数.

习 题

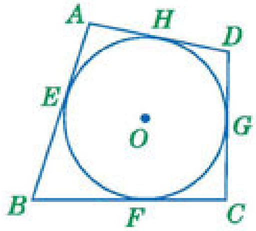
A 组

1. 已知$\odot O$的半径为3，点P与圆心O之间的距离为6. 过点P作$\odot O$的两条切线，求这两条切线的夹角和切线长.

2. 如图，$\odot O$为$\triangle ABC$的内切圆，切点分别为D，E，F，$AE=1$，$BF=2$，$CD=3$. 求$\odot O$的半径.



（第2题）



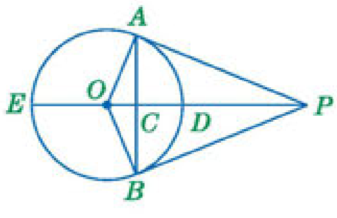
（第3题）

3. 已知：如图，四边形$ABCD$的四边AB，BC，CD，DA分别与$\odot O$相切于点E，F，G，H. 求证：$AB+CD=AD+BC$.

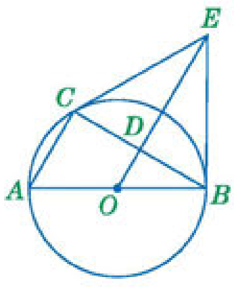
4. 如图，PA，PB是$\odot O$的两条切线，A，B是切点，直线OP交$\odot O$于点D，E，交AB于点C.

   (1) 请写出图中所有具有垂直关系的直线.

   (2) 请写出图中所有的全等三角形.



（第4题）

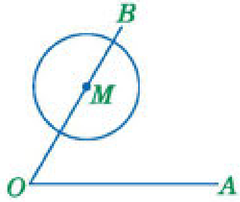


（第5题）

5. 已知：如图，AB为$\odot O$的直径，E为$\odot O$外一点，EB，EC分别切$\odot O$于点B，C. 求证：$AC\parallel OE$.

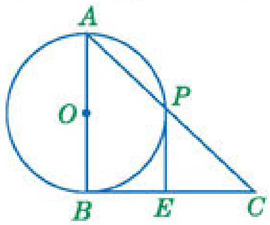
B 组

1. 如图，$\angle AOB=60^\circ$，M 为射线 OB 上的一点，$OM=4$，以点 M 为圆心、2 为半径画圆. 若 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转，则当 OA 和 $\odot M$ 相切时，OA 所旋转的角度是多少？



（第 1 题）

2. 已知：如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，BC 切 $\odot O$ 于点 B，AC 交 $\odot O$ 于点 P，点 E 在 BC 上，并且 PE 切 $\odot O$ 于点 P. 求证：$CE=BE$.



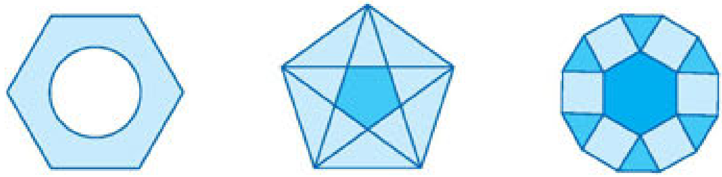
（第 2 题）

29.5 正多边形与圆

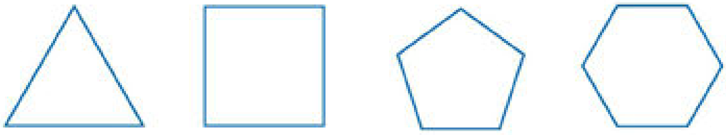
等边三角形、正方形的各边相等，各角也相等．现实中还有许多各边相等、各角也相等的多边形，这类多边形与圆有着密切的联系．

观察与思考

1．观察下面的三幅图片，说说图片中各包含哪些多边形．



2．量一量下列图形的边和角，概括它们的共同特点．



各边相等、各角也相等的多边形叫做**正多边形**(regular polygon)．

把一个圆 $n(n\geqslant3)$ 等分，顺次连接各等分点，就得到一个正 n 边形．我们把这个正 n 边形叫做**圆的内接正 n 边形**，这个圆叫做**正 n 边形的外接圆**，外接圆的圆心叫做正多边形的**中心**，外接圆的半径叫做正多边形的**半径**，每一边所对的圆心角叫做正多边形的**中心角**，中心到边的距离叫做正多边形的**边心距**．

如图 29－5－1，正六边形 $ABCDEF$ 为 $\odot O$ 的内接正六边形，$\odot O$ 为正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆．点 O 为这个正六边形的中心，OA 为半径，$\angle AOB$ 为中心角，OH 的长为边心距．

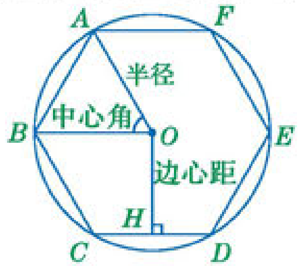


图 29－5－1

大家谈谈

1．只要将圆 n（$n\geqslant3$）等分，就可以画出正 n 边形．如何将一个圆 n 等分呢？

2. 正五边形的中心角是多少度？如何将圆五等分，画正五边形呢？

通过等分圆心角，可以画正多边形. 对于一些特殊情形，可以用尺规作圆的内接正多边形.

例 1 用尺规作圆的内接正方形.

已知：如图 29 - 5 - 2，⊙O.

求作：正方形 $ABCD$ 内接于⊙O.

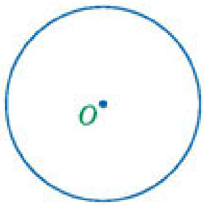


图 29 - 5 - 2

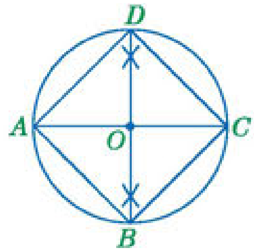


图 29 - 5 - 3

作法：(1) 如图 29 - 5 - 3，作两条互相垂直的直径 AC，BD.

(2) 顺次连接 AB，BC，CD，DA.

由作图过程可知，四个中心角都是 $90°$，所以 $AB=BC=CD=DA$. 因为 AC，BD 都是直径，所以 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90°$.

即四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接正方形.

试着做做

1. 计算圆的内接正六边形的中心角度数，指出正六边形的边长和外接圆半径之间的数量关系.

2. 用尺规作圆的内接正六边形.（保留作图痕迹，不要求写出作法）

例 2 如图 29 - 5 - 4，$\triangle ABC$ 为⊙O 的内接正三角形. 如果⊙O 的半径为 r，求这个正三角形的边长和边心距.

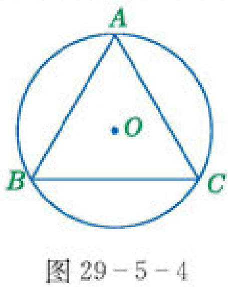


图 29 - 5 - 4

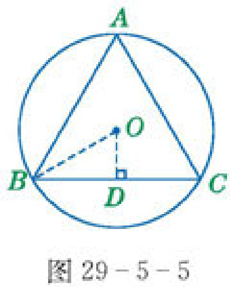


图 29 - 5 - 5

解：如图 29－5－5，连接 OB，过点 O 作 $OD\perp BC$，垂足为 D.

在 Rt$\triangle OBD$ 中，

$\because\ \angle OBD=30^\circ$，$OB=r$，

$\therefore\ OD=\dfrac{r}{2}$，$BD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$，$BC=2BD=\sqrt{3}r$.

即这个正三角形的边长为$\sqrt{3}r$，边心距为$\dfrac{r}{2}$.

练　习

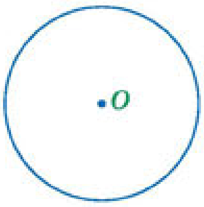
1. 对于三角形，如果三边相等，那么它的三个角一定相等. 反过来，如果三个角相等，那么它的三边也一定相等. 对于其他多边形，如果去掉“各边相等”和“各角相等”两个条件中的任意一个，还能保证这个多边形是正多边形吗？请举例说明.

2. 一个正多边形的边心距与边长的比为$\dfrac{1}{2}$，求这个正多边形的边数.

习　题

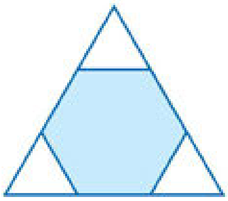
A　组

1. 如图，在$\odot O$ 中，用量角器画出一个正五边形，再画出这个正五边形的各条对角线.



（第 1 题）

2. 如图，正三角形的边长为 6，剪去三个角后成为一个正六边形. 求这个正六边形的面积.



（第 2 题）

3. 求半径为 2 的圆的内接正三角形，正方形，正六边形的边长、边心距、中心角和面积. 将结果填写在下表中：

圆的内接正多边形	边长	边心距	中心角	面积
正三角形				
正方形				
正六边形				

B 组

1. 要在圆形铁片上截出边长为 15 cm 的正方形铁片，所选用的圆形铁片的直径最小应为多少厘米？
2. 用 36 m 长的篱笆在空地上围出一块场地，现有以下四种设计方案：正三角形、正方形、正六边形和圆. 通过计算说明哪种场地的面积最大.

回顾与反思

一、知识结构

- 圆
  - 点与圆的位置关系
    - $d<r\Leftrightarrow$点在圆内
    - $d=r\Leftrightarrow$点在圆上
    - $d>r\Leftrightarrow$点在圆外
  - 直线与圆的位置关系
    - $d<r\Leftrightarrow$直线与圆相交
    - $d=r\Leftrightarrow$直线与圆相切
    - $d>r\Leftrightarrow$直线与圆相离
      - 切线的性质
      - 切线的判定
      - 切线长定理
  - 正多边形与圆
    - 圆的内接正多边形
    - 用尺规作圆的内接正方形和正六边形

二、总结与反思

在本章中，我们研究了点与圆、直线与圆的位置关系. 在此基础上，我们还探究了圆的切线的性质和判定、切线长定理以及正多边形与圆的关系.

在研究点与圆、直线与圆位置关系的过程中，我们利用了分类的思想. 用圆心到点或直线的距离 d 与半径 r 之间的数量关系揭示点或直线与圆的位置关系，这体现了数形结合的思想.

1. 点与圆、直线与圆的位置关系.

点与圆、直线与圆分别有三种位置关系，它们是如何分类的？怎样用圆心到点或直线的距离 d 与半径 r 之间的数量关系来描述这三种位置关系？请填写下表.

点与圆的位置关系	圆心到点的距离 d 与半径 r 的关系	直线与圆的位置关系	公共点的个数	圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系
		相交		
		相切		
		相离		

2. 切线的性质和判定.

切线的性质：圆的切线垂直于过切点的半径.

切线的判定：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

切线长定理：过圆外一点所画的圆的两条切线的切线长相等.

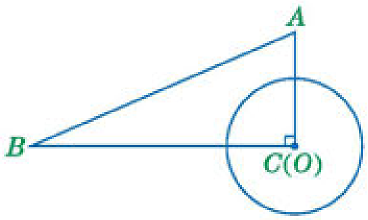
3. 正多边形与圆.

通过等分圆可以画圆的内接正多边形. 回顾用尺规作圆的内接正方形和内接正六边形的方法，思考如何作圆的内接正八边形和正十二边形.

复习题

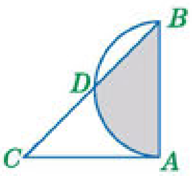
A 组

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=3$，$AC=4$，以点 C 为圆心、BC 长为半径画圆，请你判断点 A 与⊙C 的位置关系.
2. 若 Rt△ABC 的斜边 $AB=6$，直角边 $AC=3$，则圆心为点 C，半径分别为 2，4 的两个圆与 AB 具有怎样的位置关系？当半径为多长时，AB 与⊙C相切？
3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=5$，$BC=12$，⊙O 的圆心在线段 CA 上，且它的半径为 3.

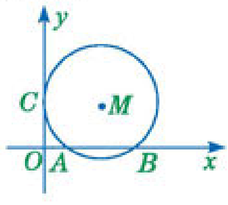


（第 3 题）

   (1) 当点 O 与点 C 重合时，⊙O 与直线 AB 具有怎样的位置关系？
   (2) 如果⊙O 沿直线 CA 移动（点 O 沿直线 CA 移动），当 OC 等于多少时，⊙O 与直线 AB 相切？
4. 计算等边三角形的外接圆面积与内切圆面积的比值.
5. 如图，在△ABC 中，$AB=AC=4$，以 AB 为直径的圆与 AC 相切于点 A，与 BC 相交于点 D. 求图中阴影部分的面积.

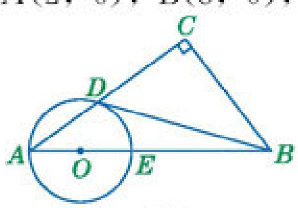


（第 5 题）



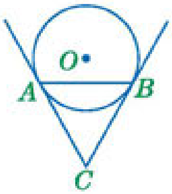
（第 6 题）

6. 如图，在平面直角坐标系中，⊙M 与 x 轴相交于点 $A(2, 0)$，$B(8, 0)$，与 y 轴相切于点 C. 求圆心 M 的坐标.
7. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心、OA 长为半径的圆与 AC，AB 分别交于点 D，E，且 $\angle CBD=\angle A$. 判断直线 BD 与⊙O 的位置关系，并证明你的结论.

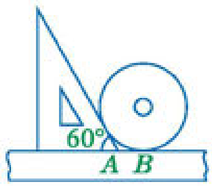


（第 7 题）

8. 一个圆球放置在“V”形架上，如图所示为其截面示意图. 在图中，CA 和 CB 都是$\odot O$ 的切线，切点分别是 A，B. 如果$\odot O$ 的半径为$2\sqrt{3}$ cm，且 $AB=6$ cm，求$\angle ACB$ 的度数.



（第 8 题）



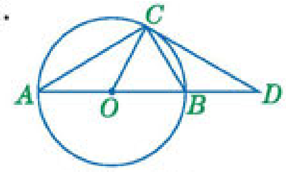
（第 9 题）

9. 如图所示，小明同学测量一个光盘的直径，他将直尺、光盘和三角尺放置于桌面上，并量出 $AB=3.5$ cm. 求此光盘的直径.

10. 已知：如图，AB 为$\odot O$ 的直径，C 为$\odot O$ 上一点，点 D 在 AB 的延长线上，且$\angle DCB=\angle A$.

（1）求证：CD 为$\odot O$ 的切线.

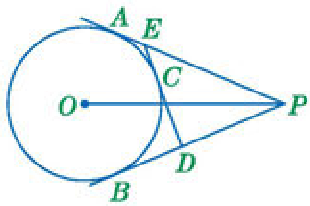
（2）若$\angle D=30^\circ$，$BD=10$ cm，求$\odot O$ 的半径.



（第 10 题）

B 组

1. 如图，PA，PB，DE 分别切$\odot O$ 于点 A，B，C. 若$\odot O$ 的半径为5 cm，PO 的长为 13 cm，则$\triangle PDE$ 的周长是多少厘米？

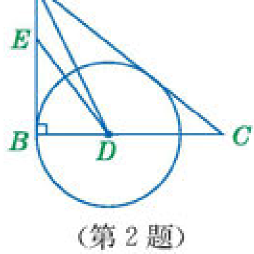


（第 1 题）

2. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D，E 为 AB 上的一点，$DE=DC$，以点 D 为圆心、DB 长为半径作$\odot D$. 求证：

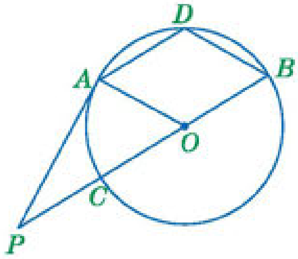
（1）AC 为$\odot D$ 的切线.

（2）$AB+EB=AC$.



（第 2 题）

3. 已知：如图，A，B 为$\odot O$ 上的两点，$\angle AOB=120°$，D 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$的中点.

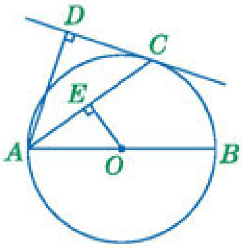


（第 3 题）

(1) 求证：四边形 $AOBD$ 为菱形.

(2) 延长线段 BO 至点 P，交$\odot O$ 于另一点 C，且 $BP=3OB$，连接 AP. 求证：AP 为$\odot O$ 的切线.

4. 已知：如图，AB 为$\odot O$ 的直径，C 为$\odot O$ 上一点，AD 和过点 C 的切线互相垂直，垂足为 D.



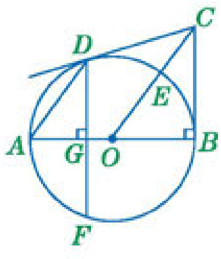
（第 4 题）

(1) 求证：AC 平分$\angle DAB$.

(2) 过点 O 作线段 AC 的垂线 OE，垂足为 E. 若 $CD=4$，$AC=4\sqrt{5}$，求垂线段 OE 的长.

C 组

1. 已知：如图，AB 为$\odot O$ 的直径，$BC\perp AB$，垂足为 B，连接 OC，交$\odot O$ 于点E，D 为$\odot O$ 上一点，$AD /\!/ OC$，$DF\perp AB$，垂足为 G.



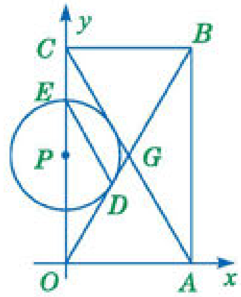
（第 1 题）

(1) 求证：E 为$\overset{\frown}{BD}$的中点.

(2) 求证：CD 为$\odot O$ 的切线.

(3) 若 $\sin\angle BAD=\frac{4}{5}$，$\odot O$ 的半径为 5，求 DF 的长.

2. 如图，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，G 为两条对角线的交点，顶点 A 在 x 轴上，顶点 C 的坐标为(0，6)，$\angle COB=30^\circ$. 以 OC 上一点 P 为圆心、$\frac{3}{2}$ 为半径的圆恰与 OB 相切于点 D.



(第 2 题)

(1) 求点 P 的坐标.

(2) 判断 AC 和 $\odot P$ 的位置关系，并说明理由.

(3) 已知 E 为 $\odot P$ 与 PC 的交点，求 DE 的长.

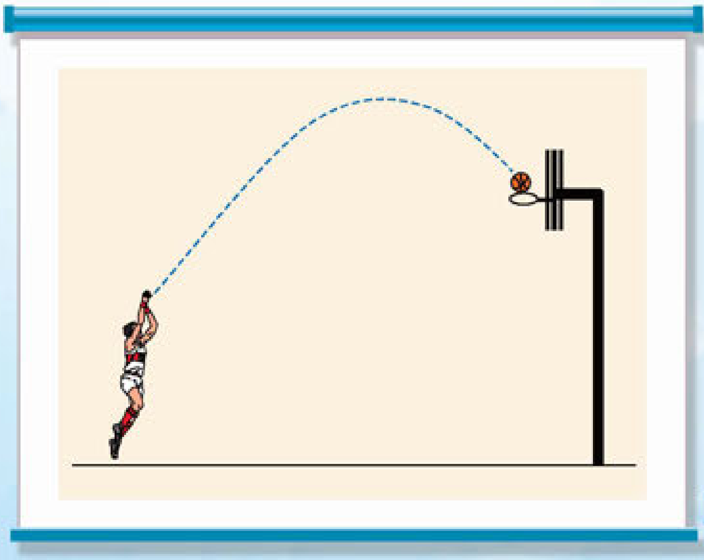
第三十章

二次函数

在本章中，我们将学习

- 二次函数的概念
- 二次函数的图像和性质
- 二次函数的应用
- 二次函数与一元二次方程的关系

如果一种函数的图像就如投出的篮球在空中划过的一条抛物线，我们一定会觉得很有趣. 这种函数就是二次函数.



30.1 二次函数

我们已经学习了一次函数和反比例函数，现在，我们来学习二次函数.

一起探究

1. 如图 30－1－1 所示，用规格相同的正方形瓷砖铺成矩形地面，其中，横向瓷砖比纵向瓷砖每排多 5 块，矩形地面最外面一圈为灰色瓷砖，其余部分全为白色瓷砖. 设纵向每排有 n 块瓷砖.

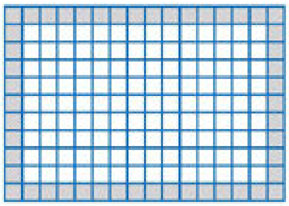


图 30－1－1

(1) 设灰色瓷砖的总数为 y 块.

①用含 n 的代数式表示 y，则 $y=$________.

②y 与 n 具有怎样的函数关系?

(2) 设白色瓷砖的总数为 z 块.

①用含 n 的代数式表示 z，则 $z=$________.

②z 是 n 的函数吗? 说说理由.

2. 某企业今年第一季度的产值为 80 万元，预计产值的季平均增长率为 x.

(1) 设第二季度的产值为 y 万元，则 $y=$________________.

设第三季度的产值为 z 万元，则 $z=$________________.

(2) y，z 都是 x 的函数吗? 它们的表达式有什么不同?

上面遇到的函数

$$z=n^2+n-6,\quad z=80x^2+160x+80,$$

它们的表达式都是自变量的二次式.

一般地，如果两个变量 x 和 y 之间的函数关系可以表示成 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 是常数，且 $a\neq0$)，那么称 y 为 x 的**二次函数**(quadratic function). 其中，a 叫做二次项系数，b 叫做一次项系数，c 叫做常数项.

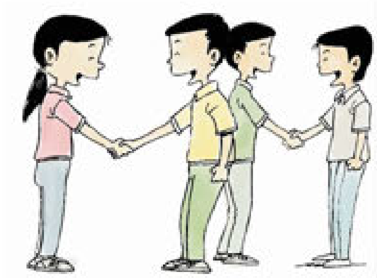
上面得到的两个函数，以及 $y=x^2+2x+\frac{1}{4}$，$y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}x+5$，$y=3x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2+6$ 等，都是二次函数.

大家谈谈

1. 请分别指出上面出现的二次函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

2. 谈谈一次函数、反比例函数、二次函数有什么不同.

做一做



新学期开学，全班同学见面时相互亲切握手问候. 设全班有 m 名同学，每两人之间都握手一次，用 y 表示全班同学握手的总次数.

（1）请用含 m 的代数式表示 y，说明 y 是 m 的二次函数，指出该函数中对应的 a，b，c 的值.

（2）若全班有 45 名同学，则这样握手的总次数是多少？

练　习

1. 指出下列二次函数中相应的 a，b，c 的值：

（1）$y=-5x^2+3x+1$；（2）$y=(x+1)^2-1$；（3）$y=-x^2+6$.

2. 一块长方形草地，它的长比宽多 2 m. 设它的长为 x m，面积为 y m^2，请写出用 x 表示 y 的函数表达式. y 是 x 的二次函数吗？若是，请指出相应的 a，b，c 的值.

习　题

A　组

1. 在下列函数中，哪些是二次函数？

(1) $y=x^2$；　　　　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+1$；

(3) $y=\frac{1}{x}$；　　　　(4) $y=x+2$；

(5) $y=x^2-2x+2$；　　　　(6) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$.

2. 正方形的边长为 x cm，面积为 y cm^2，请写出用 x 表示 y 的函数表达式. y 是 x 的二次函数吗?

3. 一台机器原价是 120 万元，每年的折旧率为 x，两年后这台机器的价格为 y 万元. 求 y 关于 x 的函数表达式.

B 组

1. 求出与 x 值对应的函数值：

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2+2x+3$									
$y=-2x^2-4x+9$									

2. 对于二次函数 $y=x^2+2x+3$，有几个 x 的值与 $y=27$ 相对应? 请你利用方程求出这样的 x 的值.

30.2 二次函数的图像和性质

像研究一次函数和反比例函数的性质那样，我们将先画二次函数的图像，再借助此图像来探究二次函数的性质.

二次函数 $y=ax^2$ 的图像和性质

已知二次函数 $y=x^2$，我们可按下列步骤画出它的图像.

（1）列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

（2）描点：如图 30－2－1，在直角坐标系中描出相应的点.

（3）连线：如图 30－2－2，用平滑曲线顺次连接各点，得到二次函数 $y=x^2$ 的图像.

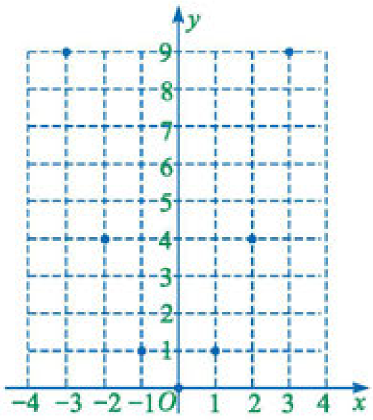


图 30－2－1

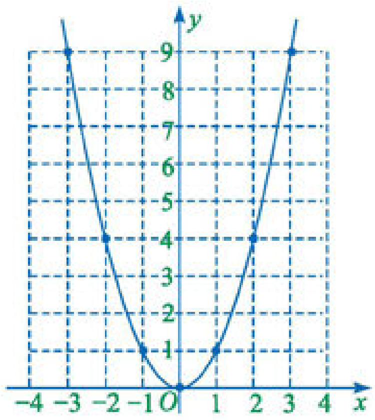


图 30－2－2

观察与思考

观察二次函数 $y=x^2$ 的图像，回答下列问题：

（1）若将 $y=x^2$ 的图像沿着 y 轴对折，y 轴两侧的部分能够完全重合吗？$y=x^2$ 的图像是不是轴对称图形？如果是，那么它的对称轴是哪条直线？

（2）$y=x^2$ 的图像有最低点吗？如果有，那么最低点的坐标是什么？

做一做

1．在如图 30－2－3 所示的直角坐标系中，已画出了 $y=x^2$ 的图像，请再画出函数 $y=-x^2$ 的图像.

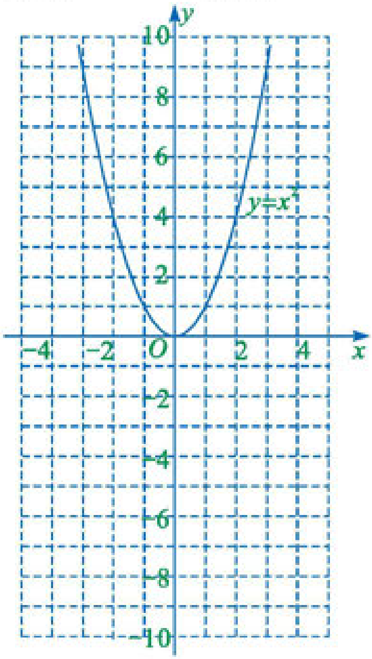


图 30－2－3

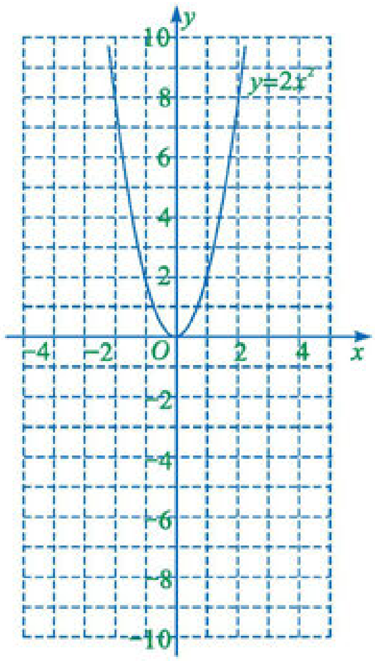


图 30－2－4

2．在如图 30－2－4 所示的直角坐标系中，已画出了 $y=2x^2$ 的图像，请再画出函数 $y=-2x^2$ 的图像.

大家谈谈

对比函数 $y=x^2$ 与 $y=-x^2$，$y=2x^2$ 与 $y=-2x^2$ 的图像，就二次函数 $y=ax^2$ 回答以下问题：

（1）图像的开口方向和它的最高(或最低)点与 a 的符号具有怎样的关系？

（2）图像是不是轴对称图形？如果是，那么它的对称轴是哪条直线？

（3）根据图像，说明 y 的值随 x 的值增大而变化的情况.

二次函数 $y=ax^2$ 的图像是一条关于 y 轴对称的曲线，这样的曲线叫做**抛物线**(parabola)，曲线的对称轴叫做抛物线的对称轴，抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的**顶点**(vertex).

二次函数 $y=ax^2$ 的图像和性质

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=ax^2$ $(a>0)$	向上	y 轴	原点 $(0,\ 0)$	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大	有最低点 $(0,\ 0)$. 当 $x=0$ 时，$y_{最小}=0$
$y=ax^2$ $(a<0)$	向下	y 轴	原点 $(0,\ 0)$	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小	有最高点 $(0,\ 0)$. 当 $x=0$ 时，$y_{最大}=0$

为方便起见，我们把 y 轴记为直线 $x=0$，把过点 $(a,\ 0)$ 且垂直于 x 轴的直线记为直线 $x=a$；把 x 轴记为直线 $y=0$，把过点 $(0,\ b)$ 且垂直于 y 轴的直线记为直线 $y=b$. 二次函数 $y=ax^2$ 也称为抛物线 $y=ax^2$.

练习

1. 不画图像，请指出函数 $y=-9x^2$ 图像的开口方向、对称轴、顶点坐标以及最高(或最低)点.

2. 先指出抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标，然后再画出它的图像.

习题

A 组

1. 指出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(1) $y=6x^2$；　(2) $y=-4x^2$；　(3) $y=\frac{3}{4}x^2$；　(4) $y=-\frac{1}{5}x^2$.

2. 分别指出抛物线 $y=3x^2$ 与 $y=-3x^2$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标和 y 随 x 的增大而变化的情况，并在同一直角坐标系中画出它们的图像.

B 组

1. 对于抛物线 $y=2x^2$ 和 $y=x^2$，你认为它们有哪些不同点？
2. 如果抛物线 $y=ax^2$ 经过点 $M(2,\ 5)$，请求出 a 的值，并指出该抛物线的开口方向.

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质

观察与思考

小颖在同一个直角坐标系中，对二次函数 $y=x^2$，$y=(x-3)^2$ 和 $y=(x+2)^2$ 采用如下列表、描点、连线的方式，画出了它们的图像.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
x	…	0	1	2	3	4	5	6	…
$y=(x-3)^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
x	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	…
$y=(x+2)^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

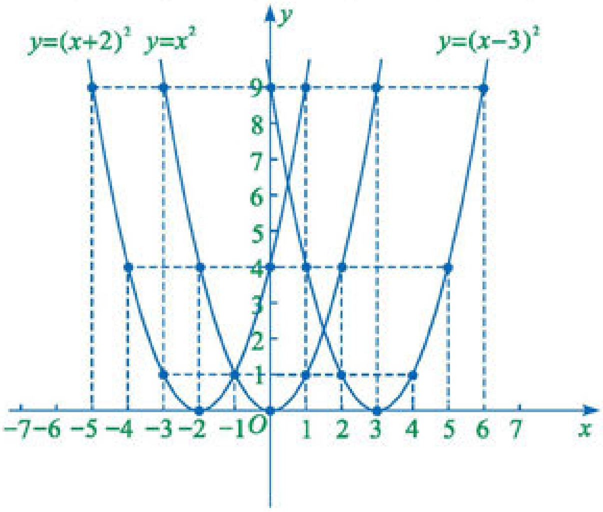


图 30-2-5

从形状上看，二次函数 $y=(x-3)^2$，$y=(x+2)^2$ 的图像与二次函数 $y=x^2$ 的图像是完全相同的，但它们的位置不同.

（1）$y=(x-3)^2$ 的图像可以由 $y=x^2$ 的图像沿什么方向平移多少个单位长度得到?

（2）$y=(x+2)^2$ 的图像可以由 $y=x^2$ 的图像沿什么方向平移多少个单位长度得到?

可以知道，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图像可以由 $y=ax^2$ 的图像作如下平移得到：当 $h>0$ 时，向右平移 h 个单位长度；当 $h<0$ 时，向左平移 $|h|$ 个单位长度.

做一做

由函数 $y=-2x^2$ 的图像，分别经过怎样的平移可以得到下列函数的图像？

（1）$y=-2(x+1)^2$；（2）$y=-2(x-4)^2$；（3）$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.

一起探究

在图 30-2-6 中的直角坐标系中，已经画出了二次函数 $y=(x-3)^2$ 的图像.

（1）请你在该坐标系中再画出二次函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像.

（2）试着说明函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像可以分别由函数 $y=x^2$ 的图像经过怎样的平移得到.

（3）请写出函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像的对称轴与顶点坐标.

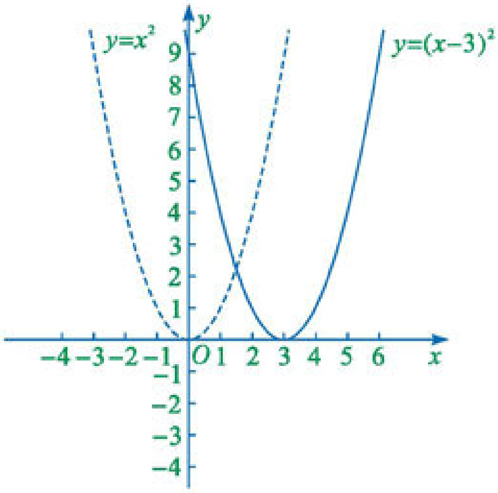


图 30-2-6

大家谈谈

（1）请说出将二次函数 $y=-2x^2$ 的图像，分别经过怎样的平移，可以得到函数 $y=-2(x-4)^2+6$ 和 $y=-2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-4$ 的图像.

(2) 指出函数 $y=-2(x-4)^2+6$ 和 $y=-2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-4$ 的图像的对称轴与顶点坐标，并说明是如何确定的.

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=a(x-h)^2+k$ $(a>0)$	向上	直线 $x=h$	(h, k)	当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大	有最低点 (h, k)，当 $x=h$ 时，$y_{最小}=k$
$y=a(x-h)^2+k$ $(a<0)$	向下	直线 $x=h$	(h, k)	当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小	有最高点 (h, k)，当 $x=h$ 时，$y_{最大}=k$

例 1 (1) 求函数 $y=-\frac{1}{2}(x+5)^2-2$ 的最大(或最小)值.

(2) 先将函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像向左平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，请写出平移后得到的图像的函数表达式.

解：(1) 由 $-\frac{1}{2}<0$，知该函数有最大值.

当 $x=-5$ 时，函数取得最大值，$y_{最大}=-2$.

(2) 平移后得到的图像的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-3$.

练　习

填表：

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=-(x-2)^2+\frac{2}{3}$					
$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-3$					
$y=-(x+1)^2+5$					

习 题

A 组

1. 怎样才能由 $y=2x^2$ 的图像经过平移得到函数 $y=2(x-6)^2+7$ 的图像呢？

   小亮说：先向左平移 6 个单位长度，再向上平移 7 个单位长度.

   小明说：先向右平移 6 个单位长度，再向上平移 7 个单位长度.

   小惠说：先向上平移 7 个单位长度，再向右平移 6 个单位长度.

   你同意谁的说法？请说明理由.

2. 指出下列函数图像的开口方向、对称轴、顶点坐标和函数的最大(或最小)值.

   (1) $y=0.6x^2$，$y=0.6(x-2)^2$，$y=0.6(x-2)^2+4$.

   (2) $y=-\frac{3}{4}x^2$，$y=-\frac{3}{4}(x+4)^2$，$y=-\frac{3}{4}(x+4)^2-4$.

   (3) $y=-6x^2$，$y=-6(x-\frac{2}{3})^2$，$y=-6(x-\frac{2}{3})^2+8$.

B 组

1. 将二次函数 $y=-8x^2$ 的图像向左平移 3 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，求新图像的函数表达式.

2. 指出下列每组两个二次函数图像之间的位置关系.

   (1) $y=3x^2$ 与 $y=-3x^2$.

   (2) $y=3(x+2)^2$ 与 $y=3(x-2)^2$.

   (3) $y=-2(x+1)^2+2$ 与 $y=-2(x+1)^2-2$.

   (4) $y=(x-2)^2+1$ 与 $y=(x+2)^2-1$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像和性质

每个二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 都可以通过配方化成

$$y=a(x-h)^2+k$$

的形式：

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\
&= a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}
$$

其中，$h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

做一做

对比二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质，填写二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的相关问题的表格：

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$					
$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$					

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，它的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$.

若 $a>0$，则抛物线开口向上，顶点坐标是$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=-\frac{b}{2a}$时，y 取得最小值，且 $y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

若 $a<0$，则抛物线开口向下，顶点坐标是$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\frac{b}{2a}$时，y 取得最大值，且 $y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

为方便起见，我们把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 也称为抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

例 2 求抛物线 $y=x^2+2x-1$ 的对称轴和顶点坐标，并画出它的图像.

解：$\because$ $y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x=-1$，顶点坐标为$(-1, -2)$.

(1) 列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
$y=x^2+2x-1$	…	2	-1	-2	-1	2	…

(2) 在直角坐标系中，描点，连线，即得二次函数 $y=x^2+2x-1$ 的图像，如图 30-2-7.

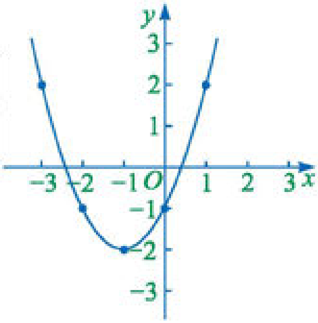


图 30-2-7

例 3 根据下列条件，确定抛物线的表达式.

(1) 抛物线 $y=-2x^2+px+q$ 的顶点坐标为$(-3, 5)$.

(2) 抛物线 $y=ax^2+bx-6$ 经过点 $A(-1, 3)$和 $B(2, -6)$.

解：(1) $\because$ $y=-2x^2+px+q=-2\left(x-\dfrac{p}{4}\right)^2+\dfrac{p^2+8q}{8}$，

$\therefore$ $\dfrac{p}{4}=-3$，$\dfrac{p^2+8q}{8}=5$，

$\therefore$ $p=-12$，$q=-13$.

所以该抛物线的表达式为 $y=-2x^2-12x-13$.

(2) 点 $A(-1, 3)$和 $B(2, -6)$的坐标满足抛物线的表达式，即

$$\begin{cases} a-b-6=3, \\ 4a+2b-6=-6. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-6. \end{cases}$$

所以该抛物线的表达式为 $y=3x^2-6x-6$.

练习

1. 求下列抛物线的对称轴和顶点坐标，并指出它们的开口方向.

(1) $y=3x^2-6x+1$； (2) $y=-2x^2-6x-1$.

2. 画出抛物线 $y=x^2-4x+2$ 的图像，并说明当 $x=-2$ 和 $x=-1$ 时，哪一个对应的函数值较大.

习 题

A 组

1. 求下列抛物线的对称轴和顶点坐标，并指出它们的开口方向.

 (1) $y=x^2-2x+8$；

 (2) $y=-5x^2+3x-2$.

2. 已知抛物线 $y=-x^2+2x+2$.

 (1) 这条抛物线的对称轴是________，顶点坐标是________.

 (2) 画出这条抛物线.

 (3) 这条抛物线上 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点的横坐标满足 $x_1>x_2>1$，观察图像，指出 y_1 与 y_2 的大小关系.

3. 通过配方，把下列函数化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，并指出函数的最大(或最小)值.

 (1) $y=-2x^2-5x+9$；　　(2) $y=2x^2+3x$；

 (3) $y=\frac{5}{2}x^2-4x+1$；　　(4) $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-2$.

B 组

1. 根据下列条件，求抛物线的表达式.

 (1) 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的顶点为 $M(2, 3)$.

 (2) 抛物线 $y=ax^2-2x+c$ 经过点 $A(-1, 0)$和 $B(2, -9)$.

2. 已知抛物线 $y=x^2-2px+16$ 的顶点在坐标轴上，试确定 p 的值.

30.3 由不共线三点的坐标确定二次函数*

已知两点的坐标，可以确定一次函数．如何由不共线三点的坐标来确定二次函数呢？

在直角坐标系中，由不共线三点的坐标可以确定二次函数的表达式.

已知不共线的三点 $A(1,\ 3)$，$B(2,\ -2)$，$C(-1,\ 1)$，怎样确定过这三点的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的表达式呢？

联想用待定系数法求一次函数表达式的过程，小亮想到了用待定系数法求二次函数的表达式：

将 A，B，C 三点的坐标分别代入二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，得

$$\begin{cases} a+b+c=3, \\ 4a+2b+c=-2, \\ a-b+c=1. \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} a=-2, \\ b=1, \\ c=4. \end{cases}$$

所求二次函数的表达式为 $y=-2x^2+x+4$.

大家谈谈

用待定系数法求二次函数表达式的过程与求一次函数表达式的过程有哪些相同点与不同点？

例 已知三点 $A(0,\ 1)$，$B(1,\ 0)$，$C(2,\ 3)$，求由这三点所确定的二次函数表达式.

解：设所求二次函数为 $y=ax^2+bx+c$．将 A，B，C 三点的坐标分别代入二次函数表达式中，得

$$\begin{cases} c=1, \\ a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=3. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=-3, \\ c=1. \end{cases}$$

所求二次函数的表达式为 $y=2x^2-3x+1$.

做一做

在直角坐标系中，已知点 $A(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$，$B(-\frac{3}{2}, 0)$，$C(\frac{1}{2}, 0)$. 求由 A，B，C 三点所确定的二次函数表达式.

练 习

求由 $A(1, 7)$，$B(2, 8)$，$C(3, 11)$ 三点所确定的二次函数表达式.

习 题

A 组

1. 已知二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图像经过点 $A(-1, -1)$，$B(3, -9)$.
   (1) 求这个二次函数的表达式.
   (2) 写出这条抛物线的对称轴和顶点坐标.
2. 求由 $A(1, 0)$，$B(3, 2)$，$C(-2, 12)$ 三点所确定的二次函数表达式.

B 组

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的自变量 x 和函数 y 的部分对应值如下表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
y	…	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	…

   请用不同的方法求出这个二次函数的表达式.
2. 若过 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ 三点的函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，则过 $A'(x_1, y_1+1)$，$B'(x_2, y_2+1)$，$C'(x_3, y_3+1)$ 三点的函数的表达式为 $y=ax^2+bx+(c+1)$. 这是为什么？

30.4 二次函数的应用

通过建立二次函数模型并利用它的有关性质，可以解决许多实际问题.

例 1 如图 30－4－1，一名运动员在距离篮圈中心 4 m(水平距离)远处跳起投篮，篮球准确落入篮圈. 已知篮球运行的路线为抛物线，当篮球运行的水平距离为 2.5 m 时，篮球达到最大高度，且最大高度为 3.5 m. 如果篮圈中心距离地面 3.05 m，那么篮球在该运动员出手时的高度是多少米？

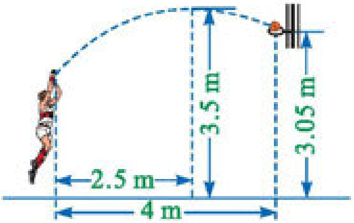


图 30－4－1

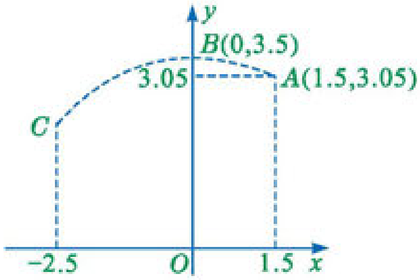


图 30－4－2

分析：由于篮球在空中运行的路线为一条抛物线，所以可以建立恰当的直角坐标系，求出该抛物线的表达式，借助表达式来解决所求问题.由题设，已知抛物线的顶点，建立顶点在 y 轴上的直角坐标系，可使所得的函数表达式较简单.

解：如图 30－4－2，建立直角坐标系，篮圈中心为点 $A(1.5,\ 3.05)$，篮球在最大高度时的位置为点 $B(0,\ 3.5)$. 以点 C 表示运动员投篮球的出手处.

设以 y 轴(直线 $x=0$)为对称轴的抛物线为 $y=a(x-0)^2+k$，即 $y=ax^2+k$，而点 A，B 在这条抛物线上，所以有

$$\begin{cases} 2.25a+k=3.05, \\ k=3.5. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=-0.2, \\ k=3.5. \end{cases}$$

所以该抛物线的表达式为 $y=-0.2x^2+3.5$.

当 $x=-2.5$ 时，$y=-0.2\times(-2.5)^2+3.5=2.25(\text{m})$.

答：篮球在该运动员出手时的高度为 2.25 m.

做一做

如图 30－4－3，某喷灌器 AB 的喷头高出地面 1.35 m，喷出的水流呈抛物线形从高 1 m 的小树 CD 上面的点 E 处飞过，点 C 距点 A 4.4 m，点 E 在直线 CD 上，且距点 D 0.35 m，水流最后落在距点 A 5.4 m 远的点 F 处. 喷出的水流最高处距地面多少米？

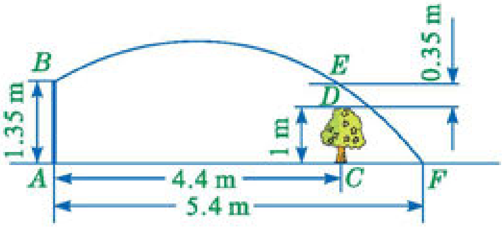


图 30－4－3

水流最高处到地面的距离即为抛物线顶点到地面的距离. 为求抛物线的表达式，小亮和小惠分别建立了如图 30－4－4 和图 30－4－5 所示的直角坐标系，并写出了相关点的坐标.

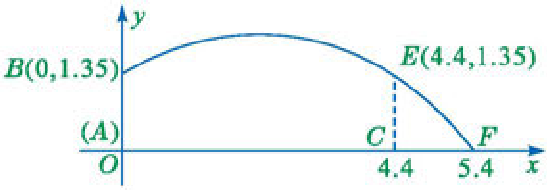


图 30－4－4

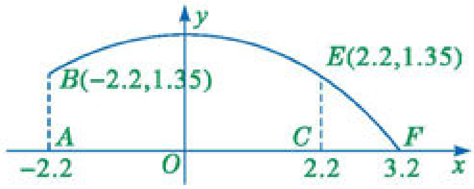


图 30－4－5

（1）请分别按小亮和小惠建立的直角坐标系求这条抛物线的表达式.

（2）根据以上两种表达式，求出水流最高处到地面的距离.

练　习

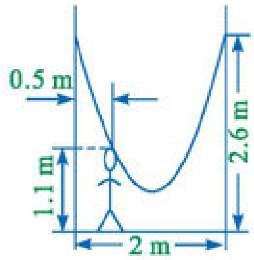
对上面的抛物线形水流问题，请以地平线 ACF 为横轴，以 F 为原点建立直角坐标系，并解决相应的问题.

习　题

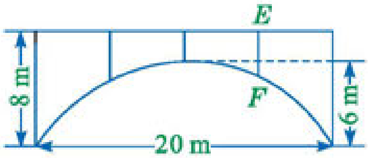
A 组

1. 如图，在相距 2 m 的两棵树上拴了一根绳子做成一个简易秋千，拴绳子

的地方都离出地面 2.6 m，绳子自然下垂近似呈抛物线形．当身高 1.1 m 的小妹距较近的那棵树 0.5 m 时，头部刚好接触到绳子，则绳子的最低点距地面的距离为________ m.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一座拱桥的轮廓呈抛物线形，拱高 6 m，跨度为 20 m，相邻两立柱间的距离均为 5 m.

(1) 建立适当的直角坐标系，求这条抛物线的表达式.

(2) 求立柱 EF 的长.

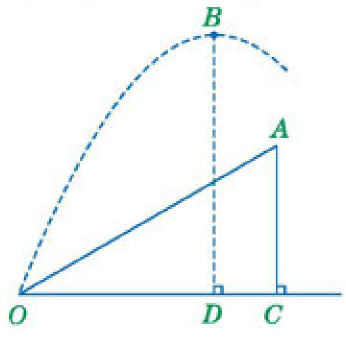
(3) 拱桥下面拟铺设行车道，要保证高 3 m 的汽车能够通过（车顶与桥拱的距离不小于 0.3 m），行车道最宽可铺设多少米？

B 组

如图，一高尔夫球员从山坡下的点 O 处打出一球，球向山坡上的球洞点 A 处飞去，球的飞行路线为抛物线．如果不考虑空气阻力，当球达到最大高度12 m时，球移动的水平距离为 9 m．已知山坡 OA 与水平方向 OC 的夹角为 30°，O，A 两点间的距离为 $8\sqrt{3}$ m.

(1) 建立适当的直角坐标系，求球的飞行路线所在抛物线的函数表达式.

(2) 这一杆能否把高尔夫球从点 O 处直接打入点 A 处球洞？



对于二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 来说，当 $a>0$，且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$，且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$．二次函数的这一特征，使它成为解决许多求“最小值”或“最大值”问题的重要工具.

例 2 用总长度为 24 m 的不锈钢材料制成如图 30－4－6 所示的外观为矩形的框架，其横档和竖档分别与 AD，AB 平行．设 $AB=x$ m，当 x 为多少时，矩形框架 $ABCD$ 的面积 S 最大？最大面积是多少平方米？

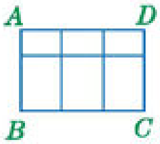


图 30－4－6

解：∵ $S=\frac{24-4x}{3}\cdot x=-\frac{4}{3}x^2+8x=-\frac{4}{3}(x-3)^2+12$，

$a=-\frac{4}{3}<0$，

∴ 当 $x=3$ 时，S 有最大值，且 $S_{最大}=12\ \text{m}^2$．

答：当 $x=3$ 时，矩形框架 $ABCD$ 的面积最大，最大面积为 $12\ \text{m}^2$．

例 3 一工艺师生产的某种产品按质量分为 9 个档次．第 1 档次（最低档次）的产品一天能生产 80 件，每件可获利润 12 元．产品每提高一个档次，每件产品的利润增加 2 元，但一天产量减少 4 件．如果只从生产利润这一角度考虑，他生产哪个档次的产品，可获得最大利润？

解：设生产 x 档次的产品时，每天所获得的利润为 w 元，则

$$\begin{aligned} w &= [12+2(x-1)][80-4(x-1)] \\ &= (10+2x)(84-4x) \\ &= -8x^2+128x+840 \\ &= -8(x-8)^2+1\,352. \end{aligned}$$

当 $x=8$ 时，w 有最大值，且 $w_{最大}=1\,352$．

答：该工艺师生产第 8 档次的产品，可使每天获得的利润最大，最大利润为 1 352 元．

做一做

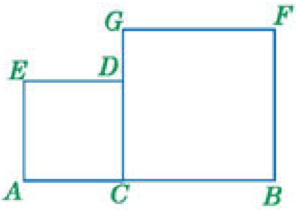
某种燃气灶的开关旋钮可从 0° 旋转到 90°．为测试开关旋钮在不同角度的燃气用量，在相同条件下，用开关旋钮的 5 个不同角度分别烧开一壶水，得到下列对应值：

开关旋钮旋转过的角度	20°	50°	70°	80°	90°
烧开一壶水所用燃气量/dm^3	73	67	83	97	115

（1）若所用燃气量是开关旋钮转过角度的二次函数，求这个二次函数的表达式．

（2）当开关旋钮转过多少度时，烧开一壶水所用燃气量最少？

练 习



如图，已知 $AB=2$，点 C 在线段 AB 上，四边形 $ACDE$ 和四边形 $CBFG$ 都是正方形. 设 $BC=x$.

（1）$AC=$________.

（2）设正方形 $ACDE$ 和正方形 $CBFG$ 的总面积为 S，用 x 表示 S 的函数表达式为 $S=$________.

（3）总面积 S 有最大值还是最小值？这个最大值或最小值是多少？

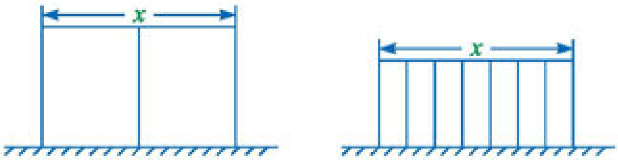
（4）当总面积 S 取最大值或最小值时，点 C 在 AB 的什么位置？

习 题

A 组

1. 用 60 m 长的篱笆围成一个一边靠墙、中间用篱笆隔开的矩形养鸡场.

（1）如果中间只有一道篱笆，如图(1)，并设矩形一边长为 x m，那么当 x 为何值时，养鸡场的面积最大？



(1)　　(2)

（第 1 题）

（2）如果养鸡场中间有 6 道篱笆，如图(2)，并设矩形一边长为 x m，那么当 x 为何值时，养鸡场的面积最大？

2. 某产品的成本是 120 元/件，在试销阶段，当产品的售价为 x(元/件)时，日销量为 $(200-x)$ 件.

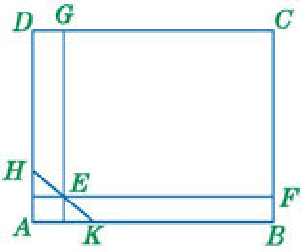
（1）写出用售价 x(元/件)表示每日的销售利润 y(元)的表达式.

（2）当日销售利润是 1 500 元时，产品的售价是多少？日销量是多少件？

（3）当售价定为多少时，日销售利润最大？最大日销售利润是多少元？

B 组

1. 某社区为了美化环境，准备在一块矩形土地 $ABCD$ 上修建一个矩形休闲广场 $EFCG$. 为了使三角形文物保护区 AKH 不被破坏，休闲广场的顶点 E 不能在文物保护区内. 已知 $AB=52$ m，$AD=40$ m，$AK=12$ m，$AH=9$ m.



（第 1 题）

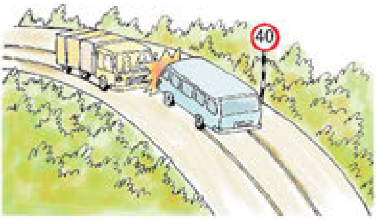
   (1) 当 E 为 HK 的中点时，休闲广场的面积是多少平方米？

   (2) 当点 E 在 HK 上什么位置时，休闲广场的面积最大？最大面积是多少平方米？

2. 某食品零售店为食品厂代销一种面包，未售出的面包可退回厂家. 统计销售情况时发现，当这种面包的价格定为 7 角/个时，每天可卖出160 个. 在此基础上，这种面包的单价每提高 1 角，该零售店每天就会少卖出 20 个. 已知该零售店每个面包的成本是 5 角. 当面包单价定为多少角时，该零售店每天销售这种面包获得的利润最大？最大利润为多少？

做一做

汽车在行驶中，由于惯性作用，刹车后还要向前滑行一段距离才能停住，这段距离叫做刹车距离. 刹车距离是分析和处理道路交通事故的一个重要因素. 有一个道路交通事故案例：甲、乙两车在限速为 40 km/h 的湿滑弯道上相向而行，待望见对方，同时刹车时已经晚了，两车还是相撞了. 事后经现场勘察，测得甲车的刹车距离为 12 m，乙车的刹车距离超过 10 m，但小于 12 m. 根据有关资料，在这样的湿滑路面上，甲车的刹车距离 $s_{甲}$(m)与车速 x(km/h)之间的关系为 $s_{甲}=0.1x+0.01x^2$，乙车的刹车距离 $s_{乙}$(m)与车速 x(km/h)之间的关系为 $s_{乙}=\frac{1}{4}x$.



(1) 甲车刹车前的行驶速度是多少千米/时？甲车是否违章超速？

(2) 乙车刹车前的行驶速度在什么范围内？乙车是否违章超速？

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的某一个函数值 $y=m$，就可利用一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$ 确定与它对应的 x 的值.

例 4 如图 30－4－7，已知边长为 1 的正方形 $ABCD$，在 BC 边上有一动点 E，连接 AE，作 $EF\perp AE$，交 CD 边于点 F.

（1）CF 的长可能等于 $\frac{3}{4}$ 吗？

（2）点 E 在什么位置时，CF 的长为 $\frac{3}{16}$？

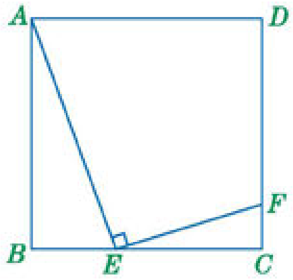


图 30－4－7

解：设 $BE=x$，$CF=y$.

$\because$ $\angle BAE=\angle CEF$，

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle ABE\backsim\text{Rt}\triangle ECF$.

$\therefore$ $\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{EC}$，即 $\frac{x}{y}=\frac{1}{1-x}$.

$\therefore$ $y=-x^2+x=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$.

（1）$\because$ $y_{最大}=\frac{1}{4}$，

$\therefore$ CF 的长不可能等于 $\frac{3}{4}$.

（2）设 $-x^2+x=\frac{3}{16}$，即 $16x^2-16x+3=0$.

解得 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ 当 BE 的长为 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$ 时，均有 CF 的长为 $\frac{3}{16}$.

练　习

当路况良好时，在干燥的路面上，某种汽车的刹车距离 s(m) 与车速 v(km/h) 之间的关系如下表：

v/(km/h)	…	40	60	80	100	120	…
s/m	…	2	4.2	7.2	11	15.6	…

(1) 在平面直角坐标系中描出每对(v, s)所对应的点，并用平滑的曲线顺次连接各点.

(2) 利用图像验证刹车距离s(m)与车速v(km/h)是否具有如下关系：

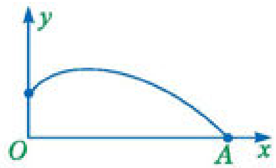
$$s=\frac{1}{1\,000}v^2+\frac{1}{100}v.$$

(3) 求$s=9$ m时的车速v.

习 题

A 组

1. 如图，一名男生推铅球，铅球行进高度y(m)与水平距离x(m)之间的关系为$y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.



(第1题)

(1) 求铅球被推出的水平距离.

(2) 通过计算判断铅球行进高度能否达到4 m.

2. 某工艺品厂生产一款工艺品. 已知这款工艺品的生产成本为60元/件. 经市场调研发现，这款工艺品每天的销售量y(件)与售价x(元/件)之间存在着如下表所示的一次函数关系：

售价x/(元/件)	…	70	90	…
销售量y/件	…	3 000	1 000	…

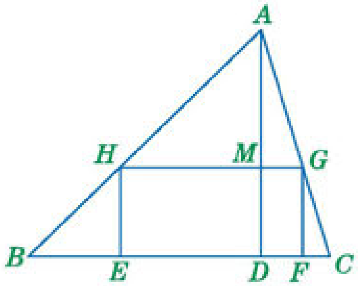
(1) 求销售量y(件)与售价x(元/件)之间的函数关系式.

(2) 求每天的销售利润w(元)与售价x(元/件)之间的函数关系式.

(3) 如何定价才能使该工艺品厂每天获得的销售利润为40 000元?

B 组

如图，$\triangle ABC$ 是一块铁皮余料. 已知底边 $BC=160$ cm，高 $AD=120$ cm. 在铁皮余料上截取一个矩形 $EFGH$，使点 H 在 AB 上，点 G 在 AC 上，点 E，F 在 BC 上，AD 交 HG 于点 M.



(1) 设 $HG=y$ cm，$HE=x$ cm，试确定用 x 表示 y 的函数表达式.

(2) 当 x 为何值时，矩形 $EFGH$ 的面积 S 最大？

(3) 以面积最大时的矩形 $EFGH$ 为侧面，围成一个无底圆桶，怎样围，圆桶的体积较大？请说明理由.（接缝处忽略不计，结果可保留 π）

30.5 二次函数与一元二次方程的关系

二次函数和一元二次方程有着紧密的联系. 现在，我们就来探究它们之间的关系.

观察与思考

如图 30－5－1，已知同一直角坐标系中抛物线 $y=x^2+2x-3$，$y=x^2-6x+9$，$y=x^2-4x+6$.

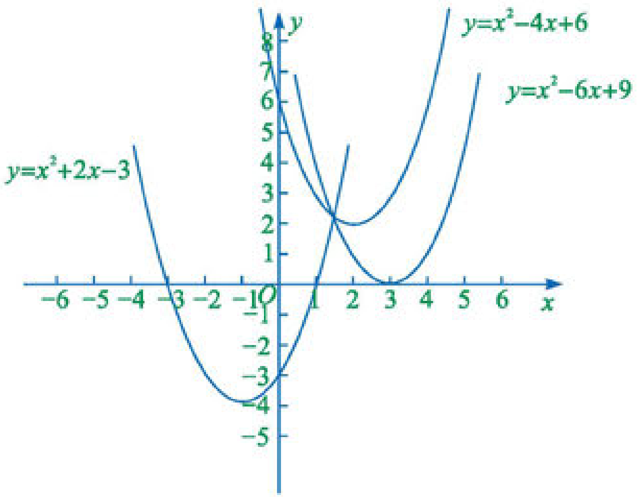


图 30－5－1

(1) 这三条抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况分别是怎样的?

(2) 当 $y=0$ 时，这三条抛物线的表达式对应的方程分别是 $x^2+2x-3=0$，$x^2-6x+9=0$，$x^2-4x+6=0$，它们根的情况分别是怎样的?

(3) 上述三个方程根的情况与它们所对应的三条抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况具有怎样的关系?

一般地，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 和 x 轴相交(或不相交)的情况与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况有如下对应关系：

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的位置关系	有两个公共点	有一个公共点	无公共点
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况	有两个不相等的实根	有两个相等的实根	没有实根

做一做

不画图像，说明下列抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况.

(1) $y=x^2-2x-1$； (2) $y=-2x^2+7x-7$； (3) $y=4x^2-12x+9$.

根据抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况与其对应的一元二次方程根的情况的关系，以及二次函数随自变量增大而增大(或减小)的性质，可以借助二次函数来求一元二次方程根的近似值.

例 求方程 $x^2-2x-6=0$ 较小根的近似值.（结果精确到 0.1）

解：如图 30－5－2，画出二次函数 $y=x^2-2x-6$ 的图像.

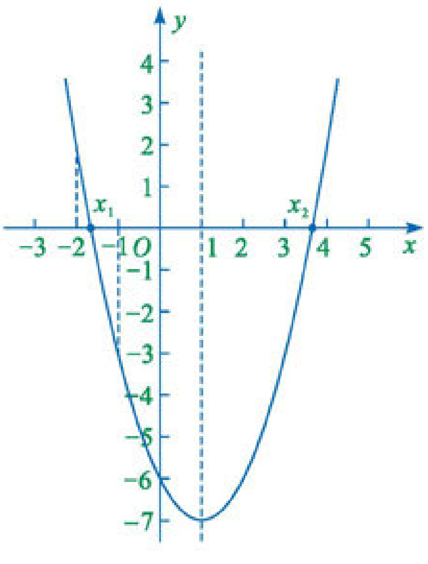


图 30－5－2

观察画出的抛物线，设它与 x 轴的交点的横坐标为 x_1 和 x_2，不妨设 $x_1<x_2$.

现在来求 x_1 的近似值.

(1) 容易看出：

当 $x=-2$ 时，$y>0$；当 $x=-1$ 时，$y<0$，且在 $-2<x<-1$

范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-2<x_1<-1.$$

(2) 取-2和-1的中间数-1.5(中间数为$\frac{-2-1}{2}$)，代入表达式中试值.

当 $x=-1.5$ 时，$y=(-1.5)^2-2\times(-1.5)-6=-0.75<0$；当 $x=-2$ 时，$y>0$. 在$-2<x<-1.5$ 范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-2<x_1<-1.5.$$

(3) 取-2和-1.5的中间数-1.75，代入表达式中试值.

当 $x=-1.75$ 时，$y=(-1.75)^2-2\times(-1.75)-6=0.5625>0$；当 $x=-1.5$ 时，$y<0$. 在$-1.75<x<-1.5$ 范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-1.75<x_1<-1.5.$$

(4) 取-1.75和-1.5的中间数-1.625，代入表达式中试值.

当 $x=-1.625$ 时，$y=(-1.625)^2-2\times(-1.625)-6=-0.109375<0$；当 $x=-1.75$ 时，$y>0$. 在$-1.75<x<-1.625$范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-1.75<x_1<-1.625.$$

$x_1\approx-1.7$ 即为精确到 0.1 的近似值.

练 习

求例题中 x_2 精确到 0.1 的近似值.

习 题

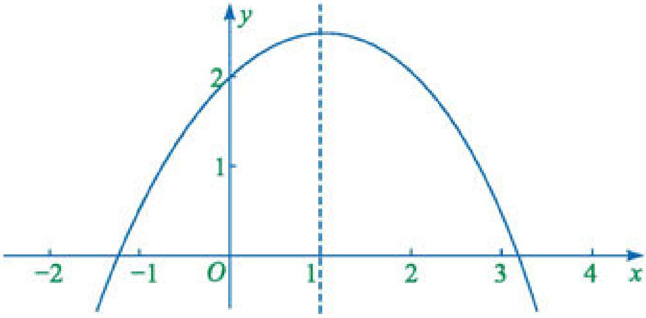
A 组

1. 指出下列函数的图像与 x 轴相交（或不相交）的情况，并说明理由.

(1) $y=2x^2-3x$；　　(2) $y=-x^2+8x-16$；

(3) $y=3x^2+6x+4$；　　(4) $y=\frac{1}{2}x^2-x+3$.

2. 利用二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+2$ 的图像和性质，求方程 $-\frac{1}{2}x^2+x+2=0$ 在 3 和 4 之间的根的近似值.（结果精确到 0.1）



（第 2 题）

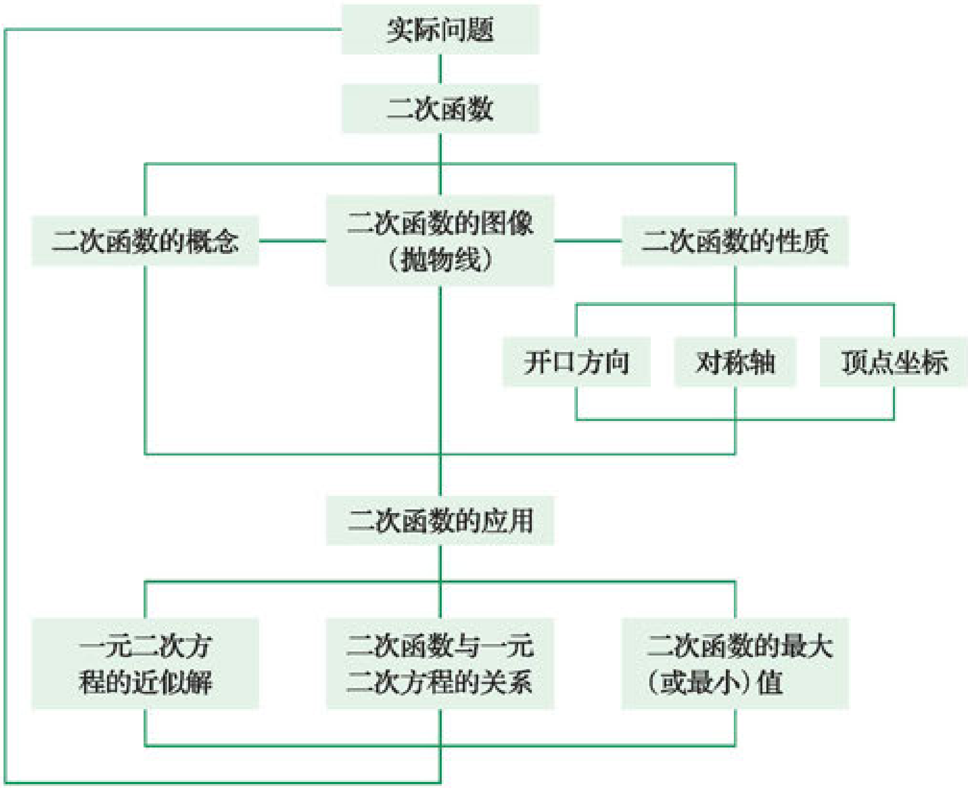
B 组

1. 求方程 $x^2-2x-2=0$ 的一个根的近似值.（结果精确到 0.1）

2. 借助 A 组第 2 题的图像，求方程 $-\frac{1}{2}x^2+x+2=0$ 在 -2 和 -1 之间的根的近似值.（结果精确到 0.1）

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

二次函数是又一类重要的函数模型．借助二次函数的图像，可以直观地了解二次函数的性质，并解决一些简单的实际问题．这充分体现了“数形结合”的重要思想．

1．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，这条抛物线关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称，它的顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$．当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，两侧向上无限延伸，顶点是最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，两侧向下无限延伸，顶点是最高点．

2．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质可通过它的图像反映出来．回忆并填空：

当 $a>0$ 时，在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的左侧，y 随 x 的增大而________；在

对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而________；当 $x=$________时，$y_{最小}=$________.

当 $a<0$ 时，在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的左侧，y 随 x 的增大而________；在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而________；当 $x=$________时，$y_{最大}=$________.

3. 用待定系数法求二次函数的表达式，可以用不同的方法：一是已知三点的坐标，将其代入一般表达式 $y=ax^2+bx+c$ 中，求解关于 a，b，c 的三元一次方程组即可；二是已知两点的坐标和对称轴，将其代入表达式 $y=a(x-h)^2+k$ 中，即可求得.

4. 求一元二次方程的近似解，是利用一元二次方程与二次函数的关系，借助二次函数的图像确定一元二次方程解的范围，通过逐步逼近，直到找到符合精度要求的近似解为止.

5. 在用二次函数解决实际问题时，首先要对实际问题进行观察和分析，梳理并表达出相应的数量关系，以确定二次函数的表达式，进而利用二次函数的图像或性质解决实际问题.

三、注意事项

1. 在画二次函数的图像时，要在对称轴的两侧对称地选取若干个点.

2. 在解决与抛物线有关的实际问题时，要注意建立恰当的直角坐标系.

3. 在利用二次函数解决实际问题时，自变量的取值范围需要结合具体问题来确定.

复 习 题

A 组

1. 分别在同一直角坐标系内画出下列各组二次函数的图像，并根据图像写出抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(1) $y=-\frac{1}{3}x^2+2$ 与 $y=-\frac{1}{3}x^2-2$.

(2) $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$ 与 $y=\frac{1}{4}(x-1)^2$.

(3) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+3$ 与 $y=-\frac{1}{3}(x+1)^2+3$.

2. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，并指出二次函数的最大(或最小)值.

(1) $y=x^2+2x-3$；　　(2) $y=-x^2+6x+2$；

(3) $y=2x^2-3x+5$；　　(4) $y=5x^2+6x$.

3. 画出二次函数 $y=-x^2+2x+3$ 的图像，并根据图像解答下列问题.

(1) 写出抛物线的对称轴、顶点坐标、与 x 轴和 y 轴的交点坐标.

(2) 当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而增大？当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而减小？

(3) 当 x 在什么范围内时，$y>0$？

(4) 当 x 在什么范围内时，$y<0$？

4. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的部分对应值如下表：

x	…	-3	-2	0	1	3	5	…
y	…	7	0	-8	-9	-5	7	…

则它的图像的对称轴为 $x=$________；当 $x=2$ 时，对应的函数值 $y=$________.

5. 根据下列条件，求出抛物线的表达式.

(1) 抛物线 $y=ax^2-4x+c$ 经过原点，与 x 轴交于另一点 $D(-4, 0)$.

(2) 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的顶点坐标为 $(2, 1)$.

(3) 抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 经过点 $A(1, -4)$ 和 $B(2, -3)$.

6. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(-1, -1)$，$B(0, 2)$，$C(1, 3)$.

(1) 求这个二次函数的表达式.

(2) 画出这个二次函数的图像.

7. 求一元二次方程 $x^2+2x-10=0$ 正根的近似值. (结果精确到 0.1)

8. 在半径为 8 cm 的大圆中，挖去一个半径为 x cm 的小圆，剩下部分的面积为 y cm^2.

(1) 请写出用 x 表示 y 的函数表达式.

(2) 当 x 为何值时，剩下部分的面积是原来大圆面积的一半？

9. 小明要制作一个三角形的钢架模型．在这个三角形中，长为 x cm 的边与这条边上的高之和为 60 cm．设这个三角形的面积为 S cm^2．

(1) 请写出 S 与 x 之间的函数关系式．

(2) 当 x 等于多少时，这个三角形的面积 S 最大？最大面积是多少平方厘米？

10. 某种爆竹点燃后，其上升的高度 h(m)和时间 t(s)符合关系式 $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2(0<t\leqslant 2)$．这种爆竹点燃后以 $v_0=20$ m/s 的初速度上升，g 取 10 m/s^2．

(1) 这种爆竹在地面上点燃后，经过多长时间距地面 15 m？

(2) 在爆竹点燃后的 1.5 s 至 1.8 s 这段时间内，爆竹是上升还是下降？请说明理由．

B 组

1. 已知二次函数的图像过点$\left(0, \frac{3}{2}\right)$，顶点坐标为$(-1, 2)$．

(1) 求这个二次函数的表达式．

(2) 求证：对任意实数 m，点 $M(m, -m^2)$都不在这个二次函数的图像上．

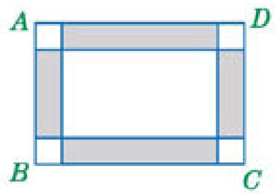
2. 抛物线 $y=-x^2+2nx+n^2-9$（n 为常数）经过坐标原点且顶点在第一象限．试确定该抛物线所对应的函数关系式，并写出其顶点坐标．

3. 某汽车租赁公司现有汽车 100 辆．当每辆汽车的月租金为 3 000 元时，能够全部租出；每辆汽车的月租金每提高 50 元，不能租出的汽车将增加 1 辆．每辆未租出的汽车月维护费为 100 元．

(1) 请用每辆汽车的月租金 x(元)表示汽车租赁公司的月收益 y(元)．

(2) 当每辆汽车的月租金为多少元时，汽车租赁公司的月收益最大？最大月收益是多少元？

4. 现用地砖铺设长方形广场的地面 $ABCD$，已知长方形广场地面的长为 100 m，宽为 80 m．图案设计如图所示，广场的四角均为小正方形，阴影部分为四个长方形，四个长方形的宽都等于小正方形的边长．阴影部分铺绿色地砖，其余部分铺白色地砖．



（第 4 题）

(1) 如果要使铺白色地砖的面积为 5 200 m^2，那么长方形广场四角的小正方形的边长应为多少米?

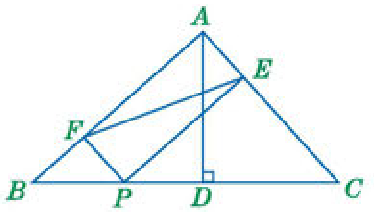
(2) 如果铺白色地砖需要的费用为 30 元/平方米，铺绿色地砖需要的费用为20 元/平方米，那么当广场四角小正方形的边长为多少米时，铺广场地面的总费用最少? 最少费用是多少元?

C 组

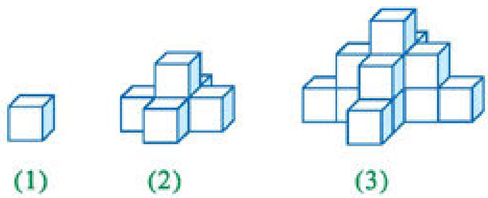
1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$BC=2$，BC 边上的高 $AD=1$，P 是 BC 边上任意一点，$PE/\!/AB$，交 AC 于点 E，$PF/\!/AC$，交 AB 于点 F. 设 $BP=x$，$\triangle PEF$ 的面积为 $S_{\triangle PEF}$.

(1) 写出用 x 表示 $S_{\triangle PEF}$ 的表达式.

(2) x 为何值时，$S_{\triangle PEF}$ 最大?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 用同样大小的正方体木块依次堆放成如图(1)、图(2)、图(3)所示的实心几何体，并按照这样的规律继续堆放下去. 设第 n 个图形中含有正方体木块 s 个.

(1) 填表:

n	1	2	3	4	…
s					…

(2) 已知 s 是 n 的二次函数，求这个二次函数的表达式.

(3) 第 10 个图形中的正方体木块有多少个?

(4) 是否存在某个图形，它对应的几何体由 1 770 个正方体木块组成? 若存在，指出它是第几个图形；若不存在，请说明理由.

第三十一章

随机事件的概率

在本章中，我们将学习

- 随机事件及其概率
- 频率与概率的关系
- 用列举法计算简单事件的概率

如图，彩票号码摇奖器中，有10个质地、大小完全相同的球，分别标号为0，1，2，…，9. 摇奖器在转动的过程中，将有一个球从下方的洞中漏出. 你事先能确定这个球的号码吗？漏出球的号码有多少种可能结果？每个号码出现的可能性大小是否相同？

31.1 确定事件和随机事件

在现实生活中，有些事情事先我们能知道它们一定发生或一定不发生，但对有些事情是否发生，我们事先不能作出肯定的回答，它们有时会发生，有时不会发生，发生与否具有随机性.

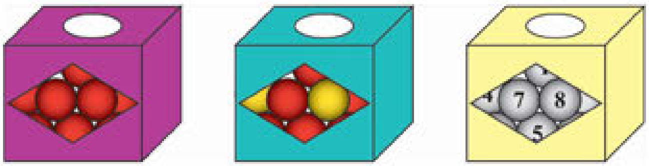
观察与思考

观察下列摸球试验，思考相应的问题.

试验1：A盒中有10个大小和质地都相同的红球，搅匀后从中任意摸出1个球. 事先能肯定摸到的是红球吗？能摸到黄球吗？

试验2：B盒中有10个大小和质地都相同的球，其中6个是红球，4个是黄球，搅匀后从中任意摸出1个球. 事先能肯定摸到的是红球吗？能肯定摸到的是黄球吗？

试验3：C盒中有10个大小和质地都相同的球，分别标号为0，1，…，9，搅匀后从中任意摸出1个球. 摸到球的号码有多少种可能结果？事先能肯定摸到球的号码是几吗？



A　　B　　C

在试验1中，由于A盒中全是红球，所以摸到的肯定是红球. 我们说“摸到红球”是必然发生的事情. 由于A盒中没有黄球，所以肯定不会摸到黄球，即“摸到黄球”是不可能发生的事情.

在试验2中，可能摸到红球，也可能摸到黄球，事先不能肯定摸到的是红球还是黄球. 我们说“摸到红球”和“摸到黄球”都是随机发生的事情.

在试验3中，标号为0，1，…，9的球都有可能被摸到，共有10种可能结果，但事先不能肯定哪种结果会发生.

在一定条件下，必然发生的事情叫做**必然事件**(certain event)，不可能发生的事情叫做**不可能事件**(impossible event)，可能发生也可能不发生的事情叫做**随机事件**(random event). 必然事件和不可能事件统称为确定事件.

例如，在试验 1 中，“摸到红球”是必然事件，“摸到黄球”是不可能事件，它们都是确定事件. 在试验 2 中，“摸到红球”和“摸到黄球”都是随机事件.

做一做

对于试验 3，指出下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件.

(1) 摸到球的号码不超过 9.

(2) 摸到球的号码为 6.

(3) 摸到球的号码为 10.

(4) 摸到球的号码为奇数.

为方便起见，一般用大写拉丁字母 A，B，C，…表示事件. 例如，在试验 3 中，可设 A= “摸到球的号码为奇数”，B= “摸到球的号码为偶数”，事件 A 和 B 都是随机事件.

在现实世界中，存在大量的随机事件，例如：

(1) 抛掷一枚硬币，硬币落地后，“正面朝上”和“反面朝上”都是随机事件.

正面　　反面

(2) 上学路上，小明在某个有交通信号灯的路口“遇到红灯”是随机事件.

(3) 小亮拨打火车票订票电话，“线路占线”是随机事件.

(4) 从一批节能灯管中任意抽查一只，“使用寿命超过 3 000 h”是随机事件.

练　习

1. 指出下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随

机事件.

(1) 在标准大气压下，水在 100 ℃时沸腾.

(2) 向空中抛掷一个玻璃球，球落到地面.

(3) 在没有氧气的密闭瓶子中，蜡烛能燃烧.

(4) 解答有 4 个选项的单项选择题，随意猜一个答案，猜中正确答案.

(5) 某射击运动员射击一次，成绩为 10 环.

2. 请你再举出几个随机事件的例子.

习题

A 组

对于下列试验中的事件，分别指出哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件.

(1) 从 1，2，…，10 中任意选择两个数.

$A=$ “两个数的和是自然数”；$B=$ “两个数的和等于 21”；

$C=$ “两个数的比是整数”；$D=$ “两个数的积等于 15”.

(2) 从装有 3 个红球，1 个黄球的盒子中任意取出 2 个球.

$E=$ “2 个球都是黄球”；

$F=$ “2 个球都是红球”；

$G=$ “2 个球中有红球”.

(3) 形状相近的 5 把钥匙中只有 1 把能打开门.

$H=$ “任意摸出 1 把，打开了门”.

B 组

1. 一个袋子中装有 3 个红球，2 个黄球，1 个白球. 从中取球，判断下列事件是什么事件.

事件	判断	事件	判断
(1) 任取 1 个球，恰是红球		(2) 任取 1 个球，恰是黄球	
(3) 任取 2 个球，全是黄球		(4) 任取 2 个球，全是白球	
(5) 任取 3 个球，其中有红球		(6) 任取 4 个球，其中有红球	

2. 掷两颗骰子，请你针对掷的结果写出 1 个必然事件、1 个不可能事件和 4 个随机事件.

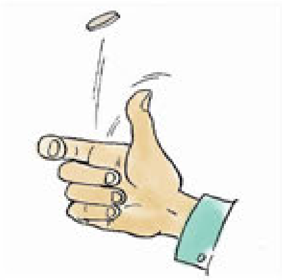
31.2 随机事件的概率

随机事件是否发生具有偶然性，但它们发生的可能性有大小之分．如何用数值刻画随机事件发生的可能性大小呢？

大家谈谈

1．在足球比赛时，通过掷硬币，以正、反面朝向来决定谁先挑边．你认为这种方式公平吗？

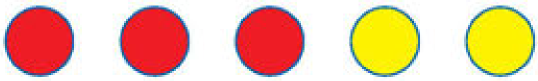
2．“今天有雨”是必然事件还是随机事件？“很可能要下雨”是什么意思？



掷一枚质地均匀的硬币，落地后“正面朝上”和“反面朝上”都是随机事件，它们发生的可能性相同．“今天有雨”是随机事件，“很可能要下雨”是说事件“今天有雨”发生的可能性较大．

一起探究

袋子中有大小、质地完全相同的5个球，其中3个是红球，2个是黄球．从中任意摸出1个球，事件A=“摸到红球”，B=“摸到黄球”．



（1）猜想：事件A和B发生的可能性大小相同吗？

（2）分组做摸球试验，每摸出1个球，记下球的颜色后放回袋子中，搅匀后再进行下一次摸球．每组重复20次试验，记录事件A和B发生的次

数．汇总各组的摸球结果并填写下表（试验总次数不少于 200 次）：

事件	A＝“摸到红球”	B＝“摸到黄球”	合计
发生的次数			
占试验总次数的百分比			

（3）事件 A 和 B 发生的次数占试验总次数百分比的大小有什么规律？

（4）能用两个数分别刻画事件 A 和 B 发生的可能性大小吗？

做 n 次重复试验，如果事件 A 发生了 m 次，那么数 m 叫做事件 A 发生的**频数**（frequency），比值 $\frac{m}{n}$ 叫做事件 A 发生的**频率**（relative frequency）.

事件发生的频率，在某种程度上反映了事件发生的可能性大小.

在上面“一起探究”的摸球试验中，任意摸出 1 个球，有 5 种可能结果，摸到每个球的可能性大小相同，即摸到每个球具有等可能的结果，我们可以用 $\frac{1}{5}$ 来刻画摸到每个球的可能性大小．于是可以用 $\frac{3}{5}$ 来刻画摸到红球的可能性大小，用 $\frac{2}{5}$ 来刻画摸到黄球的可能性大小.

我们用一个数刻画随机事件 A 发生的可能性大小，这个数叫做事件 A 的**概率**（probability），记作 $P(A)$.

如果一个试验有 n 种等可能的结果，事件 A 包含其中的 k 种结果，那么事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{k}{n}$.

任何一个事件 A 都满足 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$．必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0.

例 1 有 10 张正面分别写有 1，2，…，10 的卡片，背面图案相同．将卡片背面朝上充分混匀后，从中随机抽取 1 张卡片，得到一个数．设 A＝“得到的数是 5”，B＝“得到的数是偶数”，C＝“得到的数能被 3 整除”，求事件 A，B，C 发生的概率.

解：试验共有 10 种可能结果，每个数被抽到的可能性相等，则 A 包含 1 种可能结果，B 包含 5 种可能结果，C 包含 3 种可能结果.

所以

$$P(A)=\frac{1}{10},\ P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{3}{10}.$$

练 习

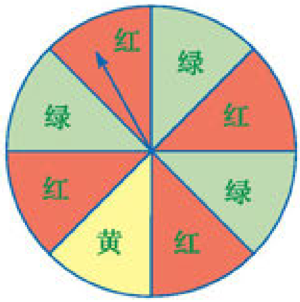
1. 袋子中装有 10 个球，它们除颜色外完全相同，其中 5 个是红球，3 个是黄球，2 个是白球. 从中任取 1 个球，设 $A=$ “取到红球”，$B=$ “取到黄球”，$C=$ “取到白球”. 求事件 A，B，C 发生的概率，并标在图中.

（第 1 题）

2. 如图，一个可以转动的圆盘，其中 8 个扇形的圆心角都相等.

（1）转动圆盘，等圆盘停下时，指针落在哪种颜色区域的可能性最大？请说明理由.

（2）分别求指针落在红色区域、绿色区域和黄色区域的概率.



（第 2 题）

习 题

A 组

1. 在一个设有交通信号灯的路口，红灯持续 40 s，绿灯持续 60 s，交替进行. 在这个路口，“遇到红灯”和“遇到绿灯”，哪个事件发生的可能性较大？

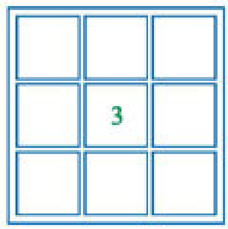
2. 从标有数字 1，2，…，8 的 8 张卡片中，任意抽取 1 张. 设 $A=$ “取到 2 的倍数”，$B=$ “取到 3 的倍数”.

   （1）事件 A 和 B 哪个发生的可能性大？

   （2）事件 A 和 B 的概率各是多大？

3. 一个袋子中有 20 个外形相同的球，其中 12 个是红球，8 个是白球. 从袋子中任意取出 1 个球，求取出的是红球的概率.

4. 扫雷游戏：如图所示，点击中间的按钮，出现数字 3，表明周围 8 个位置中有 3 颗地雷. 任意点击这 8 个按钮中的一个，碰上地雷的概率是多大？



（第 4 题）

5. 一副扑克牌共有 54 张，充分洗匀后从中任意抽取1 张. 设 $A=$ “抽到大王牌”，$B=$ “抽到黑桃牌”，$C=$ “抽到 K 牌”，$D=$ “抽到黑色的牌”. 将事件 A，B，C，

D 按发生的可能性大小从小到大排列为____________.

B 组

1. 将英文单词 MATHEMATICS(数学)的各字母写在 11 张卡片上，充分混匀后任取 1 张，求下列事件的概率.

   (1) 取到字母 M.

   (2) 取到字母 P.

   (3) 取到元音字母.

2. 请你设计一个摸球试验，使“摸到红球”的概率为$\frac{1}{2}$，“摸到白球”的概率为$\frac{1}{3}$，“摸到黄球”的概率为$\frac{1}{6}$.

小明和小亮做掷硬币游戏.

将一枚质地均匀的硬币投掷两次. 如果都是正面朝上，那么小明胜；如果一次正面朝上、一次反面朝上，那么小亮胜. 这个游戏公平吗？

甲同学的观点

掷两次硬币，有三种可能结果：“两次都是正面朝上”“一次正面朝上、一次反面朝上”“两次都是反面朝上”. 这三个事件的概率相等，都是$\frac{1}{3}$. 游戏是公平的.

乙同学的观点

我做过掷两次硬币的试验，在 100 次重复试验中，“一次正面朝上、一次反面朝上”的频率明显比“两次都是正面朝上”的频率大. 我认为游戏不公平.

大家谈谈

1. 甲、乙两名同学发表了各自的观点，你同意谁的观点？
2. 怎样才算是一个公平的游戏？

实际上，在机会游戏中，对于两个事件 A 和 B，如果规定 A 发生，甲胜，B 发生，乙胜，那么当事件 A 和 B 的概率相等时，游戏是公平的. 否则，就不公平.

一起探究

如图 31－2－1，掷两次硬币.

(1) 有几种等可能的结果？

(2) P(两次正面朝上)＝________；

P(一次正面朝上，一次反面朝上)＝________；

P(两次反面朝上)＝________.

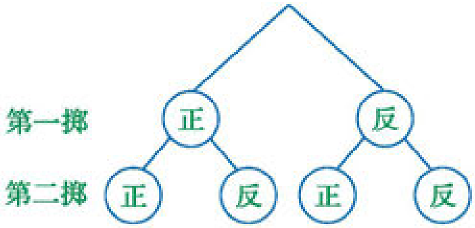


图 31－2－1

(3) 对于小明和小亮所做的掷硬币游戏，如果游戏不公平，怎样修改游戏规则，可使其成为一个公平的游戏？

做一做

甲、乙两个盒子中各装有三张分别标记 1，2，3 的卡片，分别从甲、乙两个盒子中随机抽取一张，记录上面的数，并用(m, n)表示“甲盒中抽取的卡片上的数为 m，乙盒中抽取的卡片上的数为 n”这一结果.

(1) 这样的“数对”共有多少种可能结果？

(2) 将所有这样的“数对”的可能结果及对应的两数之和填入下表：

可能结果									
两数的和									

(3) P(两数之和为奇数)＝________，P(两数之和为偶数)＝________.

例 2 一副扑克牌除去“大、小王”后共有 52 张，充分洗匀后从中任意抽取 1 张牌.

(1) 抽到红心牌的概率是多大？

(2) 抽到 A 牌的概率是多大？

(3) 抽到红色牌的概率是多大？

解：从 52 张扑克牌中任意抽取 1 张牌，共有 52 种等可能结果，其中抽到红心牌的结果有 13 种，抽到 A 牌的结果有 4 种，抽到红色牌(红心牌 13 张、方块牌 13 张)的结果有 26 种. 所以

$$P(\text{抽到红心牌})=\frac{13}{52}=\frac{1}{4},$$

$$P(\text{抽到 A 牌})=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},$$

$$P(\text{抽到红色牌})=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}.$$

练习

1. 甲、乙两人做掷硬币游戏. 掷一枚质地均匀的硬币，落地后，正面朝上，甲胜；反面朝上，乙胜. 共掷了 10 次硬币，结果有 6 次正面朝上，4 次反面朝上. 乙认为这个游戏不公平. 你同意他的看法吗？请说说你的理由.

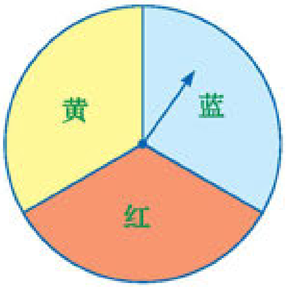
2. 如图所示的转盘，三个扇形的圆心角都相等，转动圆盘，等停下时观察指针停下的区域.

甲的观点：如果前 3 次指针都停在蓝色区域，下一次停在蓝色区域的概率会变大.

乙的观点：重复试验 3 次，一定会有一次停在蓝色区域.

丙的观点：指针停在红、黄、蓝三个区域的概率相等.

你认为谁的观点是正确的？



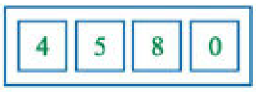
(第 2 题)

习题

A 组

1. 足球比赛前，参赛的两队通过掷一枚硬币来挑边. 如果正面朝上，那么甲队先开球或选择进攻方向；如果反面朝上，那么乙队先开球或选择进攻方向. 这种挑边的方式公平吗？为什么？

2. 在猜一商品价格的游戏中，参与者事先不知道该商品的价格，主持人要求他从图中的 4 张卡片中任意拿走 1 张，使剩下的卡片从左到右连成一个三位数，



(第 2 题)

该数就是他猜的价格．若商品的价格是 480 元，则参考者一次就能猜中的概率是________．

3．掷一颗质地均匀的骰子，观察上面的点数．设 $A=$“点数为偶数”，$B=$“点数为奇数”，$C=$“点数能被 3 整除”，分别求事件 A，B，C 的概率．

4．在一个有 40 人的班里，18 名女生中有 6 名共青团员，22 名男生中有 8 名共青团员．随机选择 1 名学生，求下列事件的概率．

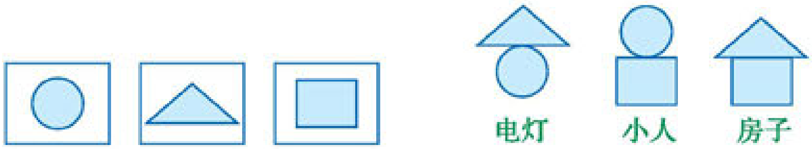
（1）选到女生．

（2）选到共青团员．

（3）选到女共青团员．

B 组

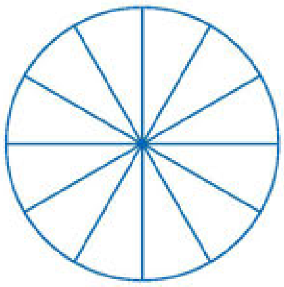
1．甲和乙用 3 张同样规格的硬纸片做拼图游戏．硬纸片正面如图（1）所示，背面完全一样．将它们背面朝上混匀后，同时抽出 2 张．游戏规则如下：如图（2），当两个图形可以拼成电灯或小人时，甲获胜；当两个图形可以拼成房子时，乙获胜．你认为这个游戏规则公平吗？为什么？



（1）　　（2）

（第 1 题）

2．如图，一个圆被分成 12 个等圆心角的扇形，假设投一次飞镖一定命中圆内区域，而且命中每个扇形的可能性相等．请你用红、黄、蓝三种颜色对某些扇形涂色，将这个圆设计成一个飞镖盘．要求：投一次飞镖，命中红、黄、蓝区域的概率之比为 $1:2:3$．



（第 2 题）

读一读

概率论的起源与发展

17 世纪中叶，有些人对博弈中的问题发生了争论，其中的一个问题是“赌金分配问题”．他们决定请教法国数学家帕斯卡（Pascal）和费马（Fermat）．两位数学家对这个问题进行了认真的讨论，并最终解决了这个问题．这个问题的解决直接推动了概率论的诞生．

帕斯卡（1623～1662）

费马（1601～1665）

类似“赌金分配问题”的一个例子如下：

甲、乙两名运动员进行乒乓球比赛，设立 600 元奖金，规定先胜 3 局的运动员将获得全部奖金．两人实力相当，现已赛完 3 局，甲 2∶1 领先，此时比赛因故终止．这 600 元奖金怎样分配才公平？

平均分配，甲不同意．全部给甲，对乙不公平．于是，有人提出了按已胜局数的比例分配的方案：甲得三分之二，400 元；乙得三分之一，200 元．这个方案表面上看似公平，但真的公平吗？

设想继续比赛，第四局比赛甲胜或乙胜的概率各为 0.5．如果甲胜，那么甲将先胜 3 局获得全部奖金；如果乙胜，那么需要进行第五局比赛，又各有 0.5 的获胜机会．总之，若继续比赛，甲先胜 3 局的概率为 0.75，乙先胜 3 局的概率为 0.25．因此奖金应按最终获胜概率的比例分配，甲得 450 元，乙得 150 元．

概率与统计的一些概念和简单方法，早期主要用于赌博和人口统计模型．随着人类的社会实践，人们需要了解各种不确定现象中隐含的必然规律，并用数学方法研究各种结果出现的可能性大小，从而产生了概率论，并使之逐步发展成为一门严谨的学科．现在，概率与统计的方法日益渗透到各个领域，并广泛应用于自然科学、经济学、医学、金融、保险甚至人文科学中．

31.3 用频率估计概率

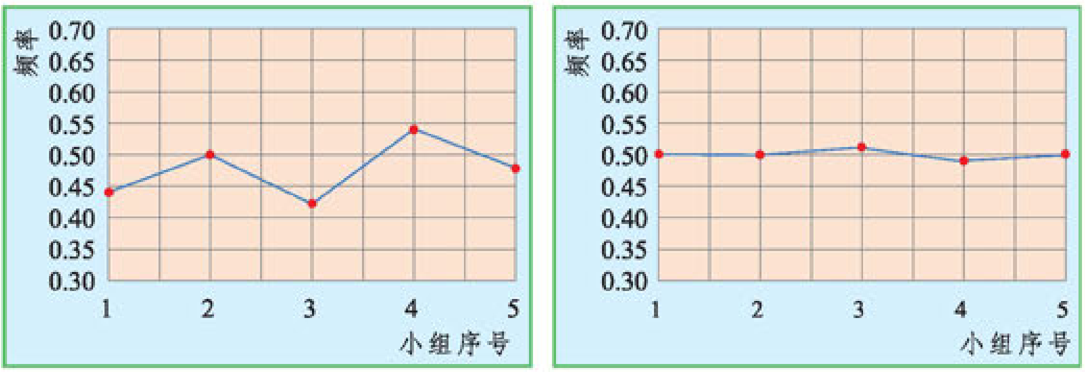
对现实生活中的某些随机事件，需要做大量重复试验，用事件的频率去估计概率. 那么，频率和概率具有怎样的关系呢？

我们知道，掷一枚质地均匀的硬币，落地后，“正面朝上”和“反面朝上”的概率都是$\frac{1}{2}$.

五个小组分别掷一枚硬币 50 次和 500 次，统计“正面朝上”发生的频数和频率，结果如下表：

小组序号	$n=50$		$n=500$	
	频数	频率	频数	频率
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	27	0.54	246	0.492
5	24	0.48	251	0.502

将上面的试验结果用折线统计图表示，如图 31－3－1.



$n=50$　　　　$n=500$

图 31－3－1

观察与思考

观察图 31－3－1，思考下列问题：

（1）当试验次数较小时，频率有什么特征？

（2）当试验次数很大时，频率有什么样的变化趋势？

实际上，对掷硬币试验，“正面朝上”的概率为 0.5，而频率则具有不确定性．试验次数不同，频率可能不同；即使是相同次数的不同试验，频率也可能不同．当试验次数较小时，频率的波动较大，但是随着试验次数的增大，“正面朝上”发生的频率波动明显减小，逐渐稳定到 0.5 附近．这个性质叫做频率的稳定性．

做一做

1．将全班分成 12 个小组，课外时间每个小组做 20 次掷硬币试验，记录事件 A＝“正面朝上”发生的次数．汇总各小组的试验结果，填写下表：

小组序号	1	2	3	4	5	6
A 发生次数						
小组序号	7	8	9	10	11	12
A 发生次数						

2．整理上表中的数据，依次累计进行 20 次、40 次、…、240 次试验，记录事件 A 发生的次数，计算相应的频率，填写下表：

累计抛掷次数	20	40	60	80	100	120
A 发生次数						
A 发生的频率						
累计抛掷次数	140	160	180	200	220	240
A 发生次数						
A 发生的频率						

3. 在图 31－3－2 中画折线统计图，表示事件“正面朝上”发生的频率的变化趋势.

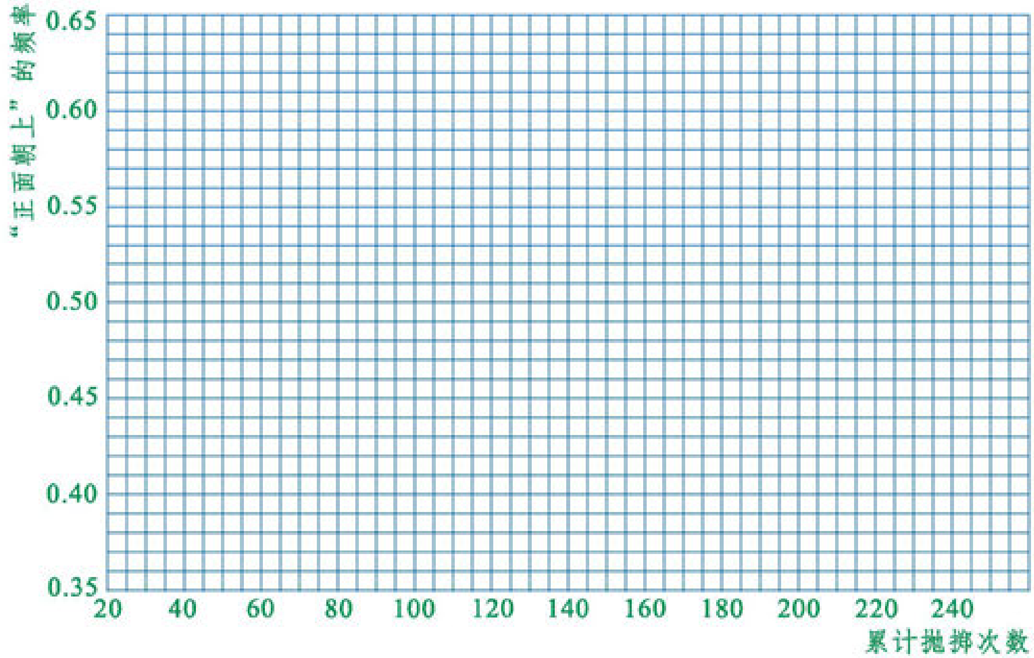


图 31－3－2

4. 观察上面的统计表与统计图，随着投掷次数的增加，事件“正面朝上”发生的频率是如何变化的？是否逐渐稳定到 0.5 附近？

练 习

关于掷一枚质地均匀硬币的试验，下列说法是否正确？为什么？

(1) “正面朝上”和“反面朝上”的概率都是 0.5，所以掷 100 次硬币一定是“正面朝上”和“反面朝上”各发生 50 次.

(2) 结果是“正面朝上”还是“反面朝上”，全凭运气，没有什么规律.

习 题

A 组

1. 判断下列说法是否正确，在题后的括号内填写“正确”或“错误”.

(1) 掷一枚质地均匀的硬币，“正面朝上”的概率为 0.5. （　　）

(2) 掷一枚质地均匀的硬币 10 次，“正面朝上”恰好发生 5 次．（　　）

(3) 掷一枚质地均匀的硬币 20 次，“正面朝上”发生的频率是 0.5．（　　）

(4) 掷一枚质地均匀的硬币 1 000 次，“正面朝上”发生的频率接近 0.5．（　　）

(5) 随着掷硬币次数的增大，“正面朝上”发生的频率逐渐稳定到 0.5．（　　）

2. 掷一颗骰子，“掷出 6 点”的概率是多大？如果掷 6 次骰子，那么一定出现一个 6 点吗？如果做 600 次试验，那么“掷出 6 点”发生的频率应接近什么数？

3. 一种彩票中奖率为 1%(如 100 000 张中 1 000 张有奖)，购买 100 张彩票一定会中奖吗？购买 10 000 张这样的彩票，大约有多少张有奖？

B 组

将两个标号分别为 1 和 2 的乒乓球放入一个盒子中，先从中任意取出 1 个，记下号码后放回盒中，然后再取出 1 个记下号码．两个号码之和可能为 2，3，4．设事件 $A=$“和为 2”，$B=$“和为 3”，$C=$“和为 4”．

(1) 事件 A，B，C 的概率各是多大？

(2) 两名同学做了 150 次试验，获得的数据(两个号码的和)如下：

3434344323	4332324423	2233223344	4243232342	3243323333
4333433344	2422433423	3433423232	3233324433	3443343442
3433422333	3432343222	3232233443	4343433432	3343343432

设计适当的表格，表示累计试验 10 次、30 次、50 次、…、150 次时，事件 A，B，C 发生的频率．用折线统计图表示事件 A，B 发生的频率变化趋势．

(3) 随着试验次数的增大，事件发生的频率是否稳定到它的概率值附近？

对于掷硬币试验，当投掷次数很大时，“正面朝上”发生的频率逐渐稳定到 0.5，即频率稳定到概率．对于其他的试验，事件发生的频率是否也具有稳定性呢？

如图 31－3－3，在 4 张图片中，(1)和(2)，(3)和(4)分别拼在一起时，

各为一个完整的心形图片．将 4 张图片背面向上，充分混匀后，从中依次任意取出 2 张，能拼成一个完整的心形图案算“成功”，否则算“失败”．

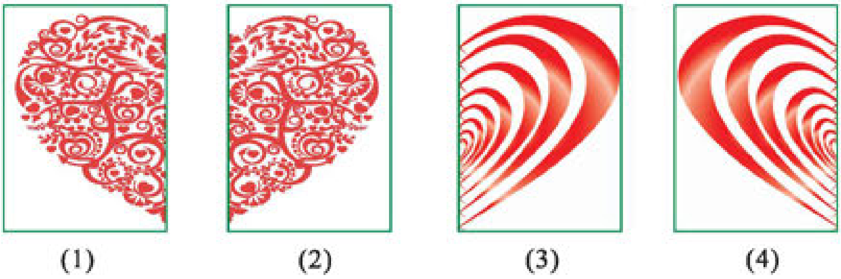


图 31－3－3

一起探究

1．凭直觉判断：事件“成功”和“失败”的概率相等吗？如果你认为不等，哪一个事件的概率较大？

2．做重复试验进行验证．两名同学做了 240 次试验，结果如下表：

试验次数	30	60	90	120	150	180	210	240
“成功”发生的次数	7	17	33	43	48	63	68	83
“成功”发生的频率	0.23							

计算事件“成功”发生的频率(结果精确到 0.01)，并在下面的网格图中，适当标记刻度，绘制折线统计图．

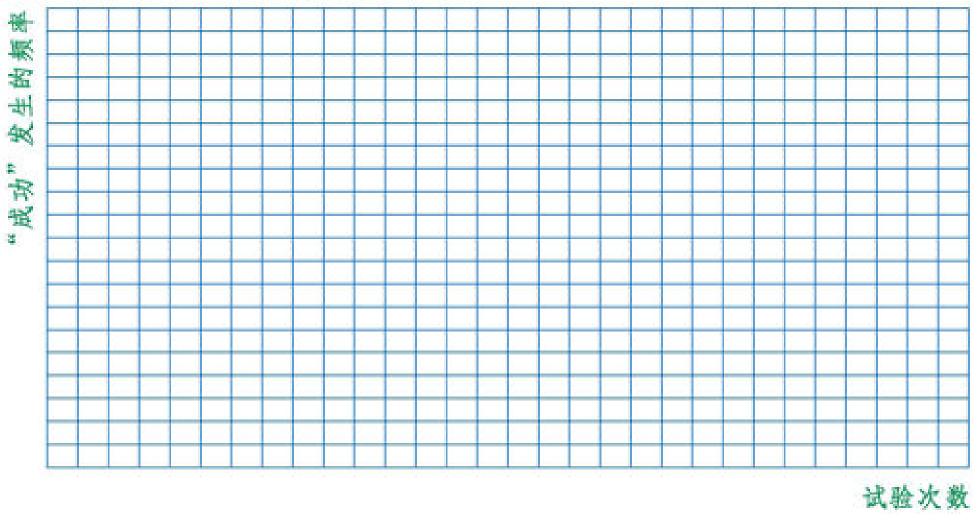


图 31－3－4

观察图 31－3－4，随着试验次数的增大，“成功”发生的频率是否趋于稳定？稳定在哪个数附近？

3. 直接计算“成功”和“失败”的概率.

从 4 张图片中依次任取 2 张，我们用(1，2)表示第一次取到(1)号图片、第二次取到(2)号图片的结果，依此类推，所有可能结果见下表：

第 2 张号码 / 第 1 张号码	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	×	(1，2)	(1，3)	(1，4)
(2)	(2，1)	×	(2，3)	(2，4)
(3)	(3，1)	(3，2)	×	(3，4)
(4)	(4，1)	(4，2)	(4，3)	×

试验的所有可能结果有________种，其中，只有________种能拼成一个完整的心形图案. “成功”的概率为________，“失败”的概率为________.

大量试验表明，随着试验次数的增大，事件发生的频率逐渐稳定到它的概率，或者说概率是频率的稳定值. 在实际中，我们常用比较稳定时的频率估计事件的概率，而试验次数越大，得到概率的较精确估计值的可能性越大.

概率反映了事件发生可能性大小的规律，这个规律是由大量重复试验呈现出来的. 所以在用频率估计概率时，需要做大量试验，这要花费大量的时间. 如果全班同学合作，每人做 10 次试验，把所得试验数据合起来，那么就相当于做了 400 次至 500 次试验，得到的频率值就较接近概率.

做一做

1. 某射击手射击 500 次，中靶 200 次. 估计该射击手的命中率.

2. 某运动员练习篮球投篮 200 次，命中 140 次. 投篮 1 次，命中的概率大约为多大？

练 习

1. 某种化妆品经销商随机访问了 4 名顾客，结果有 3 人使用 X 品牌的化妆品. 经销商宣称：“X 品牌化妆品的市场占有率为 75%.”这个结论可

信吗？为什么？

2. 某地区在2009年至2013年5年间，共出生婴儿29 362人，其中男婴14 900人. 据此分别估计该地区生男孩和生女孩的概率.

习　题

A　组

1. 为了解某电视节目的收视率，三家新闻单位分别进行了调查，结果如下表：

A单位的调查结果			B单位的调查结果			C单位的调查结果		
调查人数	收看人数	收视率	调查人数	收看人数	收视率	调查人数	收看人数	收视率
100	30	30%	1000	256	25.6%	3 000	693	23.1%

你认为哪家新闻单位调查到的收视率可能更准确些？为什么？

2. 将一枚硬币的一面贴上号码1，另一面贴上号码2，掷硬币两次，观察掷出的两个号码的积. 设A=“积是2”. 对160次试验数据进行整理的结果如下表：

试验次数	10	20	40	60	80	100	120	140	160
A发生的次数	3	8	25	27	37	53	63	72	78
A发生的频率									

(1) 用计算器计算A发生的频率，并填表.
(2) 根据表中数据绘制折线统计图.
(3) 随着试验次数的增大，频率稳定到什么数附近？
(4) 根据频率估计“积是2”发生的概率.
(5) 直接计算“积是1”“积是2”和“积是4”的概率.

B　组

准备3个乒乓球，分别标上号码1，2，3，放入盒子中，按下列要求做摸球试验，并规定摸到1号球算“成功”.

(1) 甲、乙、丙三人按甲→乙→丙的固定顺序有放回地依次摸出1个球. 猜想甲、乙、丙“成功”的概率各是多大.
(2) 全班同学分为10组，每组按规定做30次重复试验，汇总全班的试验数据，计算“成功”发生的频率，验证你的猜想是否正确.

31.4 用列举法求简单事件的概率

如果一个随机试验只有有限个等可能的结果，我们可以利用图表，列举试验的所有可能结果及事件所包含的可能结果，直接计算事件的概率.

如图 31-4-1，一个质地均匀的正四面体(四个面都是等边三角形)，四个面上分别标有数字 1，2，3，4. 投掷这个正四面体，然后观察底面上的数字.

一起探究

1. 投掷一次，有多少种可能结果？它们发生的可能性相同吗，概率各是多大？
2. 投掷两次，共有多少种可能结果？如何表示这些可能结果？
3. 如何计算两数之和为 2，3，…，8 的概率？

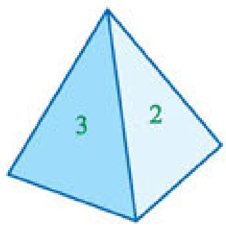


图 31-4-1

投掷一次，有 4 种等可能的结果，它们发生的概率都是$\frac{1}{4}$.

投掷两次，有 16(4×4)种等可能的结果，用(m, n)表示两次投掷的结果，其中 m 为第一次掷出的数，n 为第二次掷出的数，m 和 n 分别可能是 1，2，3，4. 所有可能的结果以及对应的两个数的和可分别用下面的表格表示：

m \ n	1	2	3	4
1	(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)
2	(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)
3	(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)
4	(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

从表中可以看出，投掷两次所发生的可能结果及对应的两个数的和.
如：投掷两次，事件“两数之和为 4”包含 3 种等可能的结果，分别是(1，3)，(2，2)，(3，1)，所以“两数之和为 4”的概率是$\frac{3}{16}$.

做一做

对投掷正四面体的试验，分别求出两数之和为 2，3，5，6，7，8 的概率，并填入下面的表格中.

两数之和	2	3	5	6	7	8
概率						

例 如图 31－4－2，四个开关按钮中有两个各控制一盏灯，另两个按钮控制一个发音装置. 当连续按对两个按钮点亮两盏灯时，“闯关成功”；而只要按错一个按钮，就会发出“闯关失败”的声音. 求“闯关成功”的概率.

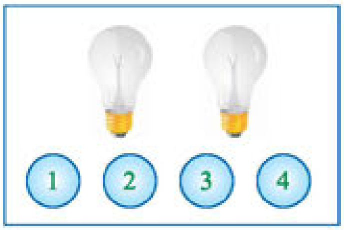


图 31－4－2

解：不妨设 1 号，2 号按钮各控制一盏灯，

连续按两个按钮(不考虑按钮的顺序)的所有可能结果列表如下：

按钮代号	12	13	14	23	24	34
结果	成功	失败	失败	失败	失败	失败

所有可能结果有 6 种，它们都是等可能发生的，而其中只有一种结果为“闯关成功”，所以，P(闯关成功)$=\frac{1}{6}$.

练　习

对本节“一起探究”投掷正四面体的试验，求下列事件的概率.

$A=$“两数之和为偶数”.

$B=$“两数之和为奇数”.

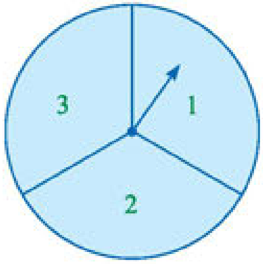
$C=$“两数之和大于 5”.

$D=$“两数之和为 3 的倍数”.

习 题

A 组

1. 将四个面分别标有 1，2，3，4 的正四面体连续投掷两次，用两次投掷底面上的数字按投掷顺序组成一个两位数(第一次掷出的数为十位数，第二次掷出的数为个位数)，求下列事件的概率.
   (1) 这个两位数是偶数.
   (2) 这个两位数是奇数.
   (3) 这个两位数的个位数和十位数相同.
2. 如图，将一个圆盘等分成三个扇形，分别标上数字 1，2，3，指针不动，转动圆盘两次，等圆盘停下时，由指针指向区域各得到一个数，把这两个数组成一个数对 (m, n).
   (1) 用表格表示所有可能结果.
   (2) 分别求两数的和是 2，3，4，5，6 的概率.
   (3) 分别求两数之和为偶数和奇数的概率.



(第 2 题)

3. “锤子、剪刀、布”是一个古老的儿童游戏，三种不同手势分别代表锤子、剪刀和布. 规则是：锤子胜剪刀，剪刀胜布，布胜锤子；当两人做出相同的手势时，不能决定胜负. 设甲、乙两人都等可能地采用三种手势.
   (1) 求一个回合不能决定胜负的概率.
   (2) 分别求甲、乙获胜的概率.
   (3) 用这种方式决定胜负公平吗?

乙 / 甲			
	平	甲胜	乙胜
	乙胜	平	甲胜
	甲胜	乙胜	平

(第 3 题)

B 组

1. 在本节例题的闯关游戏中，如果四个开关按钮中有三个各控制一盏灯，连续按三个按钮，能点亮三盏灯的概率是多大?
2. 袋子中有 3 个红球，2 个黄球. 甲先从中任取 1 个球，取后不放回，乙再从中任取 1 个球. 用表格列举试验结果，分别求下列事件的概率.
   (1) 甲取到红球.
   (2) 乙取到红球.
   (3) 两人都取到红球.

在一次知识竞赛中，有三名同学都答对了，但奖品只有一份，谁应该得到这份奖品呢？他们决定用抽签的方式来确定.

取 3 张大小相同，分别标有数字 1，2，3 的卡片，充分混匀后扣到桌子上，按甲、乙、丙的顺序，每人从中任意抽取 1 张(取后不放回)，规定抽到 1 号卡片的人中奖. 中奖的概率和抽签的顺序有关吗？

大家谈谈

下面是三名同学的看法，你同意谁的观点？请说出你的理由.

小明的看法	小亮的看法	小红的看法
先下手为强，如果我先抽到 1 号卡片，后面的人就没有机会了.	后发制人，如果前面的人都没有抽中，机会就全是我的了.	中奖的机会是一样的，与抽签的顺序无关.

我们首先来描述三人按先后顺序抽签的所有可能结果.

用“123”表示甲抽到 1 号卡片、乙抽到 2 号卡片、丙抽到 3 号卡片的结果，依此类推.

甲抽取时有 3 种可能，乙抽取时有 2 种可能，丙抽取时只有 1 种可能. 用图形表示可能结果，如图 31 - 4 - 3.

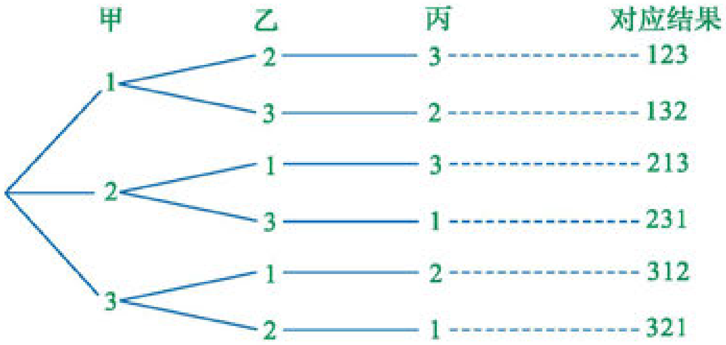


图 31 - 4 - 3

还可以用如下的表格列举试验的可能结果.

甲	1	1	2	2	3	3
乙	2	3	1	3	1	2
丙	3	2	3	1	2	1

容易看出，三个人依次抽签，有 6 种等可能的结果，而甲、乙、丙抽到 1 号卡片各有 2 种可能结果，所以甲、乙、丙中奖的概率都是$\frac{1}{3}$.

如果三个人参加抽签，但有两份奖品，规定抽到 1 号或 2 号卡片都可以中奖，则甲、乙、丙中奖的概率都是$\frac{2}{3}$.

事实上，抽签不分先后顺序，每个人中奖的概率都相等.

做一做

如图 31－4－4，一木板上均匀地钉有几排钉子，将一小球从顶端放入，小球碰到钉子后等可能地向左或向右落下，最后落入下面的格子中.

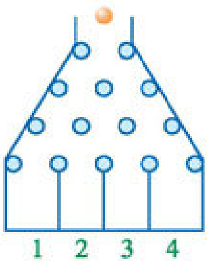


图 31－4－4

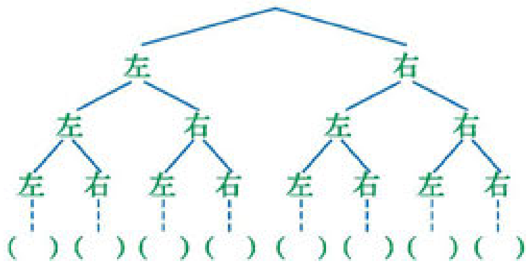


图 31－4－5

（1）图 31－4－5 表示小球下落的所有可能路径. 对应每条路径，将小球最后落入格子的号码填写在图下方的括号内.

（2）计算小球最后落入 1 号、2 号、3 号、4 号格子中的概率.

像图 31－4－3 和图 31－4－5 这样的图形，叫做**树形图**(tree diagram). 树形图可以清楚地表示试验结果. 在同一层，如果从每个节点等可能地分出数目相同的分支，那么整个树形图的所有分支数目就是试验的可能结果个数，而且这些结果都是等可能的.

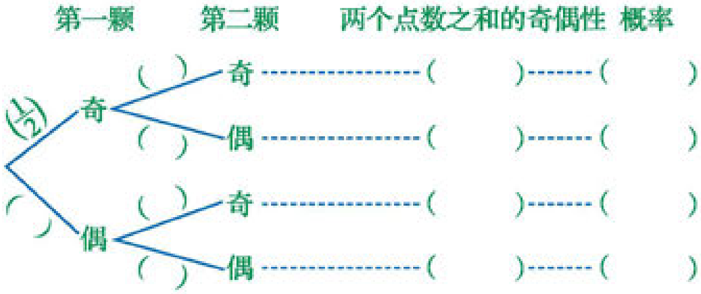
练 习

掷两颗骰子，得到两个点数，计算两个点数之和.

（1）在树形图的括号内填写适当的数或结果.

（2）判断树形图的 4 个分支对应的事件是否等可能.

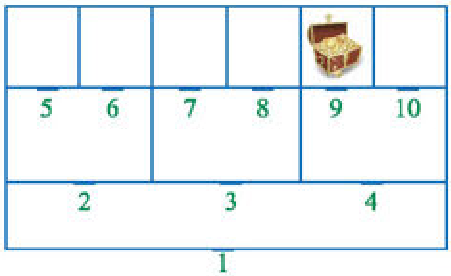
（3）分别求“点数之和为奇数”和“点数之和为偶数”的概率.



习 题

A 组

1. 小红有红色、黄色、白色三件衬衣，有红色和蓝色两条裙子，任取一件上衣，并任取一条裙子，求它们恰好都是红色的概率.
2. 如图，在上排六个房间中的某个房间内放有一个存宝箱，1～10 各是一扇可以打开的门. 假如你事先不知道存宝箱在哪里，从 1 号门进入后，只允许再打开两扇门，则能找到存宝箱的概率是多大？



（第 2 题）

3. 从 1，2，3，4 四个数字中任取两个，按顺序组成没有重复数字的两位数，求组成的两位数是偶数的概率.

B 组

1. 掷 3 枚质地均匀的硬币，求下列事件的概率.
   (1) 3 枚全是反面向上.
   (2) 2 枚正面向上，1 枚反面向上.
2. 甲、乙、丙三名同学做传球练习，先由甲等可能地将球传给乙或丙，每人接到球后又等可能地传给其他两人. 画树形图，求三次传球后球分别在甲、乙、丙手中的概率.

数学活动

蒲丰投针试验

1777 年，法国科学家蒲丰（Buffon，1707～1788）提出了一个著名的问题：在平面上画一些平行线，相邻两条平行线之间的距离都是 a，向这个平面上任意投一长度为 l（$l<a$）的针，那么针与任一平行线相交的概率是多大？

活动一：做类似的试验.

在平整的地面上用粉笔画一些平行线，相邻两条平行线之间的距离都是 a（$a=30$ cm），将一根长为 l（$l=25$ cm）的筷子投向平行线所在的区域，观察筷子和平行线是否相交. 记事件 $A=$“筷子与平行线相交”.

分 8 个小组做投筷子试验，每个小组做 100 次重复试验，记录事件 A 发生的次数，计算事件 A 发生的频率，将结果填入下表.

小组编号	1	2	3	4	5	6	7	8	合计
投掷次数									
A 发生的次数									
A 发生的频率									

活动二：比较结果.

(1) 经理论计算，可知 $P(A)=\frac{2l}{\pi a}$. 将 $a=30$ cm，$l=25$ cm 代入公式中，计算事件 A 的概率 $P(A)$.

(2) 用上面每组得到的频率值估计事件 A 的概率，看看它们与 $P(A)$ 的误差分别是多大.

(3) 汇总各组试验结果，看看 800 次重复试验得到的频率是否与 $P(A)$ 更接近些.

活动三：求 π 的近似值.

筷子与平行线相交的概率与圆周率 π 有关，用频率作为概率的近似值，借助 $P(A)=\frac{2l}{\pi a}$，就可以求得 π 的近似值. 根据 800 次试验的结果，求 π 的近似值.

回顾与反思

一、知识结构

随机事件 → 事件的概率 → 合理决策

在等可能的条件下，用列举法求事件的概率

通过做重复试验，用稳定时的频率估计事件的概率

二、总结与反思

大千世界中充满了不确定性，偶然中蕴含着必然规律．概率是研究随机现象规律性的学科．

1．在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情叫做随机事件．随机事件的发生具有偶然性，但在大量重复试验中，却呈现出确定的规律．用一个数值描述事件发生的可能性大小，这个数值就叫做事件的概率．

2．如果一个试验只有有限个等可能的结果，我们可以直接计算相关事件的概率．利用表格、树形图列举试验的可能结果，可帮助我们计算概率．

3．对于大量的随机事件，需要通过重复试验，用频率估计概率．频率具有稳定性，即当试验次数逐渐增加时，事件发生的频率逐渐稳定到一个常数附近，这个数就是事件的概率，或者说概率是频率的稳定值．用频率估计概率，得到的只是一个近似值．试验次数越大，得到较准确的估计值的可能性也越大．

4．(1) 举例说明什么是随机事件．

(2) 事件的频率和概率的关系是什么，主要区别在哪里？

(3) 计算事件的概率的一般步骤是什么？

(4) 举例说明概率在实际中的简单应用．

三、注意事项

在计算简单事件的概率时，要注意试验的所有可能结果是不是等可能的．

在随机试验中，经常用到的“随机抽取”“质地均匀”等词汇，都是为了保证试验结果的等可能性．

复习题

A 组

1. 一个袋子中有 2 个红球，1 个黄球，从中任意取出 2 个球. 在下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件？

A= “两球都是黄球”；B= “两球都是红球”；C= “一个红球一个黄球”.

2. 下列说法正确吗？请说明理由.

(1) 必然事件是发生的可能性很大的事情.

(2) 不可能事件是几乎不可能发生的事情.

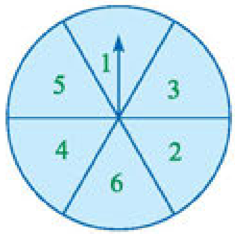
(3) 如果一个事件发生的机会达到 99.99%，那么它就是必然事件.

(4) 如果一个事件发生的机会只有百万分之一，那么它就是不可能事件.

3. 如图是一个可以转动的圆盘(指针固定不动)，六个扇形的圆心角相等. 转动圆盘，等它停止后，指针指向几就按顺时针方向走几格，得到一个数字.

(1) 分别求得到数字为偶数和奇数的概率.

(2) 请修改圆盘中的数字，使“得到偶数”与“得到奇数”具有相同的概率.



(第 3 题)

4. 有两个游戏，如果第一个游戏你获胜的概率为 0.8，第二个游戏你获胜的概率为 0.3，那么做第一个游戏你一定能赢吗，做第二个游戏你一定会输吗？

5. 从 10 到 99 这 90 个数中任意选取 1 个数. 求下列事件的概率.

A= “取到的是一位数”；　B= “取到的是两位数”；

C= “取到的是 2 的倍数”；　D= “取到的是 5 的倍数”.

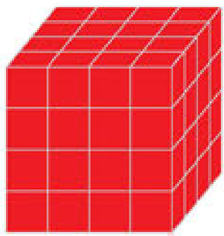
6. 把一个正方体木块的表面涂上红色，将该正方体木块分割成 64 个大小相同的小正方体，再将这些小正方体均匀地混合在一起，然后从中任意取出 1 个. 求下列事件的概率.

(1) 取到的小正方体各面都没有红色.

(2) 取到的小正方体一面有红色.

(3) 取到的小正方体两面有红色.

(4) 取到的小正方体三面有红色.


(第 6 题)

7. 两组标有字母的卡片各 7 张. 第一组标的字母分别为 C, H, I, N, E, S, E; 第二组标的字母分别为 E, N, G, L, I, S, H. 从两组卡片中各任取 1 张, 得到两个字母.

(1) 求两个字母相同的概率.

(2) 求两个字母都是元音字母的概率.

B 组

1. 从你所在班里任选一名同学当值日组长.

(1) 采用什么办法才能保证每名同学都有同样的机会被选到?

(2) 小明说, 任选一名同学, 选到的不是男生就是女生, 所以 “选到男生” 和 “选到女生” 的概率各是 $\frac{1}{2}$. 你同意这个说法吗? 为什么?

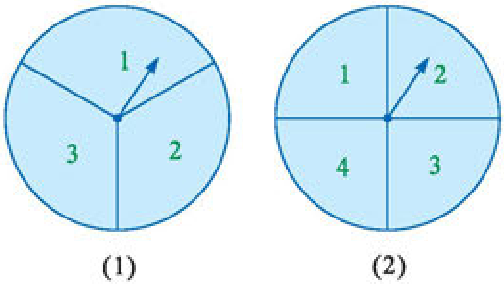
2. 为了估计一批产品的次品率, 小明任意抽查了 10 件产品, 发现有 1 件次品, 他估计次品率为 10%. 小刚任意抽查了 100 件产品, 发现有 4 件次品, 他估计次品率为 4%. 哪个结果更可信? 为什么?

3. 甲、乙两个工厂生产同一型号的家用电器, 甲厂产品的合格率为 95%, 乙厂产品的合格率为 99%. 如果价格和其他方面都相同, 你愿意购买哪个工厂的产品? 为什么?

4. 从长分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的六条线段中任意选择三条, 事件 A 表示 “这三条线段能构成三角形”. 计算事件 A 的概率.

5. 对四选一的选择题, 即使不会解题, 完全凭猜也有 $\frac{1}{4}$ 的概率得到正确答案. 为了防止乱猜, 现制订评分标准为: 答案正确得 3 分, 答案错误扣 1 分(得 −1 分). 做 100 道选择题, 完全凭猜测, 大约能得多少分?

6. 如图是两个可以转动的圆盘(指针固定不动, 两圆中扇形的圆心角分别相等), 同时转动两个圆盘, 等它们停下时, 圆盘(1)和(2)上的指针分别指向一个数. 设 A= “两数之和为奇数”, B= “两数之和为偶数”. 画树形图求事件 A 和 B 的概率.



(第 6 题)

C 组

1. 小明和小强玩一种游戏：从装有 3 个红球和 1 个黄球的袋子中，任意摸出一个球. 如果摸到黄球，小明得 4 分；如果摸到红球，小强得 1 分.

(1) 你认为这个游戏公平吗？为什么？

(2) 假设玩这个游戏 400 次，小明大约可得多少分，小强大约可得多少分？

(3) 如果你认为游戏不公平，那么怎样修改得分标准才公平？

2. 和同学合作，做抛掷图钉的试验，分别抛掷 10 次、20 次、…、200 次图钉，记录每一次试验中钉尖触地的次数，计算“钉尖触地”发生的频率，画折线统计图表示频率的变化情况.

试验次数	10	20	40	80	120	160	200
钉尖触地次数							
钉尖触地频率							

随着试验次数的增加，“钉尖触地”发生的频率是否趋于稳定？如果稳定，稳定到什么数附近？由此估计“钉尖触地”的概率.

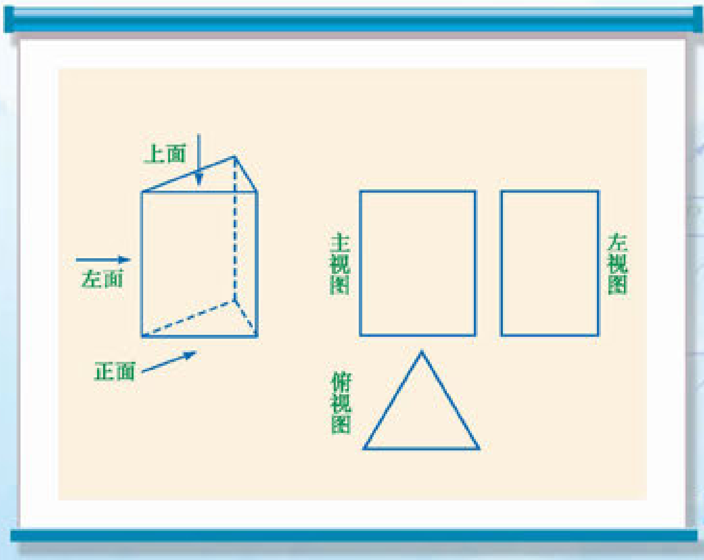
第三十二章

投影与视图

在本章中，我们将学习

- 投影
- 视图
- 直棱柱和圆锥的侧面展开图

从正面、左面和上面三个方向观察这个几何体，得到三个平面图形．你观察到的平面图形和这些图形一样吗？



32.1 投　影

物体在光线的照射下，会在投影面上形成投影. 物体的投影具有怎样的特征呢?

物体在光线的照射下会形成影子.

灯光下手的影子

烛光下笔的影子

阳光下日晷晷针的影子

探照灯下人物的影子

物体在光线的照射下，会在某个平面(墙面、地面等所在的平面)上留下它的影子，这种现象就是投影. 光线是投影线，这个平面是投影面.

蜡烛和灯泡的光线可以看做是从一点射出的. 像这样，由一点射出的光线照射在物体上所形成的投影，叫做**中心投影**(central projection).

太阳光线和探照灯的光线可以看做是平行的. 像这样，由平行光线照射在物体上所形成的投影，叫做**平行投影**(parallel projection).

大家谈谈

1. 如图 32-1-1，观察正方形的中心投影. 当投影面和物体的摆放位置不变时，光源距物体的远近与物体投影的大小有什么关系?

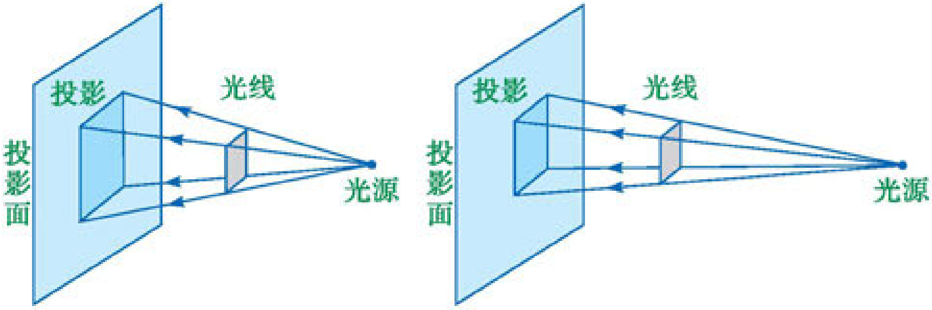


图 32－1－1

2. 当投影面和光源的位置不变时，物体的摆放位置与它的投影形状有什么关系？

一起探究

1. 如图 32－1－2，一束平行光线倾斜地照射在地面（投影面）上.

（1）立于地面上点 A 处的旗杆的高度与它投影的长短有什么关系？

（2）请你分别画出小明站在点 B 处和点 C 处时的投影（用线段表示），并比较他在这两处投影的长短.

（3）旗杆高与它投影长的比，小明身高与他投影长的比，二者之间有什么关系？

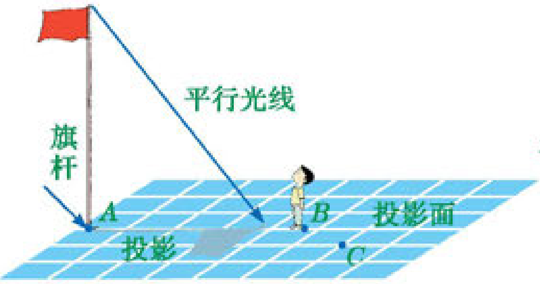


图 32－1－2

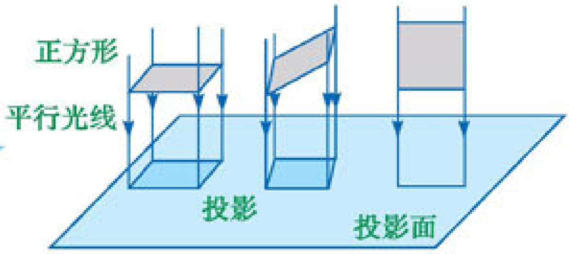


图 32－1－3

2. 如图 32－1－3，一束平行光线垂直地照射在地面（投影面）上.

（1）正方形纸片摆放位置距离地面的远近与它投影的形状有没有关系？

（2）当正方形纸片水平放置、倾斜放置和竖立放置时，分别说出它的投影的形状.

平行投影又分为两种形式，一种为投影线倾斜于投影面，一种为投影线垂直于投影面. 我们把投影线垂直照射在投影面上的物体的投影叫做**正投影**(orthographic projection). 图 32－1－3 中，正方形纸片的投影都是正投影.

观察与思考

如图 32－1－4，已知正方体的 R 面与投影面是平行的，它在投影面上的正投影是四边形 $A'B'C'D'$.

（1）四边形 $A'B'C'D'$ 是什么四边形？正方体 R 面对面的正投影是什么图形？

（2）正方体 Q 面和 P 面的正投影分别是什么图形？

（3）正方体棱 AB 和棱 AE 的正投影分别是什么图形？正方体顶点 A 和顶点 E 的正投影分别是什么图形？

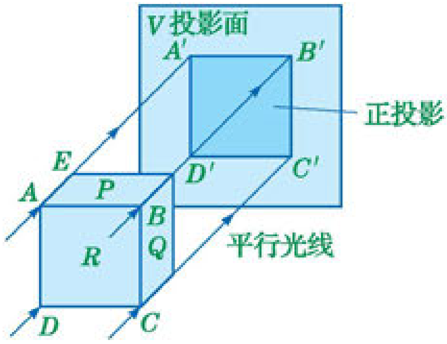
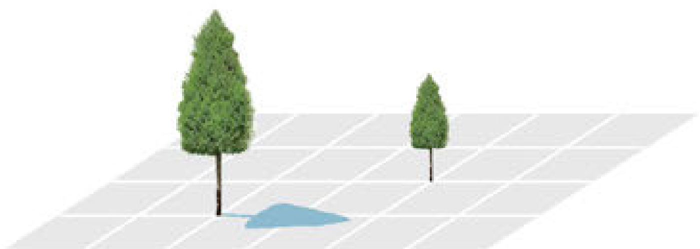


图 32－1－4

练 习

1. 如图，根据大树在阳光下的投影，画出另一棵小树的投影(用线段表示).



（第 1 题）

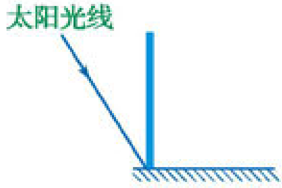
（第 2 题）

2. 如图，小明站在路灯下，以路灯为点光源，请画出小明(抽象为线段)在地面上的中心投影(用线段表示).

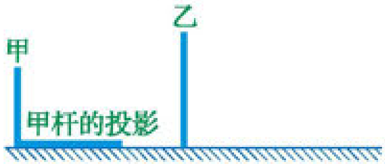
习 题

A 组

1. 如图，请画出一根直立于地面的标杆的投影(用线段表示).



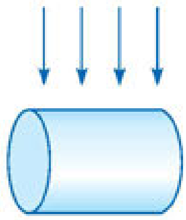
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，请根据甲杆在阳光下的投影，画出乙杆的投影(用线段表示).

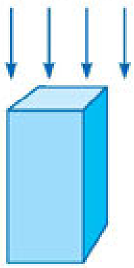
3. 请根据图中给出的投影线，画出圆柱的正投影.



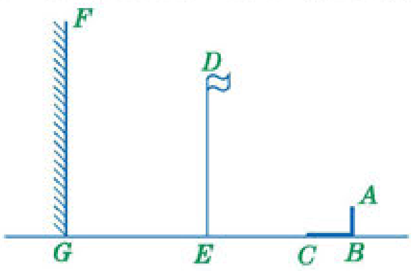
（第 3 题）

B 组

1. 按照图中给出的投影线，画出上、下底面都是正方形的长方体的正投影.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，小明和他在阳光下的影子分别以线段 AB，BC 表示，旗杆和墙分别以线段 DE，FG 表示.

   (1) 请在图中画出旗杆在同一时刻阳光照射下的影子.

   (2) 如果 $AB=1.6$ m，$BC=2.4$ m，$DE=15$ m，旗杆与墙的距离 $EG=17.7$ m，那么旗杆的影子落在墙上的长度是多少米?

32.2 视 图

在工程设计中，立体图形的形状往往是以平面图形来刻画的. 借助正投影，可实现立体图形和平面图形之间的相互转化.

观察与思考

1. 如图 32-2-1，左边几何体的正投影(1)，(2)，(3)分别是从几何体的哪个方向上得到的？

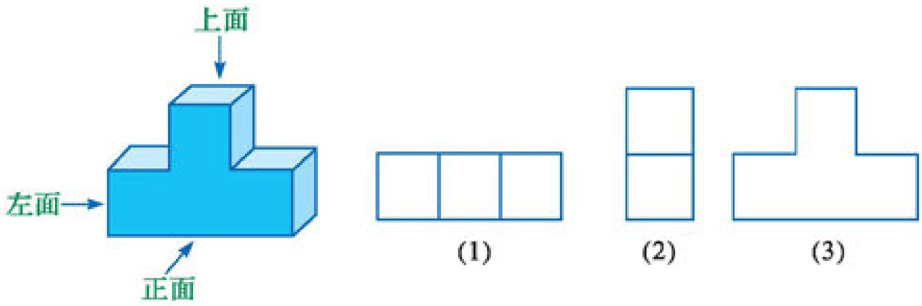


图 32-2-1

2. 如图 32-2-2，对于给出的几何体，思考并回答下列问题：

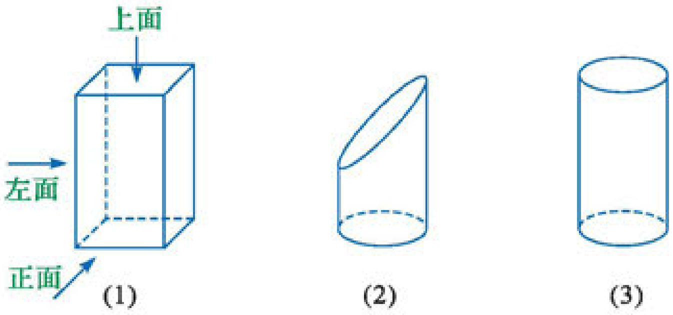


图 32-2-2

(1) 对于(2)，(3)这两个几何体，只从它们上面的正投影，我们能确定这两个几何体的形状吗？

(2) 对于(1)，(3)这两个几何体，只从它们正面和左面的正投影，我们能确定这两个几何体的形状吗？

(3) 对于这三个几何体，分别从它们的正面、左面和上面的正投影，我

们能确定这三个几何体的形状吗?

一般地，用几何体的正面、左面和上面三个不同方向上的正投影，就可以刻画出这个几何体的形状与大小了.

一个几何体的正投影，又叫做这个几何体的**视图**. 从正面得到的视图叫做**主视图**，从上面得到的视图叫做**俯视图**，从左面得到的视图叫做**左视图**.

下面，我们约定面对几何体的一面为几何体的正面，由左向右方向的一面为几何体的左面，竖直向下方向的一面为几何体的上面.

如图 32－2－3，图(1)这个几何体的主视图、俯视图和左视图如图(2)所示.

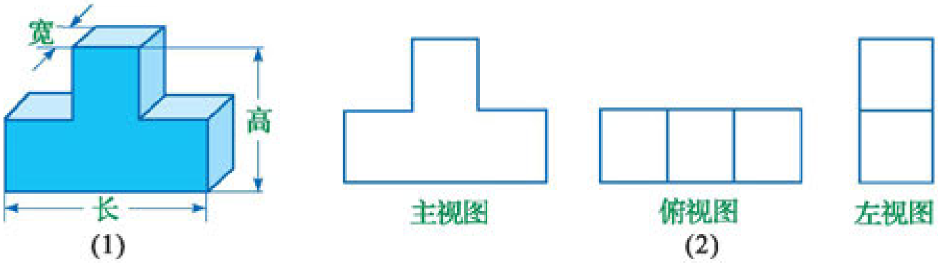


图 32－2－3

例 1 画出如图 32－2－4 所示圆柱的主视图、俯视图和左视图.

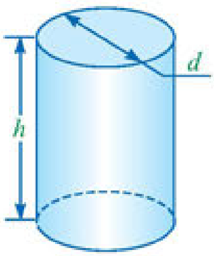


图 32－2－4

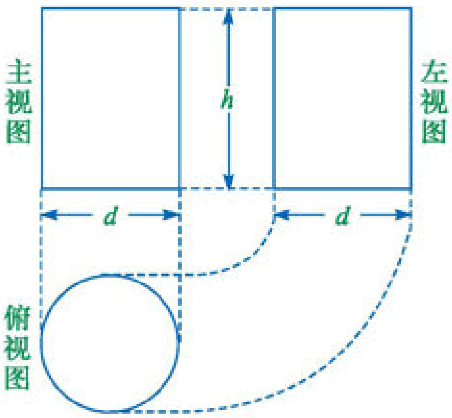


图 32－2－5

解：如图 32－2－5，圆柱的主视图是一个长方形，长方形的长和宽分别等于圆柱的高和圆柱底面圆的直径；它的俯视图是一个圆，圆的直径等于圆柱底面圆的直径；它的左视图也是一个长方形，长方形的长和宽分别等于圆柱的高和圆柱底面圆的直径.

在几何体的主视图、俯视图和左视图中，主视图可反映出几何体的长和高，俯视图可反映出几何体的长和宽，左视图可反映出几何体的高和宽.

视图的摆放位置一般是：俯视图在主视图的下面，左视图在主视图的右面，并且应当是“长对正，高平齐，宽相等”.

做一做

1. 如图 32－2－6，已知圆锥的主视图和左视图，请再画出这个圆锥的俯视图.

2. 如图 32－2－7，请画出球的主视图、俯视图和左视图.

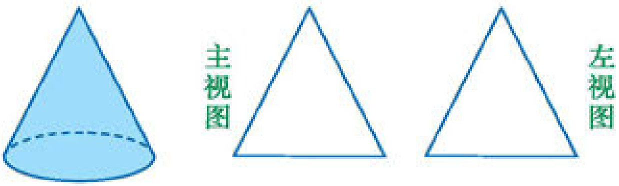


图 32－2－6

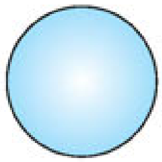
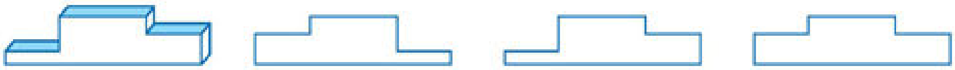


图 32－2－7

练　习

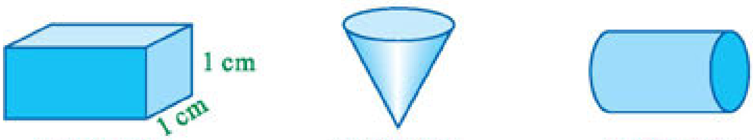
1. 下面(1)，(2)，(3)三幅图中，哪幅图是领奖台的主视图？



领奖台　　(1)　　(2)　　(3)

（第 1 题）

2. 按要求画出下列几何体的视图.



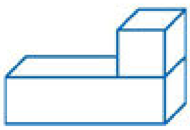
(画左视图)　　(画主视图)　　(画俯视图)

（第 2 题）

习　题

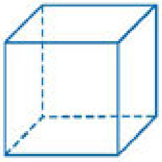
A　组

1. 如图，画出几何体的主视图、俯视图和左视图.

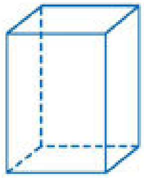


（第 1 题）

2. 如图，画出正方体的主视图、俯视图和左视图.



（第 2 题）



（第 3 题）

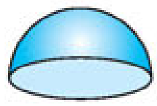
3. 如图，画出上、下底面都是正方形的长方体的主视图、俯视图和左视图.

B 组

1. (1) 有没有主视图和左视图完全相同的几何体？如果有，请举例说明.

   (2) 有没有主视图、俯视图和左视图完全相同的几何体？如果有，请举例说明.

2. 如图，画出半球的主视图、俯视图和左视图.



（第 2 题）

我们把两个底面平行、棱垂直于底面的棱柱，叫做直棱柱．在没有特殊说明的情况下，以后所指棱柱都是直棱柱.

观察与思考

如图 32－2－8 所示为底面是等边三角形的三棱柱．小明画出的三棱柱的主视图、俯视图和左视图如图 32－2－9 所示．你认为他画的视图能完全反映三棱柱的特征吗？

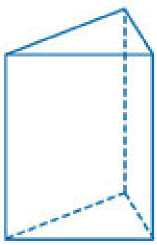


图 32－2－8

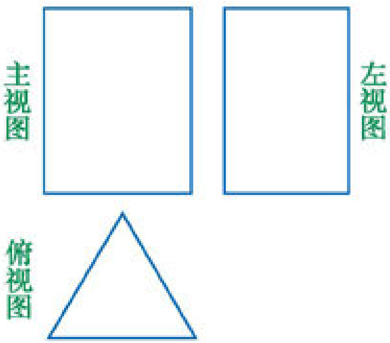


图 32－2－9

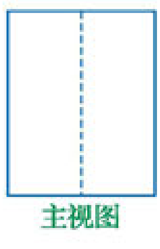


图 32－2－10

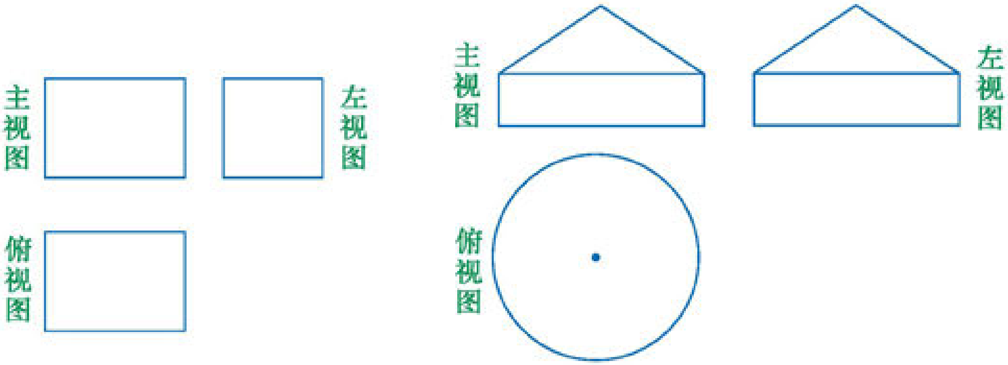
这个三棱柱的主视图中有一条线看不见，应画成虚线，如图 32－2－10 所示.

例 2 如图 32－2－11，分别画出四棱柱(左、右两个面为正方形)和蒙古包模型(上部是圆锥，下部是圆柱)的主视图、俯视图和左视图.

(1)　　(2)

图 32－2－11

解：如图 32－2－12 所示.



(1) 四棱柱视图　　(2) 蒙古包模型视图

图 32－2－12

做一做

1. 如图 32－2－13，画出组合体(由 5 个相同的小正方体构成)的主视图、俯视图和左视图.

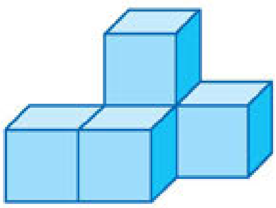


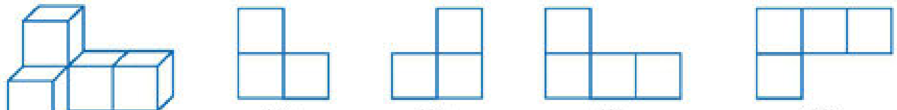
图 32－2－13

图 32－2－14

2. 如图 32－2－14，画出螺栓(上部是圆柱，下部是六棱柱)的主视图、俯视图和左视图.

练 习

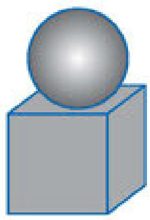
1. 如图，由 5 个相同小正方体构成的组合体的俯视图为________.


(1) (2) (3) (4)

（第 1 题）

2. 如图，画出底面为正五边形的五棱柱的主视图、俯视图和左视图.

（第 2 题）



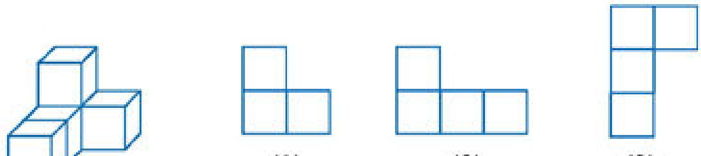
（第 3 题）

3. 如图，画出这个组合体（下部是正方体，上部是球，球的直径等于正方体的棱长）的主视图、俯视图和左视图.

习 题

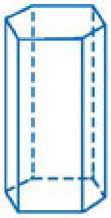
A 组

1. 如图，分别指出右边三幅图为左边组合体（由一些正方体构成）的哪种视图.

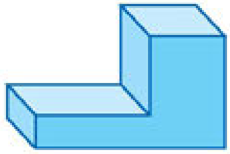

(1) (2) (3)

（第 1 题）

2. 如图，画出底面为正六边形的六棱柱的主视图、俯视图和左视图.



（第 2 题）

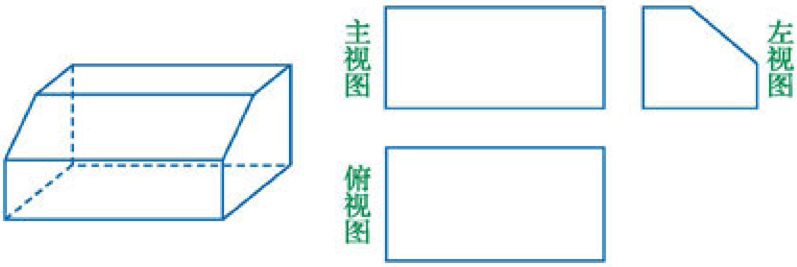


（第 3 题）

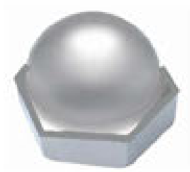
3. 如图，画出这个零件模型的主视图、俯视图和左视图.

B 组

1. 如图，请补全图中几何体的三个视图.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，画出螺母（上部是半球，下部是六棱柱）的主视图、俯视图和左视图.

一起探究

1. 如图 32－2－15，根据视图，分别描述相应几何体的形状.

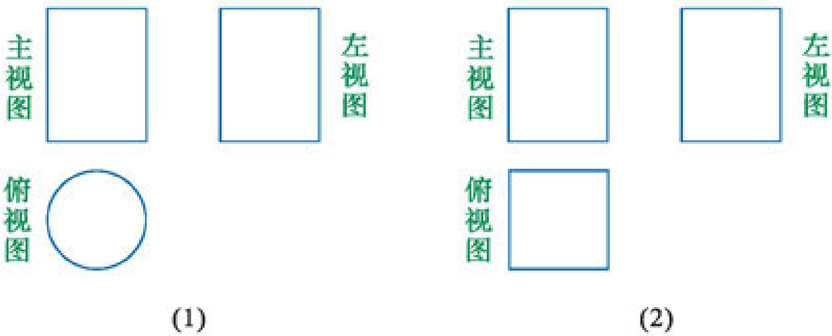


图 32－2－15

2. 一个几何体的主视图和左视图如图 32－2－16(1)所示，它可能是哪种

几何体？一个几何体的俯视图如图 32－2－16(2)所示，它可能是哪种几何体？

(1)　　　　(2)

图 32－2－16

3. 两个几何体构成的组合体的视图如图 32－2－17 所示，这个组合体是由什么样的几何体组成的？

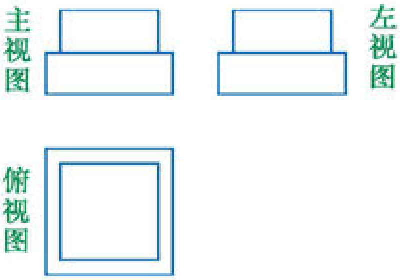
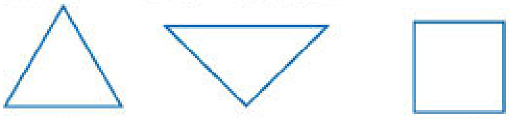


图 32－2－17

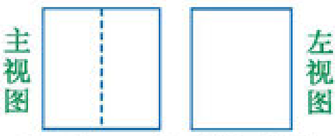
例 3　如图 32－2－18，图(1)、图(2)、图(3)分别是底面为正三角形、等腰直角三角形的三棱柱和底面为正方形的四棱柱的俯视图，分别画出它们的主视图和左视图.（棱柱的高都是 1.6 cm）



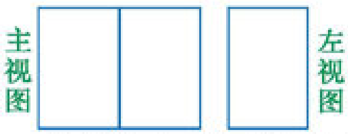
(1)　　　　(2)　　　　(3)

图 32－2－18

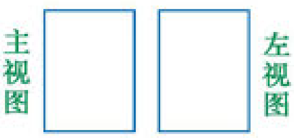
解：如图 32－2－19 所示.



底面为正三角形的三棱柱



底面为等腰直角三角形的三棱柱

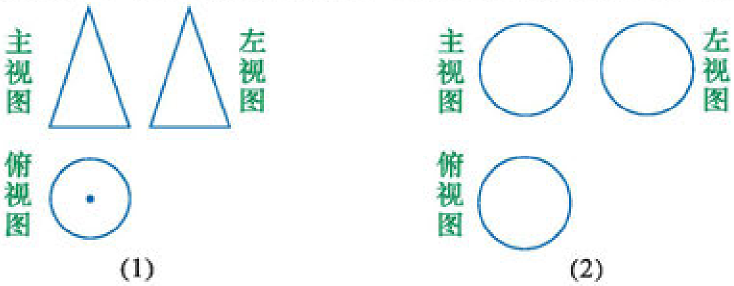


底面为正方形的四棱柱

图 32－2－19

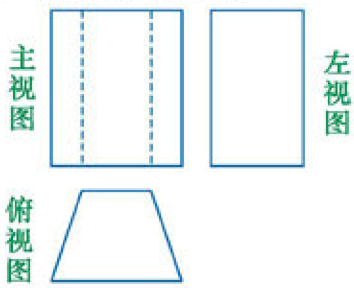
练 习

1. 请根据下面两组几何体的视图，分别描述它们各是什么几何体.



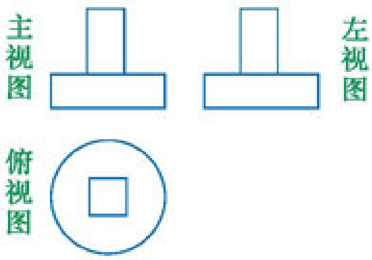
（第 1 题）

2. 根据下面的视图，画出几何体的草图.



（第 2 题）

3. 如图，已知两个几何体构成的组合体的视图，则这两个几何体分别是哪种几何体？



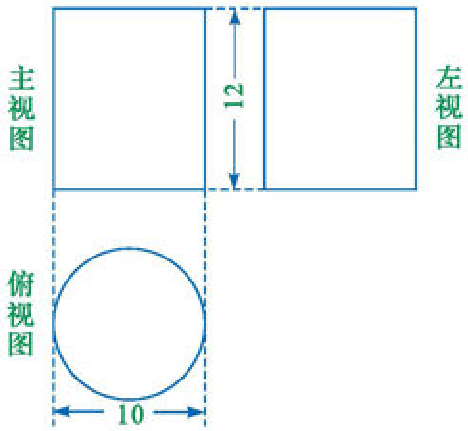
（第 3 题）

习 题

A 组

1. 如图，已知一个几何体的视图. 请根据视图描述该几何体的形状，并计算

它的体积．（结果保留 π，单位：mm）

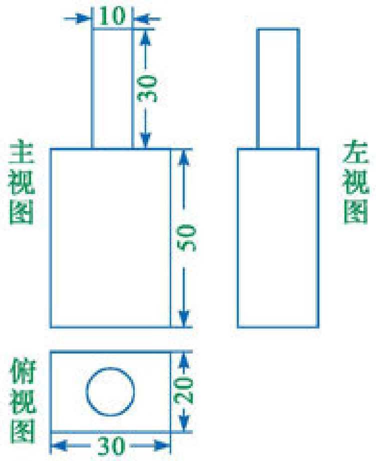


（第 1 题）

2．如图，已知一个几何体的视图．（单位：mm）

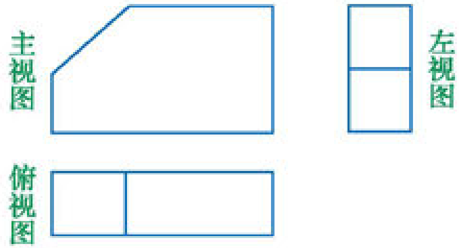
（1）描述这个几何体的形状．

（2）计算这个几何体的体积．



（第 2 题）

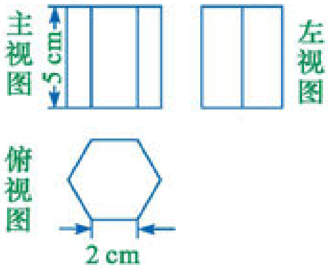
3．请根据如图所示的视图，描述相应几何体的形状．



（第 3 题）

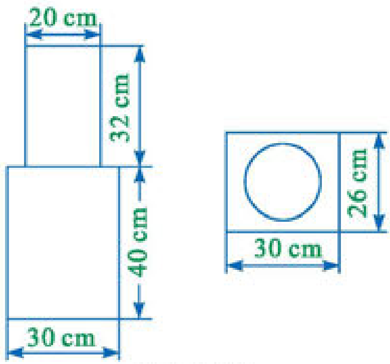
B 组

1. 如图，已知某型号的正六角螺母的视图. 它的表面积(侧面积、上底面积和下底面积之和)为________cm².



（第 1 题）

2. 如图所示为一个几何体的视图(左图为主视图，右图为俯视图)，求该几何体的体积. (π 取 3.14)



（第 2 题）

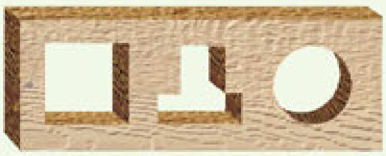
读 一 读

有趣的三用塞子

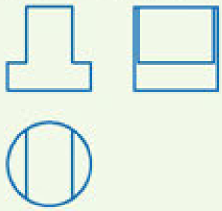
视图的原理在生活中有着广泛的应用.

例如，木板上有三个孔，孔的形状分别是正方形、倒“T”形和圆（图(1)）. 如果只用一个塞子，使得它能堵住每一个孔，塞子的形状应是什么样的?

其实，由木板上三个孔的形状我们就可以知道塞子的主视图、俯视图和左视图分别是倒“T”形、圆和正方形(图(2))了，再由这三个视图，就可以想象出塞子的形状. 于是我们就可以设计制作这个塞子了(图(3)).



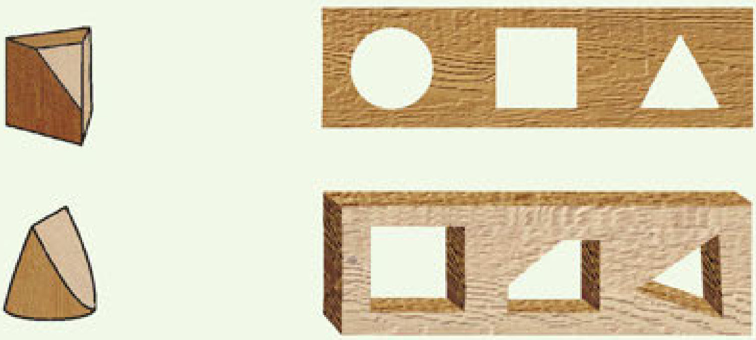
(1)



(2)

(3)

类似的三用塞子还有以下形状的. 你能指出这两个塞子分别能堵住哪块木板上的三个孔吗?



32.3 直棱柱和圆锥的侧面展开图

圆柱和圆锥都可以沿它们的母线展开成平面图形．直棱柱的侧面展开图是怎样的呢？

如图 32－3－1，底面为正六边形的六棱柱，沿它的一条侧棱展开，就得到了这个六棱柱的侧面展开图．

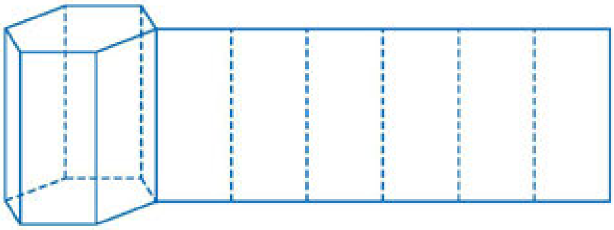


图 32－3－1

观察与思考

1．在图 32－3－1 中，六棱柱的侧面展开图为长方形．这个长方形的长和宽分别与棱柱底面的周长和侧棱长有什么关系？

2．如图 32－3－2，底面为多边形的棱柱侧面展开图是长方形吗？如果是长方形，那么它的长和宽分别与棱柱底面的周长和侧棱长有什么关系？

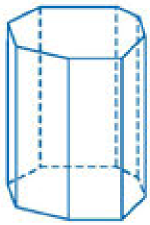
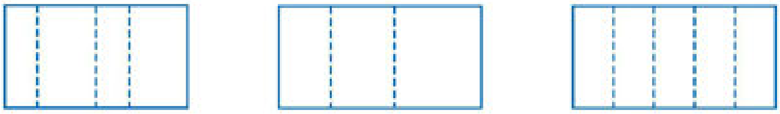


图 32－3－2

大家谈谈

如图 32－3－3，已知三个棱柱的侧面展开图，请说说它们分别是什么样的棱柱．



(1) (2) (3)

图 32－3－3

做一做

（1）在硬纸片上画一个半径为 6 cm，圆心角为 $216°$ 的扇形．将这个扇形剪下来，按图 32－3－4 所示围成一个圆锥的侧面．指出这个圆锥的母线长．

（2）用一块硬纸片剪出这个圆锥的底面，和(1)中圆锥的侧面一起做成一个圆锥．（黏合部分忽略不计）

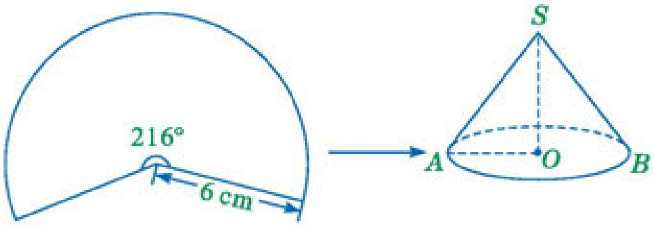


图 32－3－4

几何体可以按它的侧面展开，也可以按它的表面展开．

例 如图 32－3－5 所示为一个正方体．按棱画出它的一种表面展开图．

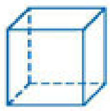


图 32－3－5

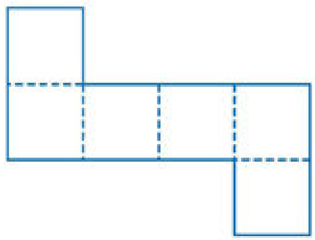


图 32－3－6

解：按棱展开的方式有多种，其中一种如图 32－3－6 所示．

一起探究

如图 32－3－7，已知一个长方体纸箱的长、宽和高分别为 30 cm，20 cm，10 cm．一只昆虫从纸箱的顶点 A 处沿纸箱表面 $ACDE$ 和表面 $GEDB$ 爬到另一个顶点 B 处．它沿哪条路线爬行的距离最短？请说明理由，并求出这个最短距离．（结果保留两位小数）

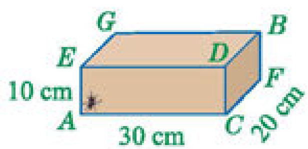


图 32－3－7

如图 32－3－8，将这个长方体纸箱的表面展开，连接 AB. 根据“两点之间线段最短”，可知线段 AB 就是昆虫爬行距离最短的路线.

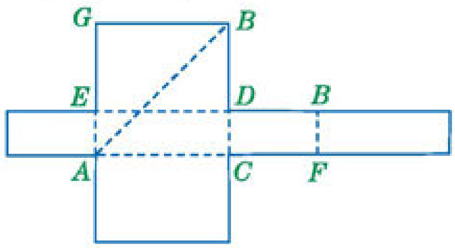


图 32－3－8

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=30$ cm，$BC=BD+CD=20+10=30$(cm).

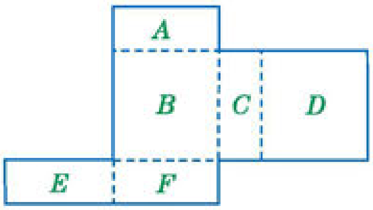
根据勾股定理，得

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{30^2+30^2}=30\sqrt{2}\approx 42.43(\text{cm}).$$

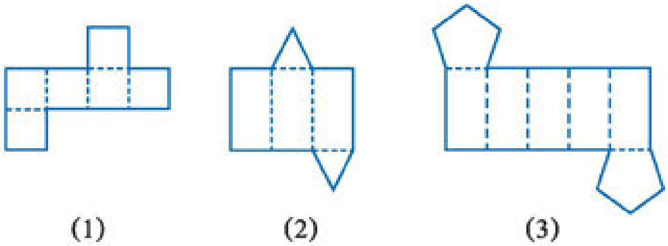
即昆虫最短爬行路线的距离约为 42.43 cm.

练　习

1. 一个长方体的每个面上都标有字母，它的表面展开图如图所示. 请指出在这个长方体上，面 A 和面 B 的对面分别是哪个面，与面 C 相邻的面是哪些面.



(第 1 题)



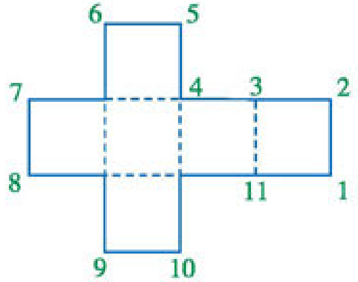
(第 2 题)

2. 如图，先分别按各几何体表面展开图中的虚线进行折叠，再指出折叠后构成的几何体的形状.

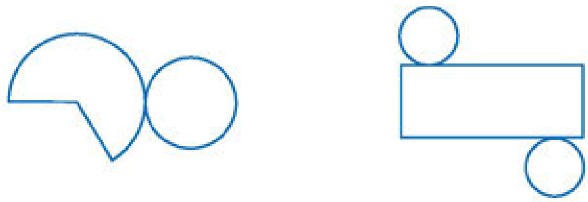
习　题

A 组

1. 如图，把图中所示的硬纸片沿虚线折成正方体后，“6”表示的顶点与哪些数表示的顶点重合?



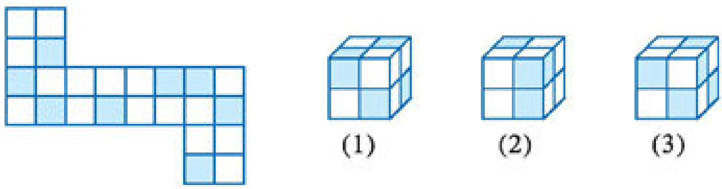
（第 1 题）


（第 2 题）

2. 如图，分别把两个几何体的表面展开图围成几何体，请指出这两个几何体的形状.
3. 用一块长为 12 cm、宽为 5 cm 的长方形硬纸片作侧面，做一个底面是正方形的四棱柱.

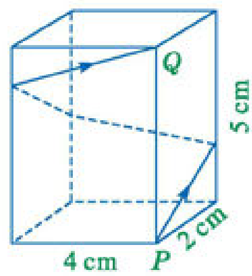
B 组

1. 如图，左边的平面图形是由右边的某个正方体表面展开得到的，这个正方体是哪个？



（第 1 题）

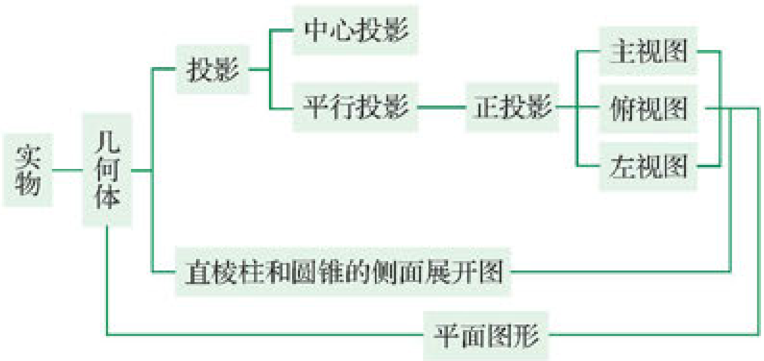
2. 如图，长方体的长、宽和高分别为 4 cm，2 cm，5 cm. 若一只蚂蚁从点 P 处开始，经过 4 个侧面爬行一圈到达点 Q 处，则蚂蚁爬行的最短路线的长是多少厘米？



（第 2 题）

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

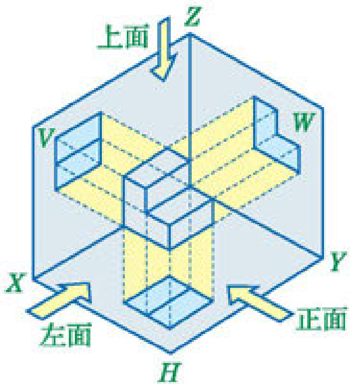
在本章中，我们主要学习了平行投影、中心投影、视图以及简单几何体的侧面展开图等内容．几何体的主视图、俯视图、左视图和表面展开图，揭示了几何体与平面图形的联系．通过对这部分内容的研究，我们认识了从“立体”向“平面”转化的两种方法，体会了通过把几何体转化为平面图形来揭示和研究几何体的基本方法．

1．中心投影和平行投影．

中心投影的投影线是从一点射出的，平行投影的投影线是平行的．平行投影又分为斜投影和正投影，我们只学习了投影线与投影面垂直的正投影．光源相对于物体的位置，决定了物体投影的形状、位置和大小．

2．视图．

如图，几何体的主视图、俯视图和左视图可分别看做是它在三个互相垂直的投影面上的正投影．一个物体的主视图、俯视图和左视图基本上就能反映它的形状了．



已知几何体，可以画出它的主视图、俯视图和左视图．反过来，已知几何体的主视图、俯视图和左视图，也可以确定这个几何体的形状和大小．

3．圆柱、直棱柱和圆锥的侧面展开图．

几何体的侧面展开图都是平面图形．圆柱和直棱柱的侧面展开图都是矩

形，圆锥的侧面展开图是扇形．几何体的表面展开图也是平面图形，它是侧面展开图和底面展开图的组合图形．

三、注意事项

1．在画视图时，看得见的轮廓线要画成实线，看不见的轮廓线要画成虚线．

2．视图应按如图所示的位置摆放，且应按“长对正，高平齐，宽相等”的要求画图．

复习题

A 组

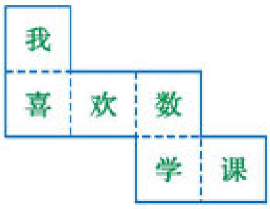
1．填空：

（1）一个几何体的主视图、俯视图和左视图都是圆，这个几何体为________．一个几何体的主视图、俯视图和左视图都是正方形，这个几何体为________．

（2）明明和爸爸玩“手影”游戏，爸爸的手大，手影做出了一只大“狗”；明明的手小，但却做出了一只更大的“狗”．光源位置固定，明明的手比爸爸的手离墙面________（填“近”或“远”）．

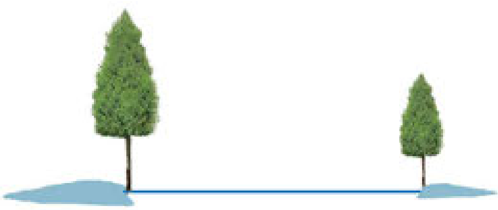
（3）一个六棱柱的表面展开图是由两个________形和________个矩形组成的．

（4）小林同学在一个正方体盒子的每个面上都写了一个字，分别是：我、喜、欢、数、学、课．其表面展开图如图所示．那么在该正方体盒子上，和“我”相对的面上所写的字是“______”．



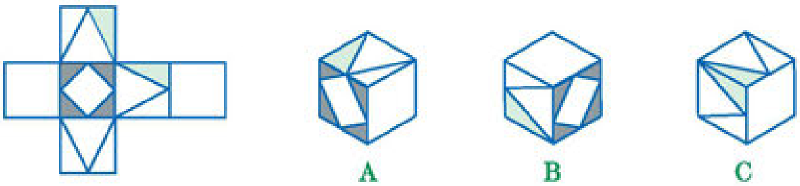
（第 1(4)题）

2．两棵树在同一时刻被同一点光源照射留下的影子如图所示．请在图中画出形成树影的光线，并确定光源所在的位置．



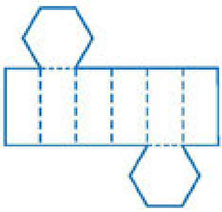
（第 2 题）

3. 把下面左边的图形折叠并围成一个正方体，它是右边的哪个正方体？



（第 3 题）

4. 把下面这个几何体的表面展开图用纸复制下来，再按虚线折起来，看看是哪种几何体.

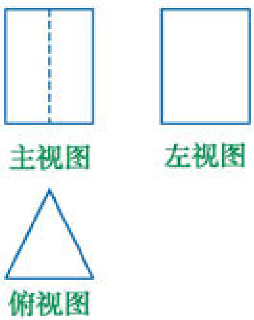


（第 4 题）

（第 5 题）

5. 如图，分别画出保温杯与冰箱的主视图、俯视图和左视图.

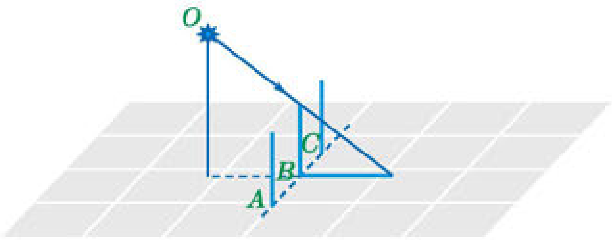
6. 如图所示为某几何体的视图. 请指出它是什么几何体，并试着画出它的草图.



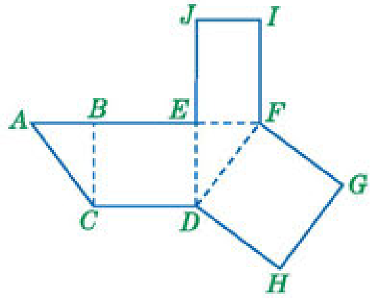
（第 6 题）

B 组

1. 如图，某建筑工地的地面上立有三根等高的钢管，点 O 为照明灯的位置. 请你分别画出立于点 A，C 两处的钢管的影子. 它们影子的长短与立于点 B 处钢管影子的长短有什么数量关系？



（第 1 题）



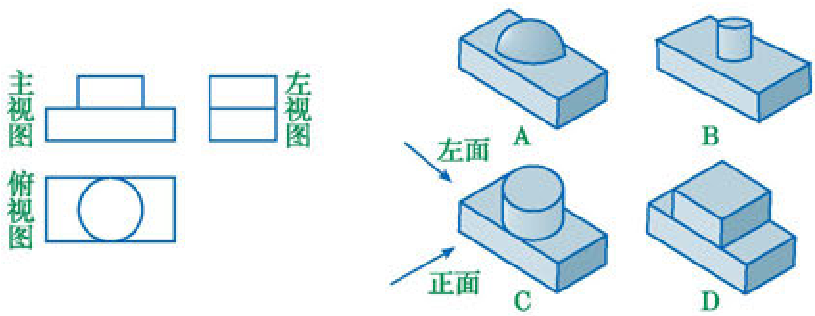
（第 2 题）

2. 如图，已知在棱柱的表面展开图中，$AB=3$ cm，$AC=5$ cm，四边形 $DHGF$ 为正方形.

(1) 指出它是几棱柱.

(2) 计算它的侧面积.

3. 如图，从 A，B，C，D 四幅图中找出三视图所对应的几何体.



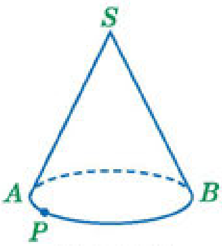
（第 3 题）

（第 4 题）

4. 如图，一棵大树直立于地面. 树干上下粗细相差不大，可看成圆柱体. 测得树干的周长为 3 m，高为 20 m. 有一紫藤自树的根部等距规则地盘绕在树干上，恰好绕 7 周到达树干的顶部. 紫藤长为多少米?

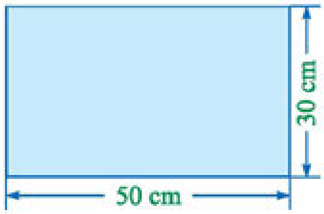
C 组

1. 如图，在圆锥底面圆周上的点 P 处有一只蚂蚁，它要从圆锥的侧面爬一圈后再回到点 P 处. 已知圆锥的侧面展开扇形的圆心角小于 180°，请给蚂蚁设计一条最短的爬行路线.



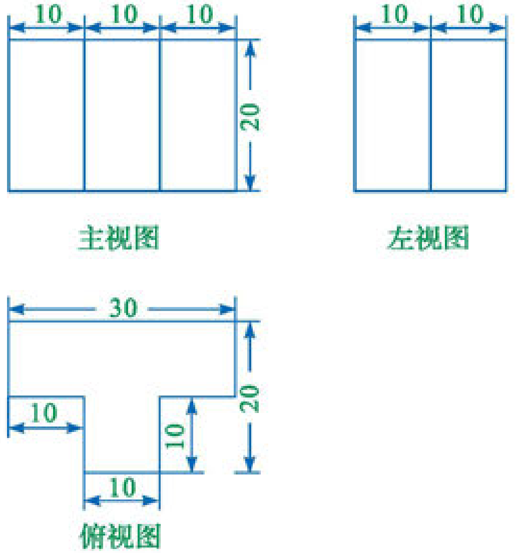
（第 1 题）

2. 用如图所示的一块矩形铁皮加工一些棱长为 10 cm 的无盖正方体铁盒，怎样裁料才能使得加工的盒子数量最多？



（第 2 题）

3. 如图，已知某种机械零件的三视图.（单位：cm）



（第 3 题）

(1) 某工厂要铸造 5 000 件这种铁质零件，需用去多少吨铁？（铁的密度为 $7.8\ g/cm^3$，损耗忽略不计）

(2) 工件铸成后，表面需要涂一层防锈漆. 已知 1 kg 防锈漆可以涂 $4\ m^2$ 的铁器面，涂完这批工件需用多少千克防锈漆？

综合与实践

巧折抛物线

一、问题

1. 用一张边长为 8 cm 的正方形纸片，按一定步骤折出一些点，用平滑的曲线从左至右依次连接各点，得到一条曲线. 说明这条曲线是抛物线.

2. 用一张长为 8 cm、宽为 6 cm 的长方形纸片，按照上面的方法折出一些点，画出这条抛物线，并求出这条抛物线的表达式.

二、解决方案

1. 折纸的方法如下(每步“折叠”后，把纸打开，再进行下一步折叠).

第一步：如图 1，将正方形纸片对折三次，使其八等分，折痕以虚线表示. 再将纸沿另一方向对折三次，得到 $AO=\frac{1}{8}AB$，$AA'=\frac{1}{4}AB$.

第二步：如图 2，将纸折叠，使点 A_1 与 A' 重合，折痕与 A_1B_1 的交点为 P_1.

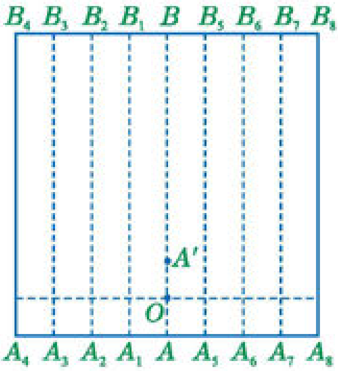


图 1

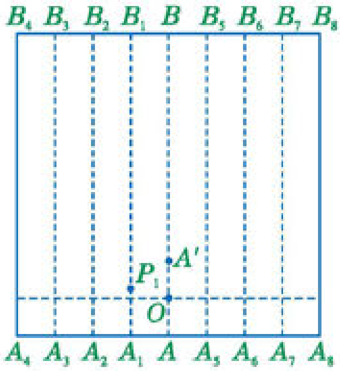


图 2

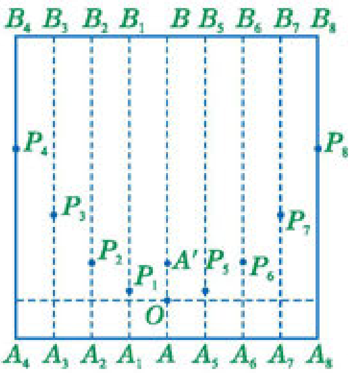


图 3

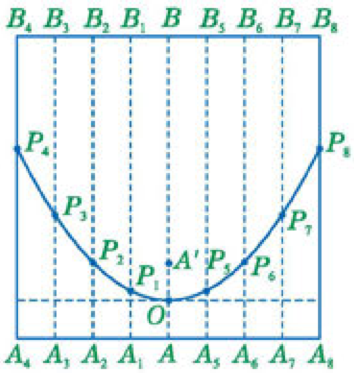


图 4

第三步：如图 3，将纸折叠，分别使点 A_2 与 A'，点 A_3 与 A'，…，点 A_8 与 A' 重合，这些折痕分别与 A_2B_2，A_3B_3，…，A_8B_8 交于点 P_2，P_3，…，P_8.

第四步：如图 4，用平滑的曲线顺次连接点 P_4，P_3，P_2，P_1，O，P_5，P_6，P_7，P_8，就得到一条曲线.

2. 建立适当的平面直角坐标系，求出各点坐标.

3. 先求出抛物线的表达式，再验证其他各点也在这条抛物线上.

三、可参考的知识与方法

1. 轴对称的性质.

2. 勾股定理.

3. 待定系数法.

四、反思与交流

我的结果	
解决问题的主要过程与方法	
同学的意见建议	
修改完善之处	
最终结果	
我的感悟	

编写后记

2001 年，国家正式启动了义务教育阶段的新一轮课程改革。有感于时代的召唤，我们这些研究和从事数学教育的工作者，满怀共同的梦想，成立了编写组，尝试进行义务教育七年级至九年级数学教科书的建设与编写。

2001 年 3 月，编写组正式向教育部提出了编写立项申请。经专家评审，当年 12 月通过了立项。编写组从此开始编写工作。

2003 年 3 月，这套依据《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》编写的教科书，经全国中小学教材审定委员会审查通过，并公布于当年的订书目录中，作为义务教育课程标准实验教科书，供实验区选用。

2010 年 10 月，这套教科书开始修订准备。

2011 年 12 月，七年级上册和七年级下册的修订工作完成。

2012 年 3 月，按照《义务教育数学课程标准》（2011 年版）修订后的七年级上册和七年级下册，经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过。2013 年 3 月，八年级上、下册和九年级上、下册也顺利通过教育部基础教育课程教材专家工作委员会的审查。现在与大家见面的这本教科书就是修订后的九年级下册。

我们在编写教科书的过程中，得到了众多的专家、学者、数学教师的大力支持和热情帮助，特别是下面这些老师，更是我们应当感谢的：

王宝仓、杨志坚、孟庆林、张庆、仇岷、陈雪梅、石凌等，都是这套教科书原实验版本的编者，为教科书的编写作出了很大贡献；

刘璐、许艳秋、潘新学、王春丽、李春祥、魏元洪、张玲等，对这套教科书的实验给予了大力的支持和帮助；

穆怀宇、郭辉、章巍、许春英、张燕飞、李永强、滕杰、张晓娴、牛翠英、杨金钗、刘建锋、靳春会、陈彦敏、徐在荣、王建华、张素平等，在这套教科书的修订过程中，参与讨论并提出了许多宝贵意见。

我们深知，教科书的编写和建设是一个长期的任务，更是一个不断完善、不断发展的过程。我们会继续努力，朝着精品教科书的建设目标奋力进取。我们也诚挚地希望广大的数学教师继续关注和支持这套教科书，使它越来越好。

编者

2014 年 9 月