绿色印刷产品

ISBN 978-7-5434-9542-5
定价：9.85元
全国价格举报电话:12358

义务教育教科书

数学

七年级 下册

河北教育出版社

教育部审定 2012

义务教育教科书

数学

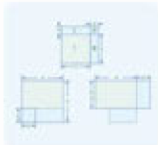
七年级 下册

河北教育出版社

义 务 教 育 教 科 书

数学

七年级 下册



河北教育出版社

遨游在数学世界中

亲爱的同学们：

我们又见面了，欢迎你们开始新学期的学习生活。

作为你们的老朋友，我们在为大家祝福的同时，诚挚地为你们送上一份礼物——义务教育教科书《数学》（七年级～九年级），让它陪伴你们欢度初中岁月，陪伴你们健康成长。

当你们拿到这本七年级下册教科书时，一定想了解它的特点、它的内容、它的一切。

在设计上，这本书有以下栏目。

观察与思考：通过观察、感悟和思考，期待你们获得正确的数学认知。

一起探究：和大家一起探究并认识数学知识、思想和方法，这会使你们有更大的收获。

试着做做、做一做：动手试做，再做一做，这是学习数学所不可缺少的。

大家谈谈：和同学们分享自己的学习成果，大家共同进步。

回顾与反思：把握整体内容，梳理知识脉络，总结思想方法，明确注意事项，这是不可或缺的学习环节。

在内容上，这本书共有六个篇章等待同学们去探究、去认识：

二元一次方程组——它是一种新的方程模型，具有重要的应用价值。

相交线与平行线——在平面上，两条直线的位置关系及其一些重要事实，也是几何学习最基本的内容之一。

整式的乘法——整式可以加减，也可以相乘。整式的乘法是整式的另一种运算。

三角形——在本章中，大家将重新认识三角形，以及边与边、角与角之间的关系。

一元一次不等式和一元一次不等式组——“相等”与“不相等”是现实世界中数量关系的两种基本表现形式，这里将帮助你们认识不等式及其解法。

因式分解——整式能进行因式分解。怎样分解，都有哪些方法，等待你们去揭示。

我们同欢乐，我们共追求。让我们携手前行，一起遨游数学新天地，继续收获丰硕的数学成果！

你们的编者朋友

2012 年 10 月

目 录

第六章

二元一次方程组

在本章中，我们将学习

- 二元一次方程组
- 二元一次方程组的解法
- 二元一次方程组的应用
- 简单的三元一次方程组*

根据大马和小马的对话，你能求出大马和小马各驮了几包物品吗？

6.1 二元一次方程组

方程是解决实际问题的重要数学工具. 我们已经学习了一元一次方程，从本节开始，我们研究二元一次方程组的解法及应用.

观察与思考

某酒厂有大小两种存酒的木桶，已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 28 升，1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 20 升. 那么，1 个大桶和 1 个小桶分别可盛酒多少升?

观察下面解决问题的过程:

设一个未知数	设两个未知数
设 1 个大桶盛酒 x 升，则 1 个小桶盛酒 $(28-5x)$ 升. 根据题意，列方程，得 $x+5(28-5x)=20.$ 解这个一元一次方程，得 $x=5.$ 从而，得 $28-5x=3.$ 即 1 个大桶盛酒 5 升，1 个小桶盛酒 3 升.	设 1 个大桶盛酒 x 升，1 个小桶盛酒 y 升. 根据题意，可得方程 $5x+y=28,$ ① $x+5y=20.$ ② 大桶和小桶的容积应当是同时满足方程①和②的未知数的值.

(1) 比较方程 $x+5(28-5x)=20$ 和方程 $5x+y=28$ 及 $x+5y=20$，它们的共同点是什么，不同点是什么?

(2) $x=5$，$y=3$ 是否同时满足方程①和②?

像 $5x+y=28$ 和 $x+5y=20$ 这样，含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1 的方程，叫做**二元一次方程**(linear equation with two unknowns).

使二元一次方程两边相等的两个未知数的值，叫做这个**二元一次方程的**

一组解.

如 $x=5$，$y=3$ 是方程 $5x+y=28$ 的一组解，也是方程 $x+5y=20$ 的一组解. 一般地，将二元一次方程的一组解记为$\begin{cases}x=5,\\y=3\end{cases}$的形式.

试着做做

已知甲数的 2 倍与乙数的 3 倍之和是 12，甲数的 3 倍与乙数的 2 倍之差是 5. 求这两个数.

（1）列一元一次方程求解.

（2）如果设甲数为 x，乙数为 y，请根据问题中的等量关系，列出含两个未知数的一组方程.

（3）用一元一次方程求得的甲数和乙数，代入(2)中所列的这组方程中，检验方程两边是否相等.

大家谈谈

结合以上两个问题，请你谈谈列“含一个未知数”的方程和列“含两个未知数”的方程的区别与联系.

一起探究

1. 对于二元一次方程，任意给定未知数 x 的一个值，你能求出满足方程的未知数 y 的值吗？填写下表.

$2x+3y=12$	x	…	2	3	4	5	…
	y	…					…
$3x-2y=5$	x	…	2	3	4	5	…
	y	…					…

2. 分别写出方程 $2x+3y=12$ 和方程 $3x-2y=5$ 的四组解. 你还能找出这两个方程的其他解吗？一个二元一次方程有多少组解？

3. 是否有同时满足这两个方程的一组解？若有，请你指出是哪组解.

由几个方程组成的一组方程叫做方程组. 含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1 的方程组，叫做**二元一次方程组**(system of linear equations of two unknowns). 二元一次方程组中方程的公共解叫做这个**二元一次方程组的解.**

一般地，二元一次方程组记作$\begin{cases}2x+3y=12,\\3x-2y=5\end{cases}$的形式，而$\begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}$是这个方程组的解.

现阶段，我们只研究含有两个方程的二元一次方程组.

练习

1. 把方程 $2x+y=4$ 写成用含 x 的代数式表示 y 的形式：$y=$________.

2. 下列方程中，哪个是二元一次方程？

(1) $xy=3$；　　(2) $2x^2-y=9$；

(3) $\dfrac{1}{x}=x$；　　(4) $8x-y=3$.

3. 下列方程组中，哪个是二元一次方程组？

(1) $\begin{cases}x+y=3,\\2x+y=7;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3a-2b=1,\\c+d=2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2=4,\\y=nx;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x+y=6,\\x^2-y=4.\end{cases}$

习题

A 组

1. 已知二元一次方程 $2x+y=7$. 当 $x=3$ 时，$y=$____；当 $y=3$ 时，$x=$____.

2. 下列哪组 x，y 的值是方程组$\begin{cases}2x+y-46=0,\\3x+y-59=0\end{cases}$的解？

(1) $\begin{cases}x=-13,\\y=-20;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=-13,\\y=20;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=13,\\y=20;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=20,\\y=13.\end{cases}$

3. 已知 4 辆小卡车和 5 辆大卡车一次能运货 52 t，10 辆小卡车和 3 辆大卡车一次能运货 54 t. 设每辆小卡车每次能运货 x t，每辆大卡车每次能运货 y t，列二元一次方程组.

B 组

1. 某山区县的林地面积和耕地面积原来共有 180 km^2，该县响应国家“退耕还林”号召，将一部分耕地恢复为林地后，林地面积增加了 56%，耕地面积减少了 70%．设原有耕地面积为 x km^2，林地面积为 y km^2，列二元一次方程组．

2. 某两位数，两个数位上的数之和为 11．这个两位数加上 45，得到的两位数恰好等于原两位数的两个数字交换位置所表示的数．求原两位数．

   (1) 列一元一次方程求解．

   (2) 设原两位数的十位数字为 x，个位数字为 y，列二元一次方程组．

   (3) 检验(1)中求得的结果是否满足(2)中的方程组．

6.2 二元一次方程组的解法

解二元一次方程组的基本方法是：通过“消元”，将二元一次方程组化为一元一次方程来求解．怎样进行“消元”呢？

一起探究

对于“鸡兔同笼”问题(上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何?)：

列一元一次方程	列二元一次方程组
设鸡有 x 只．根据题意列方程，得 $2x+4(35-x)=94.\quad *$ 解这个一元一次方程，得 $x=23.$ 从而，得 $35-23=12.$ 即鸡有 23 只，兔子有 12 只．	设鸡有 x 只，兔子有 y 只．根据题意，可得方程组 $\begin{cases}x+y=35, & ①\\2x+4y=94. & ②\end{cases}$ 由①，得 $y=35-x.\quad ③$ 将③代入②，得 $2x+4(35-x)=94.\quad ④$

(1) 由方程组$\begin{cases}x+y=35,\\2x+4y=94\end{cases}$是怎样得出方程④的?

(2) 说明方程④和方程 $*$ 完全相同的理由．

(3) 你会解方程④吗? 由④解出 x 的值以后，怎样求出 y 的相应的值?

(4) 从中你能体会到怎样解二元一次方程组吗?

例 1 求二元一次方程组

$$\begin{cases}y=x-6, & ①\\x+2y=9 & ②\end{cases}$$

的解．

解：将①代入②，得

$$x+2(x-6)=9.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=7.$$

将 $x=7$ 代入①，得

$$y=1.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=7,\\ y=1.\end{cases}$$

将方程组中一个方程的某个未知数用含另一个未知数的代数式表示出来，代入另一个方程中，消去一个未知数，得到一元一次方程，通过解一元一次方程，求得二元一次方程组的解. 这种解方程组的方法叫做**代入消元法**(elimination by substitution)，简称代入法.

求二元一次方程组的解的过程叫做解二元一次方程组.

大家谈谈

解二元一次方程组

$$\begin{cases}x+y=10, & ①\\ x-2y=4. & ②\end{cases}$$

方程①可变形为

$$x=10-y. \qquad ③$$

将③代入②，得

$$10-y-2y=4.$$

解这个方程，得

$$y=2.$$

将 $y=2$ 代入③，得

$$x=8.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=8,\\ y=2.\end{cases}$$

观察上面的解题过程，你还有其他的解法吗？请你试一试，并把你的想法和同学们进行交流.

练习

用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-3, \\ 3x+2y=8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x-y=27, \\ 2x+3y=3. \end{cases}$

习题

A 组

解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=x+2, \\ 6x+5y=-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-5y=11, \\ x+4y=15; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-2y=5, \\ 5x-3y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x+2y=8. \end{cases}$

B 组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4x+3y=5, \\ x-2y=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2m-n=4, \\ 2m+3n=12. \end{cases}$

2. 大刚和小亮到同一家超市购买水果. 大刚买了 2 kg 苹果和 3 kg 梨，共花了 26 元；小亮买了 1 kg 苹果和 1 kg 梨，共花了 11 元. 设苹果和梨的价格分别为 x 元/千克和 y 元/千克，请你列出方程组，并求出苹果和梨的价格.

下面，我们进一步学习代入消元法.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 3x+10y=14, & ① \\ 10x+15y=32. & ② \end{cases}$$

解：由方程①，得

$$3x=14-10y,$$

$$x=\frac{14-10y}{3}. \qquad ③$$

将③代入②，整理，得

$$140-55y=96.$$

解这个一元一次方程，得

$$y=\frac{4}{5}.$$

将 $y=\frac{4}{5}$ 代入③，得

$$x=2.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases} x=2, \\ y=\frac{4}{5}. \end{cases}$$

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 7x+4y-10=0, & ① \\ 4x+2y-5=0. & ② \end{cases}$$

解：原方程组可化为

$$\begin{cases} 7x+4y=10, & ③ \\ 4x+2y=5. & ④ \end{cases}$$

由方程④，得

$$y=\frac{5-4x}{2}. \qquad ⑤$$

将⑤代入③，整理，得

$$10-x=10.$$

解得

$$x=0.$$

将 $x=0$ 代入⑤，得

$$y=\frac{5}{2}.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases} x=0, \\ y=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

大家谈谈

结合下列实例和图示，说一说怎样运用“代入消元法”解二元一次方程组.

$$
\begin{tikzcd}
\text{二元一次方程组} \arrow[d, "\text{转化}"] & \begin{cases}x=10-y,\\ x-2y=4\end{cases} \arrow[d, "\text{代入消元}"] \arrow[rrr, dashed, "\text{得解}"] & & & \begin{cases}x=8,\\ y=2\end{cases} \\
\text{一元一次方程} & (10-y)-2y=4 \arrow[r, "\text{求解}"] & y=2 \arrow[r, "\text{代入}"] & x=10-y \arrow[r, "\text{求解}"] & x=8 \arrow[u, "\text{得解}"']
\end{tikzcd}
$$

练　习

用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x+2y=5,\\ 6x-5y=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5x+2y=15,\\ 8x+3y=23.\end{cases}$

习　题

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}7x-3y=-1,\\ 4x-5y=-17;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}10x+3y+1=0,\\ 4x+5y+8=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3a=5b,\\ 2a-3b=1;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3m-5n=8,\\ 6m+5n-1=0.\end{cases}$

2. 一个两位数，十位上的数与个位上的数之和是 8，个位数字与十位数字交换后所得新数比原数大 18. 求这个两位数.

除了可以运用代入法解二元一次方程组外，还有其他方法解二元一次方程组吗？

一起探究

1. 观察二元一次方程组

$$\begin{cases}5x+3y=16, & ①\\ 2x-3y=-2 & ②\end{cases}$$

中未知数的系数，有什么特点？

2. 根据你发现的特点，试解这个方程组.

小亮的思路(代入消元)

由②，得

$$3y=2x+2. \quad ③$$

将③代入①可消去未知数 y，得

$$5x+2x+2=16. \quad ④$$

解一元一次方程④，求出 x 的值后再代入①，得到方程组的解为

$$\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$$

小红的思路

两个方程中未知数 y 的系数互为相反数，将方程①、②左右两端分别相加，可消去未知数 y，得

$$5x+2x=16-2. \quad ⑤$$

解一元一次方程⑤，求出 x 的值后再代入①，得到方程组的解为

$$\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$$

3. 小亮和小红采用不同的方法，都先消去了未知数 y. 他们的解题依据是什么？

下面，我们按照小红的思路解方程组.

例 4 解方程组

$$\begin{cases}5x+3y=16, & ①\\2x-3y=-2. & ②\end{cases}$$

解：①+②，得

$$7x=14,$$
$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入①，得

$$10+3y=16,$$
$$y=2.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$$

当两个方程中同一个未知数的系数互为相反数或相等时，采用将两个方程左右两边分别相加(或相减)的方法“消元”较简便.

做一做

解方程组

$$\begin{cases}3x+2y=7,\\3x+y=5.\end{cases}$$

两个未知数的系数既不相等，也不互为相510反数，怎么办?

例 5 解方程组

$$\begin{cases}5x+6y=7, & ①\\2x+3y=4. & ②\end{cases}$$

解：②×2，得

$$4x+6y=8. \qquad ③$$

①－③，得

$$x=-1.$$

把 $x=-1$ 代入②，得

$$-2+3y=4,$$

$$y=2.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$$

将二元一次方程组中两个方程相加(或相减，或进行适当变形后再加减)，消去一个未知数，得到一元一次方程. 通过求解一元一次方程，再求得二元一次方程组的解. 这种解方程组的方法叫做**加减消元法**(elimination by addition or subtraction)，简称**加减法**.

大家谈谈

结合下列图示，谈一谈用加减消元法解二元一次方程组的基本过程是怎样的，解方程组时应注意哪些事项.

二元一次方程组	$\begin{cases}5x+3y=16,\\2x-3y=-2\end{cases}$	$\xrightarrow{\text{得解}}$	$\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$
↓转化	↓加减消元		↑得解
一元一次方程	$7x=14$		$y=2$
↓	↓求解		↑求解
一元一次方程的解	$x=2$	$\xrightarrow{\text{代入}}$	$5\times2+3y=16$

练　习

1. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+y=5,\\x-y=3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}m-n=1,\\2m+3n=7.\end{cases}$

2. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}7x-2y=3,\\9x+2y=-19;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+2y+2=0,\\7x-4y+41=0.\end{cases}$

习　题

A　组

1. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x+y=3,\\3x-y=7;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+3y=17,\\2x+4y=16;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+9y=13,\\\frac{4}{3}(x-1)-y=\frac{1}{3};\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=9,\\x-y=12.\end{cases}$

2. 若方程 $ax+by=10$ 的两组解是 $\begin{cases}x=6,\\y=-4\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 试求 a，b 的值.

B　组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}5x-6y=9,\\7x-4y=-5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3(x-1)=y+5,\\5(y-1)=3(x+5).\end{cases}$

2. 一个两位数，十位上的数与个位上的数之和是 7，如果把这个两位数加上 9，所得的两位数的个位数字、十位数字恰好分别是原来两位数的十位数字和个位数字. 求这个两位数.

6.3 二元一次方程组的应用

我们已经学习了二元一次方程组及其解法. 现在，利用二元一次方程组来解决一些实际问题.

大马和小马驮着货物在途中有一段对话，如下图.

根据大马和小马的对话，你能求出大马和小马各驮了几包货物吗？

一起探究

1. 大马的两句话，说出了两个等量关系，这两个等量关系是什么？

2. 如果设大马驮物 x 包，小马驮物 y 包，那么列出的二元一次方程组是怎样的？

3. 请你试着解出 2 中所列的二元一次方程组，并和同学们进行交流.

小明的解答过程如下：

解：因为

大马驮物包数$-1=$小马驮物包数$+1$，

大马驮物包数$+1=($小马驮物包数$-1)\times 2$.

所以，若设大马驮物 x 包，小马驮物 y 包，则有

$$\begin{cases} x-1=y+1, \\ x+1=2(y-1). \end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases} x-y=2, & ① \\ x-2y=-3. & ② \end{cases}$$

①−②，得

$$y=5.$$

将 $y=5$ 代入①，得

$$x=7.$$

所以，方程组的解为

$$\begin{cases}x=7,\\y=5.\end{cases}$$

答：大马驮物 7 包，小马驮物 5 包.

你与小明的解答一样吗？

例 1 化肥厂往某地区发运了两批化肥，第一批装满了 9 节火车车厢和25 辆卡车，共运走了 640 t；第二批装满了 12 节火车车厢和 10 辆卡车，共运走了 760 t. 平均每节火车车厢和每辆卡车分别装运化肥多少吨？

分析：本题中的等量关系是：

第一批，9 节火车车厢运货吨数＋25 辆卡车运货吨数＝640；

第二批，12 节火车车厢运货吨数＋10 辆卡车运货吨数＝760.

解：设平均每节火车车厢装运化肥 x t，每辆卡车装运化肥 y t.

根据题意，得

$$\begin{cases}9x+25y=640,\\12x+10y=760.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=60,\\y=4.\end{cases}$$

答：平均每节火车车厢装运化肥 60 t，每辆卡车装运化肥 4 t.

做一做

某车间有工人 660 名，生产甲、乙两种零件. 已知每人每天平均生产甲种零件 14 个或乙种零件 20 个，1 个甲种零件与 2 个乙种零件为一套. 如何调配人员可使每天生产的两种零件刚好配套？

（1）找出本题中的等量关系.

（2）适当设未知数，列出方程组.

（3）解这个方程组，并回答上面提出的问题.

大家谈谈

根据你的经验，写出用二元一次方程组解决实际问题的步骤，并与同学们交流.

练习

1. 小华 4 年后的年龄与小丽 4 年前的年龄相等，3 年后，她们两人的年龄和等于她们年龄差的 3 倍. 求小华和小丽今年的年龄.

2. 一艘船在某河道上航行，已知顺水航行 45 km 需要 3 h，逆水航行 65 km 需要 5 h. 该船在静水中的速度与该河的水流速度分别是多少？

习题

A 组

1. 我国是水资源相对缺乏的国家之一，水资源的人均占有量比世界人均占有量少 6 600 m^3，仅是世界人均占有量的 $\frac{1}{4}$. 分别求我国和世界水资源的人均占有量.
2. 去年春季，蔬菜种植场在 15 公顷的大棚地里分别种植了茄子和西红柿，总费用是 265 000 元. 其中，种植茄子每公顷的费用是 17 000 元，种植西红柿每公顷的费用是 18 000 元. 已知每公顷茄子可获利 24 000 元，每公顷西红柿可获利 26 000 元. 茄子和西红柿的种植面积各为多少公顷？种植场在这一季共获利多少元？

B 组

1. 某次知识竞赛共出了 25 道题，评分标准如下：答对 1 题加 4 分，答错 1 题扣 1 分，不答记 0 分. 已知李刚不答的题比答错的题多 2 道，他的总分为 74 分. 他答对、答错和不答的题各有多少道？

2. 甲、乙两人在 400 m 的环形跑道上练习赛跑. 若两人同时同地反向跑，则经过 25 s 第一次相遇；若两人同时同地同向跑，则经过 250 s 甲第一次追上乙. 甲、乙两人的速度各是多少?

下面，我们继续学习列二元一次方程组解决实际问题.

例 2 去年秋季，某校七年级和高中一年级招生总人数为 500 名，计划今年秋季七年级招生人数比去年增加 20%，高中一年级招生人数比去年增加 15%，这样，今年秋季七年级和高中一年级招生总人数将比去年招生总人数增加 18%. 今年秋季七年级和高中一年级各计划招生多少名?

分析：本题中的等量关系是：

去年，七年级人数＋高中一年级人数＝500；

今年，七年级人数＋高中一年级人数＝500(1＋18%)；

今年，七年级人数＝去年七年级人数＋增长数；

今年，高中一年级人数＝去年高中一年级人数＋增长数.

解：设去年七年级招生 x 名，高中一年级招生 y 名. 根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=500, \\ (1+20\%)x+(1+15\%)y=500\times(1+18\%). \end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases} x+y=500, \\ 24x+23y=11\ 800. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=300, \\ y=200. \end{cases}$$

所以

$$(1+20\%)x=(1+20\%)\times300=360,$$

$$(1+15\%)y=(1+15\%)\times200=230.$$

答：今年秋季七年级计划招生 360 名，高中一年级计划招生 230 名.

试着做做

请你将今年两个年级计划招生人数设为未知数，列方程组解答例 2 中的问题，并与上面的解答过程比较，看看哪种解法较简便些.

一起探究

小明为了测得火车过桥时的速度和火车的长度，在一铁路桥旁进行观察：火车从开始上桥到完全过桥共用 26 s，整列火车完全在桥上的时间为 14 s. 已知桥长1 000 m. 你能根据小明获得的数据求出火车的速度和长度吗？

（1）问题中涉及了哪些量？

（2）画示意图，并寻找等量关系.

（3）用 x，y 分别表示火车的速度(m/s)和长度(m)，列方程组.

（4）解答上面的问题.

练　习

1. 某种过季商品打折销售. 如果按定价的七五折销售，每件将赔 25 元；如果按定价的九折出售，每件将赚 20 元. 这种商品每件的定价是多少元，进价是多少元？

2. 3 月 12 日是我国的植树节. 这一天，某校七年级共有 240 名学生参加义务植树活动. 如果平均每人每天挖树坑 6 个或栽树 10 棵，那么，怎样安排学生才能使这一天挖出的树坑全部栽上树苗？

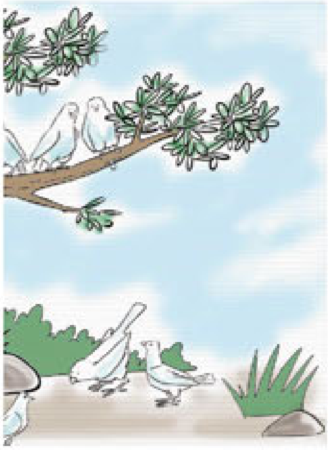
习　题

A 组

1. 某公司甲、乙两个销售点 1 月份的总销售额为 50 000 元. 2 月份，甲销售点的销售额比 1 月份增加了 5%，乙销售点的销售额比 1 月份增加了 7.5%. 这样，两个销售点 2 月份比 1 月份共增加销售额 3 000 元. 两个销售点 1 月份的销售额分别是多少？

2. 甲、乙两车相距 100 km，两车同时出发. 如果同向而行，乙车经过 4 h 可追上甲车；如果相向而行，两车经过 0.8 h 相遇. 求甲、乙两车的速度.

B 组



1. 《一千零一夜》中有这样一段文字：有一群鸽子，其中一部分在树上欢歌，另一部分在地上觅食. 树上的一只鸽子对地上觅食的鸽子说："若从你们中飞上来 1 只，则树下的鸽子就是整个鸽群的 $\frac{1}{3}$；若从树上飞下去 1 只，则树上、树下的鸽子就一样多了." 你知道树上、树下各有多少只鸽子吗？试列方程组解答.

2. 某酒店客房部有三人间、双人间客房. 三人间的价格为 150 元/天，双人间的价格为 140 元/天. 为吸引游客，该酒店实行了团体入住五折优惠的措施. 一个 50 人的旅游团优惠期间到该酒店入住，住了一些三人间和双人间. 若每间客房正好住满，且一天共花去住宿费 1 510 元，则该旅游团住了三人间和双人间客房各多少间？

6.4 简单的三元一次方程组*

我们已经学习了利用代入消元法和加减消元法对二元一次方程组进行求解. 在本节中，我们将用消元的方法，对简单的三元一次方程组进行求解.

类似于二元一次方程，我们把含有三个未知数，并且含未知数的项的次数都是 1 的方程，叫做**三元一次方程**(linear equation with three unknowns).

含有三个未知数，并且含未知数的项的次数都是 1 的方程组，叫做**三元一次方程组**(system of linear equations of three unknowns). 三元一次方程组中各方程的公共解叫做这个三元一次方程组的解.

$$\begin{cases} x+5y+z=1, \\ 3x-y+z=12, \\ 2x-y+4z=27, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-6, \\ y-7z=0, \\ 2x-y+z=18, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=26, \\ x+z=9, \\ 2x-y-7z=-3 \end{cases}$$

都是三元一次方程组.

观察与思考

对于求解三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y+z=5, & ① \\ x-y-5z=1, & ② \\ 2x-3y+z=14, & ③ \end{cases}$$

类比解二元一次方程组的方法，我们可以研究解三元一次方程组的方法.

小亮的想法是：①×5+②，再③−①，消去未知数 z，得到一个二元一次方程组

$$\begin{cases} 6x+4y=26, & ④ \\ x-4y=9. & ⑤ \end{cases}$$

解得 x，y 后代入①求出 z，从而求得三元一次方程组的解.

(1) 你能否先消去未知数 x 或 y，最后求得三元一次方程组的解？

(2) 试着解一解这个方程组，并与同学们交流.

标有 * 的内容为选学内容.

例 解方程组

$$\begin{cases} x-z=4, & ① \\ x-y+z=1, & ② \\ 2x+3y+2z=17. & ③ \end{cases}$$

解：由①，得

$$z=x-4. \quad ④$$

将④分别代入②，③，得

$$\begin{cases} 2x-y=5, & ⑤ \\ 4x+3y=25. & ⑥ \end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$\begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$$

把 $x=4$ 代入①，得

$$z=0.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases} x=4, \\ y=3, \\ z=0. \end{cases}$$

做一做

已知小明与爸爸、妈妈的年龄之和为 108 岁，爸爸比妈妈大 2 岁，小明与妈妈的年龄之和比爸爸大 12 岁. 他们的年龄分别是多少？

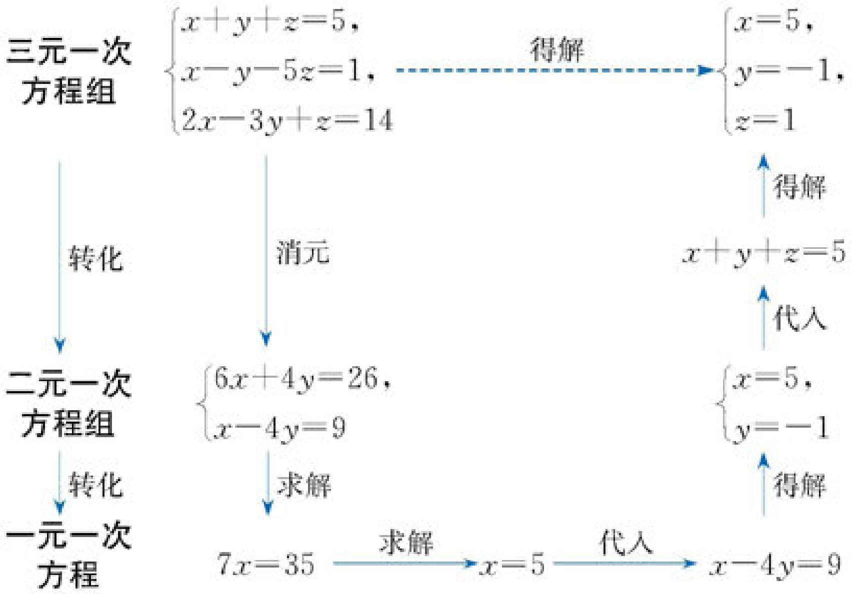
（1）在本题中，有几个等量关系？请你分别表示出来.

（2）如果设爸爸的年龄是 x 岁，妈妈的年龄是 y 岁，小明的年龄是 z 岁，请列出方程组.

（3）解这个方程组.

大家谈谈

请结合下列图示，谈一谈解三元一次方程组的基本方法和步骤.



解三元一次方程组的基本思想就是“转化”. 通过消元，将“三元”转化为“二元”，再将“二元”转化为“一元”，通过求一元一次方程的解，进而求得二元一次方程组的解，最后求得三元一次方程组的解.

练　习

解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y=1, \\ x+z=6, \\ y+z=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y+z=11, \\ x+y-z=5, \\ x-y-z=1. \end{cases}$

习　题

A　组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-z=-4, \\ x+y-z=-1, \\ z-2y=-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y-z=0, \\ x+y-3z=4, \\ 2x-5y+7z=21. \end{cases}$

2. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y=1, \\ x+y=7, \\ 2x-5y+3z=-6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y+z=6, \\ x+y-z=0, \\ 2x-3y+8z=33. \end{cases}$

B 组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-y-2z=10, \\ y-3z=-4, \\ 3x-y+5z=21; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y-3x-2z=1, \\ x+2y+3z=9, \\ 5x-7y+z=34. \end{cases}$

2. 在我国古代数学著作《九章算术》中有这样一个问题：上等谷 3 束，中等谷 2 束，下等谷 1 束，共 39 斗；上等谷 2 束，中等谷 3 束，下等谷 1 束，共 34 斗；上等谷 1 束，中等谷 2 束，下等谷 3 束，共 26 斗. 求上、中、下三等谷每束各是几斗.

数学活动

一元一次方程的“试位解法”

一元一次方程的写法和解法都经历了漫长的岁月才发展成为现在的样子. 阿默士是用一大串符号表示一元一次方程的，并且是用算术的方法来解的. 笛卡儿(法国数学家，1596～1650 年)给出了一元一次方程现在的写法和解法. 古代数学家曾用“试位法”来解一元一次方程.

以 $4x+8=0$ 为例. 任取 x 的两个不同的值 x_1，x_2(比如 $x_1=1$，$x_2=2$)，将它们分别代入方程的左边，并设 $4x_1+8=d_1$，$4x_2+8=d_2$(此时 $d_1=12$，$d_2=16$)，则

$$x=\frac{d_1x_2-d_2x_1}{d_1-d_2}=\frac{12\times2-16\times1}{12-16}=-2$$

是 $4x+8=0$ 的解. 一般称这种解法为“试位法”.

活动一：仍以 $4x+8=0$ 为例. 请你另取 x 的两个不同的值 x'_1，x'_2，并按上述方法进行计算，看其结果是不是原方程的解.

活动二：说明用试位法解一元一次方程的道理.

我们知道，一元一次方程 $ax+b=0$($a\neq0$，a，b 为已知数)的解是 $x=-\frac{b}{a}$.

试位法：任取 x 的两个不同的值 x_1，x_2，代入上述方程的左边，并设

$$ax_1+b=d_1, \quad ①$$

$$ax_2+b=d_2. \quad ②$$

如果 $d_1=0$(或 $d_2=0$)，那么 $x=x_1$(或 $x=x_2$)即为原方程的解. 不然，

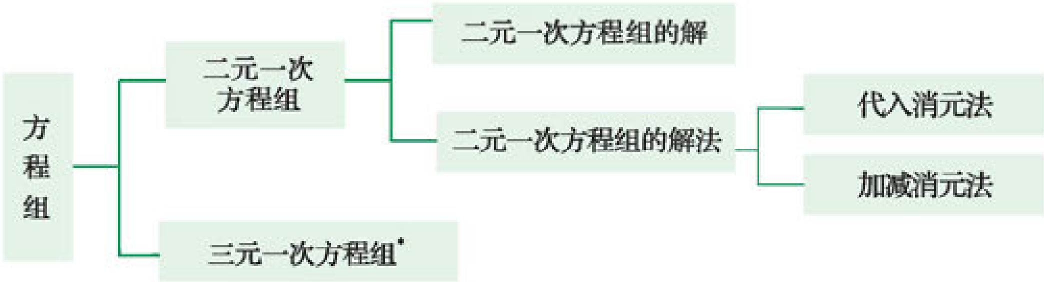
$$x=\frac{d_1x_2-d_2x_1}{d_1-d_2}\ (d_1-d_2\neq0)$$

是原方程的解. 试对此给出说明.

回顾与反思

在本章中，我们学习了二元一次方程组和三元一次方程组的解法，并且学会了用二元一次方程组来解决一些简单的实际问题.

一、知识结构



用二元一次方程组解决实际问题的过程：

二、总结与反思

同一元一次方程一样，二元一次方程组也是解决现实世界中数量之间相等关系的重要数学工具.

1. 列二元一次方程组和列一元一次方程解决实际问题的思路是相同的. 有些含两个未知数的实际问题用只设一个未知数列方程的办法求解往往较困难，若设两个未知数列方程组，则常常因等量关系比较容易表示而使列方程变得简单.

2. 解二元一次方程组的基本思路是：通过“消元”，把二元一次方程组转化为一元一次方程，逐步实现化“未知”为“已知”的目的. 这就是“化归”的数学思想.

3. 解二元一次方程组的基本方法有______________________；

解三元一次方程组的基本方法有______________________.

4. 解二元一次方程组的一般步骤是____________________________________

____.

5. 用二元一次方程组解决实际问题的一般步骤是____.

三、注意事项

在列方程组解应用题时，应注意在求出方程组的解后要进行检验，使它既满足方程组，又符合题意.

复 习 题

A 组

1. 填空：

(1) 已知 $3x-y=4$. 若用含 x 的代数式表示 y，则 $y=$________.

(2) 在 $2x+\frac{1}{3}y=1$ 中，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=$_____；当 $y=3$ 时，$x=$_____.

2. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+4y=7, \\ 5x-y=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 4x-3y=7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y-2z=1, \\ x+3z=-2, \\ 3x-5y+z=21; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+y+2z=7, \\ x-2y-z=-4, \\ 2x+3y+z=18. \end{cases}$

3. 已知华氏温度 y(℉)与摄氏温度 x(℃)满足 $y=kx+b$. 当 $x=10$ 时，$y=50$；当 $x=20$ 时，$y=68$. 求 k，b 的值，并写出 y 与 x 间的关系式.

4. 七年级(二)班选出部分同学参加夏令营，分成红、蓝两队，红队戴红帽子，蓝队戴蓝帽子. 一个红队队员说，我看见的是红队人数与蓝队人数相等；一个蓝队队员说，我看见的是红队人数是蓝队人数的 2 倍. 求红队人数和蓝队人数.

5. 七年级两个班共 88 名同学给学校花坛栽种花卉，(一)班同学平均每人栽种 8 棵，(二)班同学平均每人栽种 10 棵，两个班共栽种 788 棵. 求这两个班各有多少同学.

6. 某工程队承包了两项工程. 第一项工程甲组做了 10 天，乙组做了 8 天完成，共获报酬 12 800 元；第二项工程甲组做了 8 天，乙组做了 12 天完成，共获报酬 13 600 元. 甲、乙两组平均每做工一天各应得报酬多少元？

7. 甲、乙两人相距 27 km. 若两人同时出发相向而行，则出发后 1.5 h 相遇；若两人仍是相向而行，但甲比乙先出发 30 min，则乙出发 70 min 后两人相遇. 求甲、乙两人的速度.

8. 已知一个三角形的周长为 24 cm，其中两条边的长度之和等于第三条边长的 3 倍，而这两边长度的差等于第三条边长的$\frac{1}{2}$. 求这个三角形的三边长.

B 组

1. 已知$\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$和$\begin{cases}x=4,\\y=1\end{cases}$都是方程 $mx+ny=8$ 的解，求 m，n 的值.

2. 已知 $2x-3y=5x+2y=1$，求 x，y 的值.

3. 关于 x，y 的二元一次方程组$\begin{cases}mx+ny=8,\\2mx-3ny=-4\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$求 m 和 n 的值.

4. 如图，在图(1)中，各行、各列及对角线上的三个数之和都相等.

(1) 请你求出 x，y 的值.

(2) 把满足(1)的其他 6 个数填入图(2)中的方格内.

$2x$	3	2
	y	-3
		$4y$

(1)

	3	2
		-3

(2)

(第 4 题)

5. 小亮跟爸爸于 9 月初和 10 月初两次到超市购买食品.

根据打折前后花 30 元所购买物品的数量，你能求出打折前牛奶和面包的单价各是多少元吗？

C 组

1. 某服装厂接到生产一种工作服的订货任务，要求在规定期限内完成．按原来的生产进度，每天只能生产这种服装 150 套，在规定的期限内只能完成订货量的$\frac{4}{5}$．现在，工厂改进了生产流程，每天可生产这种工作服 200 套．按现在的生产进度，不仅比规定的期限少用 1 天，而且比订货量多生产了 25 套．客户订做的工作服是多少套，要求完成的期限是多少天？
2. 制造某种产品需要 A 和 B 两种原料．其中 A 种原料的价格为 50 元/千克，B 种原料的价格为 40 元/千克．一段时间后，这两种原料的价格进行了调整，A 种原料价格上涨了 10%，B 种原料价格下降了 15%．经核算，产品的成本仍然不变．已知生产这种产品需 A，B 两种原料共 11 000 kg．A 种原料和 B 种原料各需多少？
3. 某城市为了缓解缺水状况，计划实施一项引水工程，要把 200 km 外的河水引到城市中来．该市把这个工程交给了甲、乙两个施工队，工期为 50 天．甲、乙两队合作施工了 30 天后，乙队因另外有任务需要离开 10 天，于是甲队加快施工速度，每天多修 0.6 km．乙队回来后，为了保证工期，甲队保持现在的施工速度不变，乙队每天比原来多修 0.4 km，结果工程如期完工．甲、乙两队原计划每天各施工多少千米？

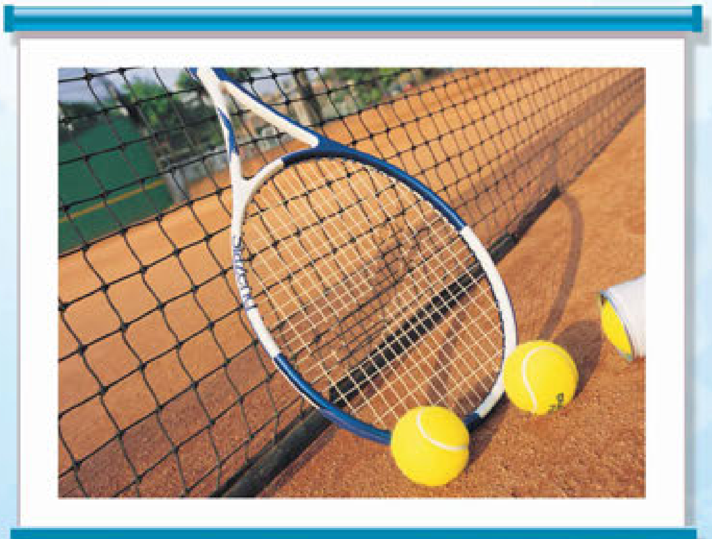
第七章

相交线与平行线

在本章中，我们将学习

- 命题
- 相交线、平行线
- 直线相交所成的角
- 两直线平行的判定与性质
- 图形的平移

图中哪些线是相交的？哪些线是平行的？其中的哪些角具有特殊的位置和数量关系？



7.1 命　题

对某一事物进行研究并交流，必然要借助于有关的名称，同时也经常需要对一些问题作出判断，并对判断说明理由.

“正整数、0 和负整数统称为整数.”这是整数的定义.

“有公共端点的两条射线组成的图形叫做角.”这是角的定义.

“含有未知数的等式叫做方程.”这是方程的定义.

大家谈谈

你能说出偶数、单项式、两点间的距离分别是怎样定义的吗?

在对“角”和“有理数”有了更多的认识后，形成了如下一些判断：

（1）两个直角相等.

（2）两个锐角之和是钝角.

（3）同角的余角相等.

（4）两个负数，绝对值大的反而小.

（5）负数与负数的差仍是负数.

（6）负数的奇次幂是负数.

上面的六个语句，都是对一件事情作出判断的句子. 像这样，能够进行肯定或者否定判断的语句，叫做**命题**(proposition).

一般地，命题都是由条件和结论两部分组成的.

命题常写成“如果……那么……”的形式. “如果”引出的部分是条件，“那么”引出的部分是结论.

例如，负数的奇次幂是负数，可写为：如果一个数是负数，那么它的奇次幂是负数. 同角的余角相等，可写为：如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等.

做一做

下列各语句中，哪些是命题，哪些不是命题？是命题的，请你先将它改写为“如果……那么……”的形式，再指出命题的条件和结论.

（1）正方形的对边相等.

（2）连接 A，B 两点.

（3）相等的两个角是锐角.

（4）延长线段 AB 到点 C，使 $AC=2AB$.

（5）同角的补角相等.

（6）-4 大于 -2 吗？

在命题中，既有正确的命题，也有不正确的命题. 我们把正确的命题叫做**真命题**（true proposition），把不正确的命题叫做**假命题**（false proposition）.

> 请指出前面的命题中，哪些是真命题，哪些是假命题.

“同角的余角相等”是一个真命题. 因为，如果设 $\angle\alpha$ 的余角是 $\angle\beta$ 和 $\angle\gamma$，那么 $\angle\alpha+\angle\beta=90°$，$\angle\alpha+\angle\gamma=90°$，从而有 $\angle\beta=\angle\gamma$.

“两个锐角之和是钝角”是一个假命题. 如 $\angle 1=15°$ 和 $\angle 2=30°$ 是两个锐角，但是 $\angle 1+\angle 2=45°$，不是钝角. 这个命题不正确，所以它是一个假命题.

要说明一个命题是假命题，只要举出一个符合命题条件，但不符合命题结论的例子就可以了. 像这样的例子叫做**反例**（counter example）.

例 1 举例说明“两个负数之差是负数”是假命题.

说明：设 $a=-2$，$b=-5$，（符合命题的条件）

则 $a-b=(-2)-(-5)=3$，不是负数.（不符合命题的结论）

所以“两个负数之差是负数”是假命题.

练 习

1. 下列各语句中，哪些是命题？是命题的，请你先将它改写为“如果……那么……”的形式，再找出命题的条件和结论.

（1）画一个角等于已知角.

(2) 互为相反数的两个数的和为 0.

(3) 当 $a=b$ 时，有 $a^2=b^2$.

(4) 当 $a^2=b^2$ 时，有 $a=b$.

2. 指出第 1 题中的假命题，并用举反例的方法说明.

习 题

1. 指出下列命题中的条件和结论：

(1) 如果两个角的和等于 180°，那么这两个角互为补角.

(2) 等式两边都加上同一个数或同一个整式，等式仍然成立.

(3) 两个钝角相等.

(4) 如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$.

2. 写出三个命题，并判断它们的真假. 如果有假命题，说出理由.

观察与思考

1. 在图 7－1－1 中，AB 和 CD 是直线吗？请你先观察，后判断，然后利用直尺验证你的结论是否正确.

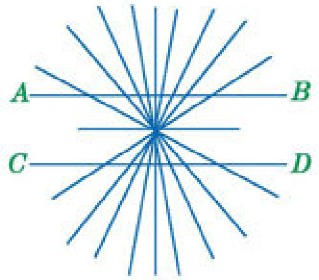


图 7－1－1

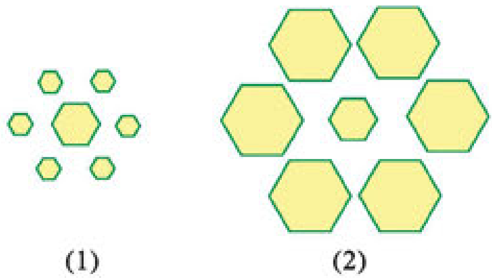


图 7－1－2

2. 在图 7－1－2 中，(1)和(2)两图中间的两个正六边形大小一样吗？请你先观察，后判断，然后利用叠合法验证你的判断是否正确.

3. 如果 $a=-b$，那么 $a^2=b^2$. 由此得出：当 $a=-b$ 时，$a^3=b^3$. 你认为后一个命题正确吗？为什么？

由观察、实验、归纳和类比等方法得出的命题，可能是真命题，也可能是假命题. 判断命题的真假需要说明理由，这个过程就是说理.

有些命题经过实践检验被公认为真命题，我们把这样的命题叫做

基本事实. 如“过平面上两点，有且只有一条直线”“两点之间的连线中，线段最短”等都是基本事实. 等式的性质也可以看做基本事实.

一起探究

观察相邻两个奇数的和：

1　3　5　7　9　…

4　8　12　16　…

(1) 相邻两个奇数的和与 4 之间有什么关系？请提出你的猜想.

(2) 通过说理，验证你的猜想正确与否.

> 人们经常用实验、归纳的方法去发现命题.

例 2　如图 7-1-3，说明“如果 C，D 是线段 AB 上的两点，且 $AC=DB$，那么 $AD=CB$”是真命题.

图 7-1-3

理由：因为　$AC=DB$（已知），

所以　$AC+CD=DB+CD$（等量加等量，和相等）.

所以　$AD=CB$（线段和的定义）.

像例题这样，依据已有的事实(包括定义、基本事实、已被确认的真命题)，按照确定的规则，得到某个具体结论的推理就是演绎推理.

有些真命题，它们的正确性已经过演绎推理得到证实，并被作为判定其他命题真假的依据，这些命题叫做**定理**(theorem).

练　习

1. “$a^2>a$”是真命题还是假命题？请说明理由.

2. 阅读下面命题及其说理过程，在括号内填上推理的依据.

命题：如图，如果$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle 1=\angle 2$，那么$\angle 3=\angle 4$.

(第 2 题)

理由：因为 $\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle 1=\angle 2$，(　　　　　　　　)

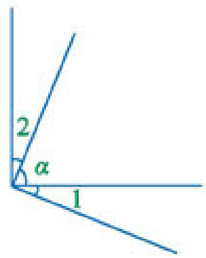
所以 $\angle ABC-\angle 1=\angle A'B'C'-\angle 2$ (　　　　　　　　).

又因为 $\angle 3=\angle ABC-\angle 1$，$\angle 4=\angle A'B'C'-\angle 2$，(两角差的定义)

所以 $\angle 3=\angle 4$ (等量代换).

习　题

1. 对"如果$\angle 1$和$\angle 2$都是$\angle \alpha$的余角，那么$\angle 1=\angle 2$"的说理过程，在括号内填上依据.



(第1题)

理由：因为 $\angle 1+\angle \alpha=90°$ (已知)，

所以 $\angle 1=90°-\angle \alpha$ (等式的性质).

因为 $\angle 2+\angle \alpha=90°$ (　　　　　　　　)，

所以 $\angle 2=90°-\angle \alpha$ (　　　　　　　　).

所以 $\angle 1=\angle 2$ (　　　　　　　　).

2. 说明"与一个偶数前后相邻的两个偶数之和，一定是4的倍数"是一个真命题.

7.2 相交线

在同一个平面内，两条直线的位置关系只有相交或不相交．在本节中，我们将研究两条直线相交构成的角及与其相关的一些问题．

观察与思考

在平面上任意画出两条直线，这两条直线的位置关系有几种可能？

下面探究当两条直线相交时，它们所构成的角之间的关系．

如图 7－2－1，两条直线 l_1，l_2 相交于点 O，形成四个角：$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$．$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 具有公共顶点 O，并且两边互为反向延长线．我们把具有这种特殊位置关系的两个角叫做**对顶角**（vertical angles）．

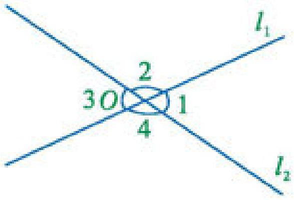


图 7－2－1

$\angle 2$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角．

对顶角的大小有什么关系呢？

一起探究

1．如图 7－2－1，两条直线 l_1，l_2 相交于点 O，当一条直线绕点 O 转动时，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 同时增大或同时减小．你能猜想出 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 的大小关系吗？

2．你能用测量或拼叠的方法验证你的猜想吗？试试看．

3．你能从“同角的补角相等”这一事实出发，用说理的方法来验证你的猜想吗？

下面，我们对猜想“对顶角相等”的正确性给予说明．

如图 7－2－1，已知 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是对顶角，那么 $\angle 1=\angle 3$．

理由：因为　$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 互补，

　　　所以　$\angle 1=\angle 3$（同角的补角相等）．

对顶角相等.

观察与思考

如图 7－2－2，一条直线 c 分别与两条直线 a，b 相交（也说直线 a，b 被直线 c 所截），构成八个角.

（1）观察∠1 和∠5，∠2 和∠6，∠3 和∠7，∠4 和∠8 的位置关系，试描述它们的位置特征.

（2）∠3 和∠6，∠4 和∠5 各有什么位置特征？

（3）∠3 和∠5，∠4 和∠6 各有什么位置特征？

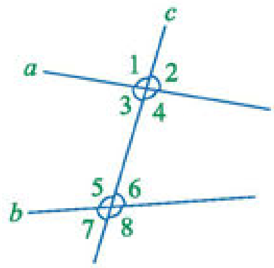


图 7－2－2

我们把具有∠1 和∠5 这样位置关系的一对角叫做**同位角**（corresponding angles）．∠2 和∠6，∠3 和∠7，∠4 和∠8 都是同位角.

把具有∠3 和∠6 这样位置关系的一对角叫做**内错角**（alternate interior angles）．∠4 和∠5 也是内错角.

把具有∠3 和∠5 这样位置关系的一对角叫做**同旁内角**（interior angles on the same side）．∠4 和∠6 也是同旁内角.

做一做

请你在图 7－2－3 的基础上分别画出符合下列各条件的角：

（1）与∠ABC 是对顶角.

（2）与∠ABC 是同位角.

（3）与∠ABC 是内错角.

（4）与∠ABC 是同旁内角.

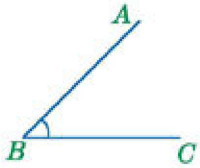
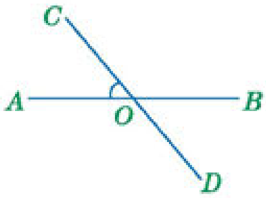


图 7－2－3

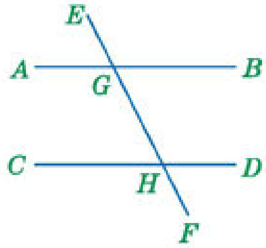
练　习

1. 填空：

如图，已知∠AOC＝50°，那么，∠AOD＝________，∠BOD＝________，∠BOC＝________.



（第 1 题）



（第 2 题）

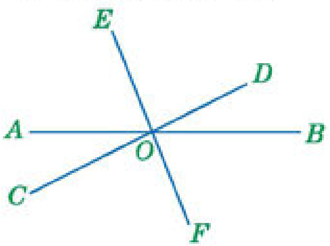
2. 直线 AB，CD 被直线 EF 所截，交点分别为 G，H，所有的同位角、内错角、同旁内角、对顶角各有多少对？分别写出两对来，填入下表.

名　称	对　数	举　例
对顶角		
同位角		
内错角		
同旁内角		

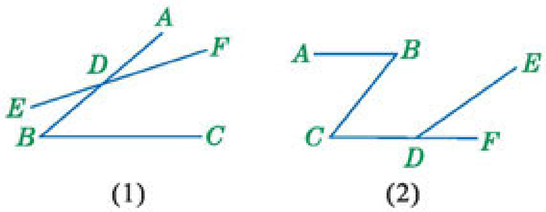
习　题

A　组

1. 如图，直线 AB，CD，EF 都经过点 O，图中有几对对顶角？请以等式的形式把它们写出来.



（第 1 题）

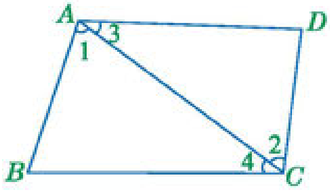


（第 2 题）

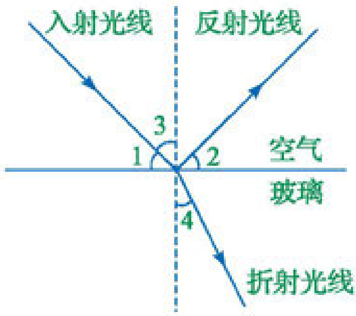
2. 如图，请分别写出各图中的一对同位角、内错角和同旁内角.

B　组

1. 如图，∠1 和∠2，∠3 和∠4 各是由哪两条直线被哪一条直线所截形成的？它们是具有什么位置关系的角？



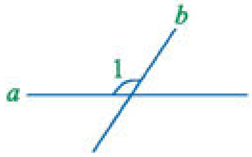
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 光线从空气射入玻璃时，光的传播方向发生了改变，一部分光线通过玻璃表面反射形成反射光线，一部分光线穿过玻璃发生了折射，如图所示. 由科学实验知道，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 4<\angle 3$，那么$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角吗，$\angle 3$和$\angle 4$是对顶角吗？为什么？

3. 如图，两条直线 a，b 相交，请你再画一条直线 c，构成八个角，并分别找出与$\angle 1$是对顶角、同位角、内错角、同旁内角的角.



（第 3 题）

如图 7－2－4，两条直线 AB 和 CD 相交于点 O. 把直线 CD 绕点 O 按逆时针方向转动，当 $\angle BOD=90^\circ$ 时，如图 7－2－5，称直线 AB 和 CD 互相**垂直**(perpendicular)，记作“$AB\perp CD$”，读作“AB 垂直于 CD”. AB 是 CD 的垂线，CD 也是 AB 的垂线. 它们的交点 O 叫做**垂足**(foot of a perpendicular).

你能举出生活中反映“两直线垂直”的例子吗？

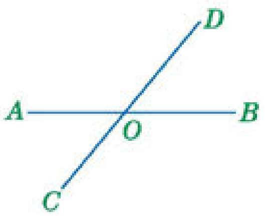


图 7－2－4

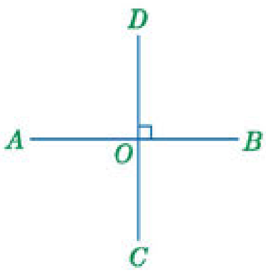


图 7－2－5

想一想，其他三个角都是什么角？

已知直线 AB 及 AB 上一点 C. 利用三角尺，可以按图 7－2－6 所示的方法，画出经过点 C 的 AB 的垂线.

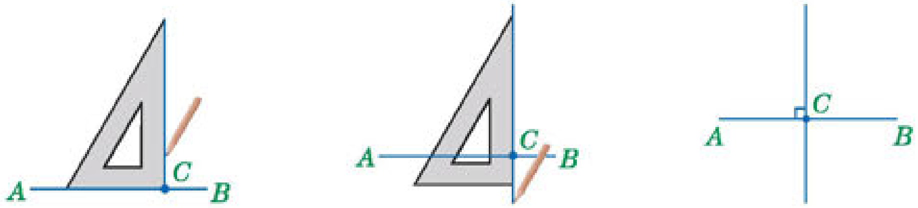


图 7-2-6

试着做做

1. 你能借助三角尺或量角器经过直线 AB 外一点 C 画出 AB 的垂线吗？试一试.

2. 经过直线上或直线外一点画该直线的垂线，可以画几条？

基本事实　**经过直线上或直线外一点，有且只有一条直线与已知直线垂直.**

一起探究

如图 7-2-7，C 是直线 AB 外一点，且 $CD \perp AB$，垂足为 D，即 CD 是点 C 到 AB 的垂线段. 再经过点 C 向直线 AB 任意引两条线段 CE，CF.

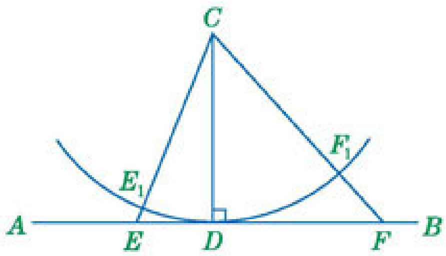


图 7-2-7

（1）猜想线段 CE、CD、CF 哪一条最短.

（2）以点 C 为圆心，CD 的长为半径画弧，圆弧分别与线段 CE，CF 相交于点 E_1，F_1. 线段 CE_1，CD，CF_1 相等吗？由此能进一步验证你的猜想吗？

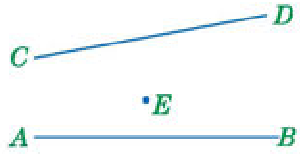
通过上面的探究，我们得到：

直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短.

我们把垂线段 CD 的长度称为**点 C 到直线 AB 的距离.**

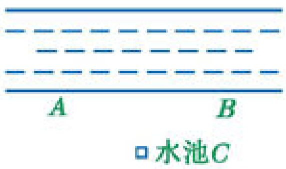
练 习

1. 如图，已知直线 AB，CD 和点 E，过点 E 分别画出直线 AB，CD 的垂线.

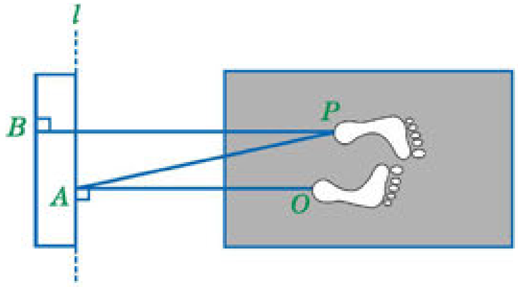


（第 1 题）

2. 如图，要把河中的水引到水池 C，在河岸 AB 的什么地方开始挖渠，才能使水渠的长度最短？



（第 2 题）



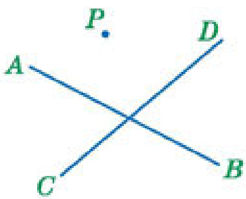
（第 3 题）

3. 如图，在测量跳远成绩的示意图中，直线 l 是起跳线，BP，AP，AO 中哪一条线段的长度是跳远的成绩？

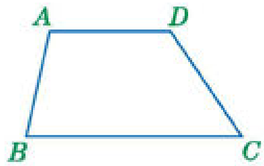
习 题

A 组

1. 经过点 P 分别画直线 AB 和 CD 的垂线，使用刻度尺分别测量点 P 到直线 AB 和 CD 的距离.（精确到 1 mm）



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，经过点 A，D 画 BC 的垂线段 AE，DF. 分别量出点 A，D 到 BC 的距离.（精确到 1 mm）

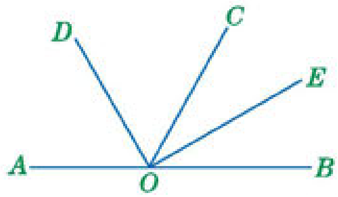
3. 一个正方形的两条对角线有什么位置关系？画一画，量一量.

B 组

1. 给下面命题的说理过程填写依据.

已知：如图，O 是直线 AB 上的一点，OD 是 $\angle AOC$ 的平分线，OE 是 $\angle COB$ 的平分线.

对 $OD \perp OE$ 说明理由.



（第 1 题）

理由：因为 $\angle DOC = \frac{1}{2}\angle AOC$（　　　　　），

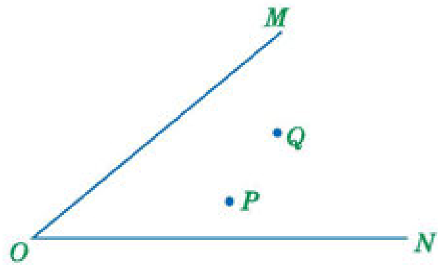
$\angle COE = \frac{1}{2}\angle COB$（　　　　　），

所以 $\angle DOC + \angle COE = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle COB = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle COB)$（　　　　　）.

所以 $\angle DOE = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$（两角和的定义）.

所以 $OD \perp OE$（　　　　　）.

2. 如图，P，Q 是 $\angle MON$ 内的两点，请由点 P，Q 分别向 $\angle MON$ 的两边画垂线 PA，PB 和 QC，QD，垂足分别为 A，B，C，D. 通过观察与测量，对 $\angle APB$ 和 $\angle CQD$ 的大小关系提出你的猜想.



（第 2 题）

7.3 平行线

平行是两条直线的一种特殊位置关系. 在本节中，我们将认识平行线，并了解如何画两条平行线.

你能从下列事物中看到平行线吗？

在同一平面内，不相交的两条直线叫做**平行线**(parallel lines).

平行线的表示：

图　形	符　号	读　法
A——B C——D	$AB//CD$	直线 AB 平行于直线 CD，或直线 AB 与 CD 平行
a—— b——	$a//b$	直线 a 平行于直线 b，或直线 a 与 b 平行

试着做做

如图 7－3－1，直线 $a//b$. A，B 为直线 a 上的任意两点.

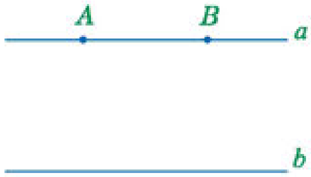


图 7－3－1

（1）请用三角尺分别画出点 A 和点 B 到直线 b 的垂线段 AM，BN，观察并度量 AM 和 BN，看看它们的长度有什么关系.

（2）在直线 a 上另取一点 C，画出点 C 到直线 b 的垂线段．它的长度与 AM，BN 的长度相等吗？

事实上，若直线 $a/\!/b$，则直线 a 上任意一点到直线 b 的距离都相等．这个距离就叫做平行线 a 与 b 之间的距离．

两条平行线之间的距离处处相等．

已知一条直线 a，怎样画出另一条直线 b，使它和直线 a 平行呢？在实际中，人们常用如下的方法(图 7－3－2)：

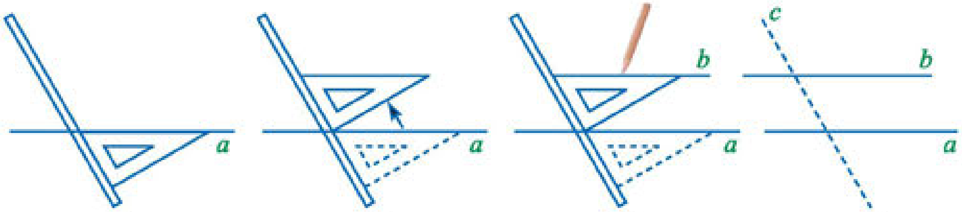


图 7－3－2

观察与思考

观察上面画平行线的过程．

（1）如果在直线 a 外任意取一点 C，你能过点 C 画出与直线 a 平行的直线吗？这样的直线能画出多少条？

（2）如图 7－3－2(4)中，只要哪对角相等，就可使 $a/\!/b$？在图 7－3－2(4)中指出这样的角．

基本事实　**经过已知直线外一点，有且只有一条直线和已知直线平行．**

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行．简单地说，就是：

基本事实　**同位角相等，两直线平行．**

例　如图 7－3－3，$\angle 1=55^\circ$，$\angle 2=55^\circ$．直线 a 与 b 平行吗？为什么？

解：$a // b$.

理由是：

因为　$\angle 1=55^\circ$，$\angle 2=55^\circ$，（已知）

所以　$\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

所以　$a // b$（同位角相等，两直线平行）.

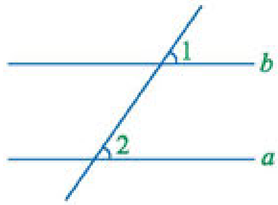


图 7－3－3

在对命题进行说理的过程中，经常会使用“因为”“所以”两个词，为简单起见，今后我们用符号“$\because$”表示“因为”，用“$\therefore$”表示“所以”.

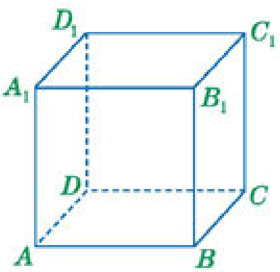
练　习

1. 如图所示是一个正方体.

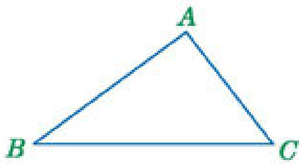
（1）写出三对互相垂直的棱，并用符号表示.

（2）写出三对互相平行的棱，用符号表示并指出它们之间的距离.

（3）观察棱 AB 和 B_1C_1，它们所在的直线相交吗？它们所在的直线平行吗？请你说明理由.



（第 1 题）



（第 2 题）

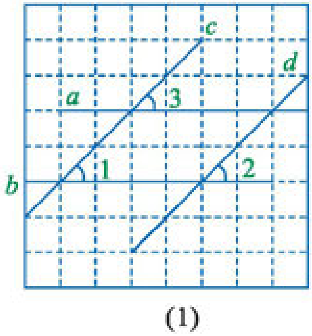
2. 如图，过点 A 画直线 MN 平行于 BC.

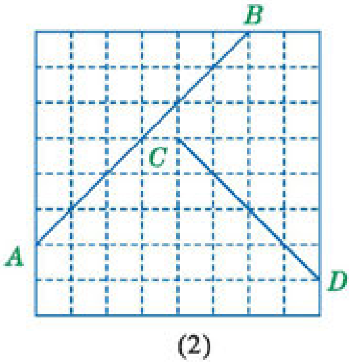
习　题

A　组

1. 图中每个小方格都是正方形.

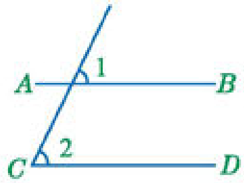
（1）在图(1)中，哪些直线是平行的？说出你的理由.





（第 1 题）

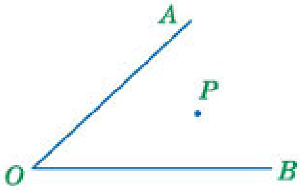
（2）借助于网格，在图(2)中画出分别与 AB，CD 平行的两条直线.



（第 2 题）

2. 如图，$\angle 1=64°$，$\angle 2=64°$，AB 与 CD 平行吗？说明理由.

B 组



（第 1 题）

1. 如图，过点 P 画直线 PE 平行于 OA，PE 与 OB 相交于点 E；画直线 PH 平行于 OB，PH 与 OA 相交于点 H.

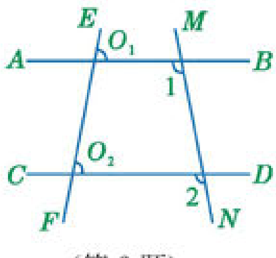
2. 填空. 如图：

（1）$\because$ $\angle EO_1B=64°$，$\angle EO_2D=64°$，（已知）

$\therefore$ ______//______（　　　　　　）.

（2）$\because$ $\angle 1=\angle 2$（已知），

$\therefore$ ______//______（　　　　　　）.



（第 2 题）

3. 填空. 如图：

（1）$\because$ $\angle NDC=\angle NAM$（已知），

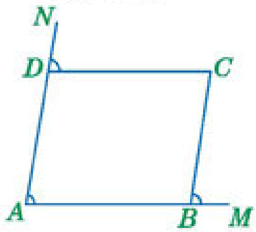
$\therefore$ ______//______（　　　　　　）.

（2）$\because$ $\angle NAM=\angle CBM$（已知），

$\therefore$ ______//______（　　　　　　）.

（3）$\because$ $\angle NDC=\angle NAM$，$\angle NAM=\angle CBM$，（已知）

$\therefore$ __________ = __________（等量代换）.



（第 3 题）

7.4 平行线的判定

我们已经确认了“同位角相等，两直线平行”，这是判定平行线的基本事实．根据这条基本事实，可以说明平行线的判定定理．

观察与思考

我们已经知道：同位角相等，两条直线平行．即在图 7－4－1 中，如果 $\angle 2=\angle 3$，那么 $AB /\!/ CD$．

小亮和小红经过认真观察有了新的发现．

小亮的发现

因为 $\angle 1=\angle 3$（对顶角相等），如果 $\angle 1=\angle 2$，那么就能推出 $\angle 2=\angle 3$，于是就有 $AB /\!/ CD$．

小红的发现

因为 $\angle 3+\angle 4=180^{\circ}$（平角定义），如果 $\angle 2+\angle 4=180^{\circ}$，那么就能推出 $\angle 2=\angle 3$，于是就有 $AB /\!/ CD$．

（1）你认为小亮和小红的想法正确吗？

（2）阅读下面这两个命题的说理过程，在括号内填写依据．

命题 1 已知：如图 7－4－1，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1=\angle 2$．

对 $AB /\!/ CD$ 说明理由．

理由：∵ $\angle 1=\angle 2$（　　　　　　），

$\angle 1=\angle 3$（　　　　　　），

∴ $\angle 2=\angle 3$（　　　　　　）．

∴ $AB /\!/ CD$（　　　　　　）．

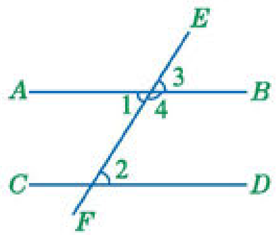


图 7－4－1

命题 2 已知：如图 7－4－1，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 2+\angle 4=180^{\circ}$．

对 $AB /\!/ CD$ 说明理由．

理由：∵ $\angle 2+\angle 4=180^{\circ}$（　　　　　　），

$\angle 3+\angle 4=180^{\circ}$（　　　　　　），

∴ $\angle 2=180^{\circ}-\angle 4$，$\angle 3=180^{\circ}-\angle 4$．（　　　　　　）

$\therefore\ \angle 2=\angle 3$ (   ).

$\therefore\ AB /\!/ CD$ (   ).

由此得到定理：两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等（或者同旁内角互补），那么这两条直线平行.

简单地说，就是：

内错角相等，两直线平行.

同旁内角互补，两直线平行.

例 如图 7-4-2，已知直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1=60°$，$\angle 2=120°$.

对 $AB /\!/ CD$ 说明理由.

理由：$\because\ \angle 1+\angle 2=60°+120°=180°$（已知），

$\angle 2=\angle 4$（对顶角相等），

$\therefore\ \angle 1+\angle 4=180°$（等量代换）.

$\therefore\ AB /\!/ CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

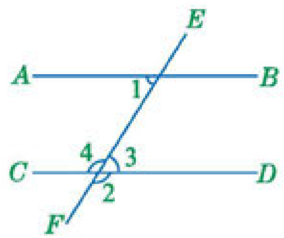
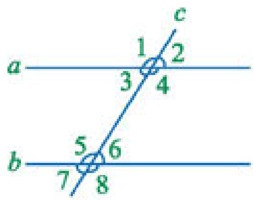


图 7-4-2

练 习

1. 如图，直线 a，b 被直线 c 所截，如果同位角 $\angle 1=\angle 5$，请你写出图中其他相等的同位角、所有相等的内错角、所有互补的同旁内角.

2. 对于上面例题中的命题，请你试着写出用“内错角相等，两直线平行”或“同位角相等，两直线平行”进行说理的过程.

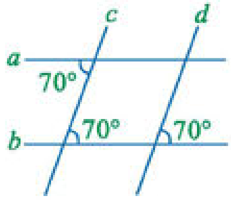


（第 1 题）

习 题

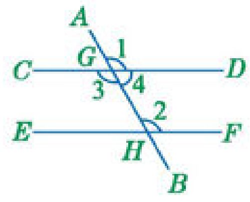
A 组

1. 如图，请你找出图中互相平行的直线，并说明理由.



（第 1 题）

2. 将下面的说理过程补充完整. 如图，直线 CD，EF 被直线 AB 所截.



（第 2 题）

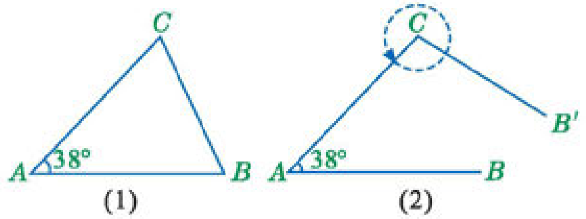
(1) ∵ $\angle 1=\angle 2$（已知），
∴ $CD /\!/ EF$（　　　　　　　　　　）.

(2) ∵ ________ = ________（已知），
∴ $CD /\!/ EF$（内错角相等，两直线平行）.

(3) ∵ ________ + ________ $=180°$（已知），
∴ $CD /\!/ EF$（同旁内角互补，两直线平行）.

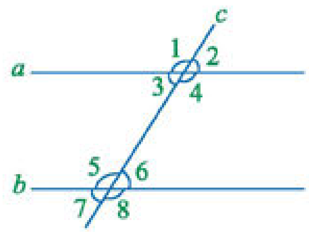
B 组

1. 如图(1)，在三角形 ABC 中，$\angle A=38°$，BC 边绕点 C 按逆时针方向旋转一周回到原来的位置. 在旋转的过程中(图(2))，是否有一位置使 $CB' /\!/ AB$? 如果有这样的位置，请你画出示意图，并写出判断它们平行的理由.



（第 1 题）

2. 如图，直线 a，b 被直线 c 所截. 若 $\angle 1+\angle 7=180°$，则 $a /\!/ b$. 在下面说理过程中的括号里填写说理依据.



（第 2 题）

方法一：∵ $\angle 1+\angle 7=180°$（　　　　　　　　），
而 $\angle 1+\angle 3=180°$（　　　　　　　　），
∴ $\angle 7=\angle 3$（　　　　　　　　）.
∴ $a /\!/ b$（　　　　　　　　）.

方法二：∵ $\angle 1+\angle 7=180°$（　　　　　　　　），
$\angle 1+\angle 3=180°$（　　　　　　　　），
∴ $\angle 7=\angle 3$（　　　　　　　　）.
又 $\angle 7=\angle 6$（　　　　　　　　），
∴ $\angle 3=\angle 6$（　　　　　　　　）.
∴ $a /\!/ b$（　　　　　　　　）.

方法三：∵ $\angle 1+\angle 7=180°$（　　　　　　　　），
而 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 7=\angle 6$，（　　　　　　　　）
∴ $\angle 4+\angle 6=180°$（　　　　　　　　）.
∴ $a /\!/ b$（　　　　　　　　）.

7.5 平行线的性质

受两条直线平行判定方法研究过程的启发，下面，我们用一条直线去截两条平行线来探索在这种情况下同位角、内错角、同旁内角有什么样的特殊关系.

一起探究

如图 7－5－1，已知直线 $a/\!/b$，且被直线 c 所截.

(1) 猜想同位角$\angle 1$与$\angle 5$的大小有什么关系，用量角器量一量，验证你的猜想.

(2) 图中其他的同位角是否也相等呢？和同学交流.

(3) 请你画一条直线 d，使它和 a，b 都相交，度量其中任意一对同位角，看其大小有什么关系.

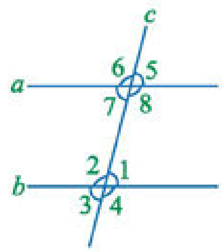


图 7－5－1

平行线性质定理[1]：两条平行线被第三条直线所截，同位角相等. 简称为：

两直线平行，同位角相等.

大家谈谈

如图 7－5－1，已知直线 $a/\!/b$，且它们被直线 c 所截. 由平行线性质定理，可得$\angle 1=\angle 5$.

(1) 由$\angle 1=\angle 5$能推出$\angle 1$与$\angle 7$相等吗？$\angle 2$与$\angle 8$也相等吗？为什么？

(2) 由$\angle 1=\angle 5$能推出两对同旁内角互补吗？为什么？

事实上，如图 7－5－2，直线 $AB/\!/CD$，AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1$和$\angle 2$是内错角.

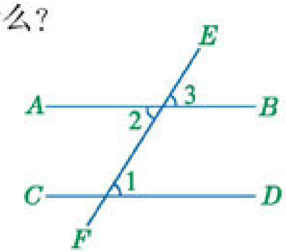


图 7－5－2

[1] 此定理将在以后说明理由.

对$\angle 1=\angle 2$说理过程如下：

$\because$ $AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$（两直线平行，同位角相等）.

$\because$ $\angle 2=\angle 3$（对顶角相等），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

做一做

已知：如图 7－5－3，直线$AB /\!/ CD$，AB，CD被直线EF所截，$\angle 1$和$\angle 2$是同旁内角.

对$\angle 1+\angle 2=180°$说明理由.

理由：$\because$ $AB /\!/ CD$（　　　　　　），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$（　　　　　　）.

$\because$ $\angle 3+\angle 2=180°$（　　　　　　），

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=180°$（　　　　　　）.

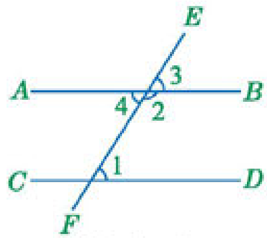


图 7－5－3

还有其他的说理方法吗？

于是得到两个平行线性质定理：两条平行线被第三条直线所截，内错角相等，同旁内角互补．简称为：

两直线平行，内错角相等.

两直线平行，同旁内角互补.

例 1 已知：如图 7－5－4，$a /\!/ b$，$c /\!/ d$，$\angle 1=73°$．求$\angle 2$和$\angle 3$的度数.

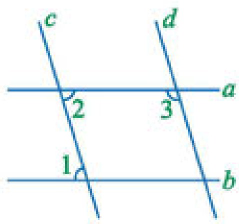


图 7－5－4

解：$\because$ $a /\!/ b$（已知），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

$\because$ $\angle 1=73°$（已知），

$\therefore$ $\angle 2=73°$（等量代换）.

$\because$ $c /\!/ d$（已知），

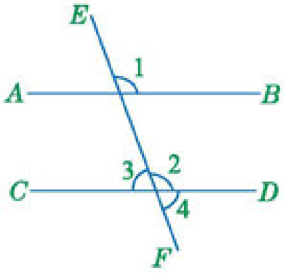
$\therefore$ $\angle 2+\angle 3=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

$\therefore$ $\angle 3=180°-\angle 2$（等式的性质）.

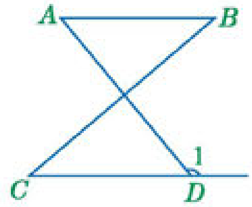
$\therefore$ $\angle 3=180°-73°=107°$（等量代换）.

练习

1. 如图，已知 $AB/\!/CD$，$\angle 1=110°$，求$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 下面写出了命题“如图，如果$\angle B=\angle C$，那么$\angle A+\angle 1=180°$”的说理过程，请你填空：

∵ $\angle B=\angle C$（　　　　　　　　　），

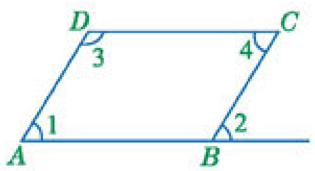
∴ ________$/\!/$________（　　　　　　　　　　　）.

∴ $\angle A+\angle 1=180°$（　　　　　　　　　）.

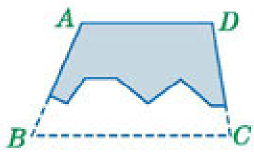
习题

A 组

1. 如图，$AB/\!/DC$，$AD/\!/BC$，且$\angle 1=60°$. 求$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.



（第 1 题）

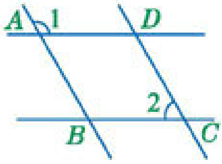


（第 2 题）

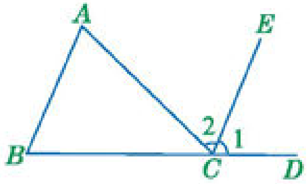
2. 如图，已知一工件 $ABCD$，它的下半部已经残缺. 只知道 $AD/\!/BC$，并且量得$\angle A=115°$，$\angle D=99°$. 你能算出残缺的下半部$\angle B$ 和$\angle C$ 两个角的度数吗？写出理由.

B 组

1. 如图，直线 $AD /\!/ BC$，$AB /\!/ DC$，$\angle 1=120°$. 求$\angle 2$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，点 B，C，D 在同一条直线上，$\angle A=\angle B$. 如果 $CE /\!/ AB$，那么 $\angle 1=\angle 2$. 对以下说理过程填空：

∵ $CE /\!/ AB$（已知），

∴ $\angle 1=$________（　　　　　　），

$\angle 2=$________（　　　　　　）.

∵ $\angle A=\angle B$（已知），

∴ $\angle 1=\angle 2$（　　　　　　）.

例 2 已知：如图 7-5-5，$\angle 1=\angle 2$.

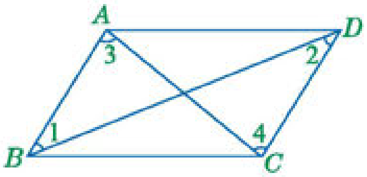


图 7-5-5

对$\angle 3=\angle 4$ 说明理由.

> 分析：$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是 AB，CD 被 BD 所截得的内错角，由$\angle 1=\angle 2$ 可得 $AB /\!/ CD$. $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 是 AB，CD 被 AC 所截得的内错角，由 $AB /\!/ CD$，可得$\angle 3=\angle 4$.

理由：∵ $\angle 1=\angle 2$（已知），

∴ $AB /\!/ CD$（内错角相等，两直线平行）.

∴ $\angle 3=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

一起探究

1. 先画直线 l_1，再画直线 l_2，l_3 分别与 l_1 平行.

2. 观察画出的图形，直线 l_2 与 l_3 有怎样的位置关系？提出猜想，并对猜想的正确与否说明理由.

事实上，如图 7－5－6，如果 $a /\!/ b$，$a /\!/ c$，那么 $b /\!/ c$.

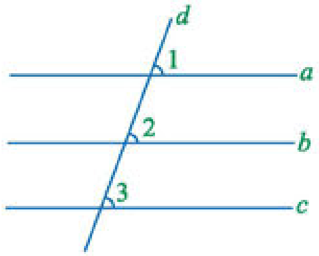


图 7－5－6

> 分析：由 $a /\!/ b$，可得 $\angle 1=\angle 2$. 由 $a /\!/ c$ 可得 $\angle 1=\angle 3$. 由等量代换可得 $\angle 2=\angle 3$. 由同位角相等，两直线平行，可得 $b /\!/ c$.

理由：$\because$ $a /\!/ b$ (　　　　　　　)，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$ (　　　　　　　).

$\because$ $a /\!/ c$ (　　　　　　　)，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$ (　　　　　　　).

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$ (　　　　　　　).

$\therefore$ $b /\!/ c$ (　　　　　　　).

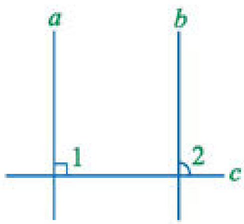
> 还有其他的说理方法吗？

平行于同一条直线的两条直线平行.

练　习

为下面的说理过程填空：

已知：如图，直线 a，b 被直线 c 所截，$a /\!/ b$，$a \perp c$. 对 $b \perp c$ 说明理由.



理由：$\because$ $a /\!/ b$ (　　　　　　　)，

$\therefore$ $\angle 1=$________ (　　　　　　　).

$\because$ $\angle 1=90°$ (　　　　　　　)，

$\therefore$ $\angle 2=$________ (　　　　　　　).

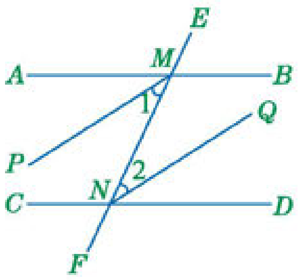
$\therefore$ $b \perp c$ (　　　　　　　).

习题

A 组

填空：

已知：如图，如果 $AB /\!/ CD$，AB，CD 与直线 EF 分别相交于点 M 和 N，MP 平分 $\angle AMF$，NQ 平分 $\angle END$.



对 $MP /\!/ NQ$ 说明理由.

理由：$\because$ $AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore$ $\angle AMF=$________（　　　　　）.

$\because$ MP 平分 $\angle AMF$（已知），

$\therefore$ $\angle 1=\frac{1}{2}$________（角平分线的定义）.

同理 $\angle 2=\frac{1}{2}\angle END$，

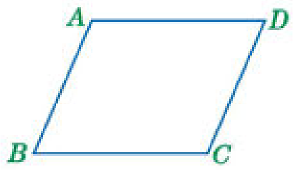
$\therefore$ $\angle 1=$________（　　　　　）.

$\therefore$ $MP /\!/ NQ$（　　　　　）.

“同理”是指和前边的推导过程与依据道理相同.

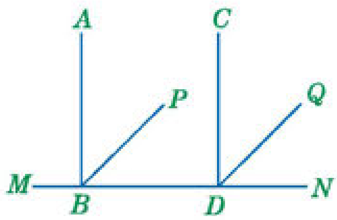
B 组

1. 已知：如图，$AB /\!/ CD$，$\angle B=\angle D$.
   对 $AD /\!/ BC$ 说明理由.



（第 1 题）

2. 如图，如果 $AB \perp MN$ 于点 B，$CD \perp MN$ 于点 D，BP 为 $\angle ABN$ 的平分线，DQ 为 $\angle CDN$ 的平分线，那么 $BP /\!/ DQ$. 请你写出说理过程.



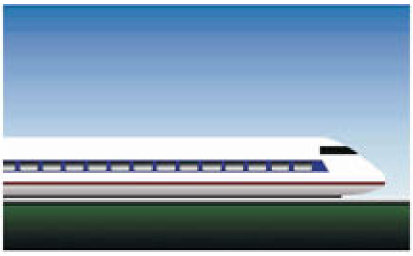
（第 2 题）

7.6 图形的平移

在学习了平行线之后，我们容易联想到小学已学过的“图形的平移”. 下面，我们来探究二者之间的内在联系.

观察与思考

1. 观察图 7－6－1 中物体的运动情况，思考下面的问题：



在平直的铁轨上行驶的列车

正被吊起的重物

自动扶梯上的购物车

图 7－6－1

（1）图中正在运动的物体，由一个位置移动到另一个位置后，它们的形状、大小是否发生了变化？

（2）在上述物体的移动过程中，同一个物体的不同部位（如沿一段直轨行驶的列车的车头和车尾）移动的方向是否相同？移动的距离是否相等？

（3）请你再说出一个类似于上面物体移动的实例.

2. 如果把在一个笔直的河道上平稳漂流的竹筏看做四边形 $ABCD$，那么，竹筏在水面上由一个位置漂流到另一个位置，就像图 7－6－2 所示的四边形 $ABCD$ 平行移动到四边形 $A'B'C'D'$ 的位置.

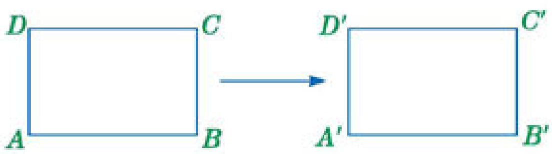


图 7－6－2

（1）你认为四边形 $ABCD$ 平行移动到四边形 $A'B'C'D'$ 后，形状和大小是否发生了变化？

(2) 当 AD 移动到 $A'D'$，BC 移动到 $B'C'$ 时，你认为它们移动的方向和距离分别有什么关系？把你的想法与同学进行交流.

像图 7-6-2 那样，在平面内，一个图形由一个位置沿某个方向移动到另一个位置，这样的图形运动叫做**平移**(translation).

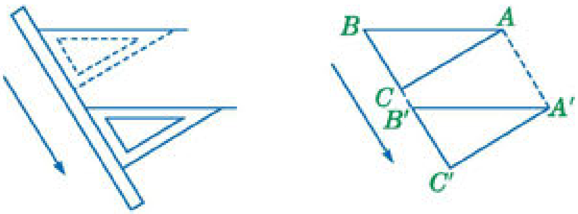
显然，图形的平移不改变它的形状和大小.

在图 7-6-2 中，四边形 $ABCD$ 经平移后得到四边形 $A'B'C'D'$. 我们把点 A 和点 A' 叫做对应点，线段 AB 与线段 $A'B'$ 叫做对应线段，$\angle A$ 和 $\angle A'$ 叫做对应角.

请你指出其他的对应点、对应线段和对应角.

一起探究

如图 7-6-3(1)所示，将三角尺的一边紧靠着固定的直尺推动，其结论是将三角形 ABC 沿 BC 方向平移到三角形 $A'B'C'$ 所在位置，如图 7-6-3(2).



(1) (2)

图 7-6-3

(1) 在图 7-6-3(2)中，指出对应线段，并说明对应线段之间有什么关系；指出对应角，并说明对应角之间有什么关系.

(2) 在图 7-6-3(2)中，对应点的连线 AA'，BB'，CC' 之间具有什么位置关系和数量关系？

在平面内，一个图形平移后得到的图形与原图形的对应线段相等，对应角相等，各对应点所连接的线段平行(或在同一条直线上)且相等.

例 如图 7-6-4，网格图中小方格都是边长为 1 个单位长度的小正方形.

(1) 请你画出将三角形 ABC 向右平移 5 个单位长度后的图形. 连接各对对应点，并指出相等的线段和相等的角.

（2）请指出图中(包括新画出的)所有分别互相平行的线段.

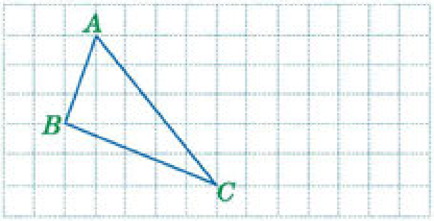


图 7-6-4

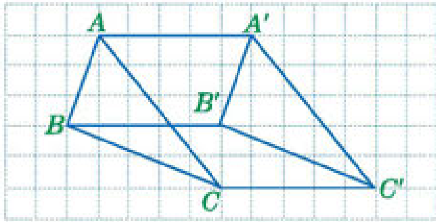


图 7-6-5

解：(1) 如图 7-6-5，三角形 $A'B'C'$ 即为所求.

相等的线段分为两类：

对应线段相等，即 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$AC=A'C'$.

对应点所连接的线段都相等，即 $AA'=BB'=CC'$.

对应角相等，即 $\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

(2) 平行的线段也分为两类：

对应线段平行，即 $AB/\!/A'B'$，$BC/\!/B'C'$，$AC/\!/A'C'$.

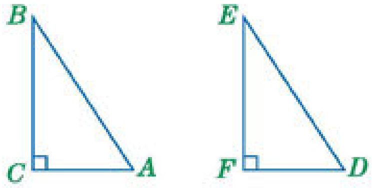
各对应点所连接的线段平行，即 $AA'/\!/BB'/\!/CC'$.

练　习

1. 如图，在图案(2)、(3)、(4)中，哪个是由图案(1)向右平移得到的？

(第 1 题)

2. 如图，直角三角形 DEF 是由直角三角形 ABC 经过平移得到的，请写出它们的对应点、对应线段和对应角.



(第 2 题)

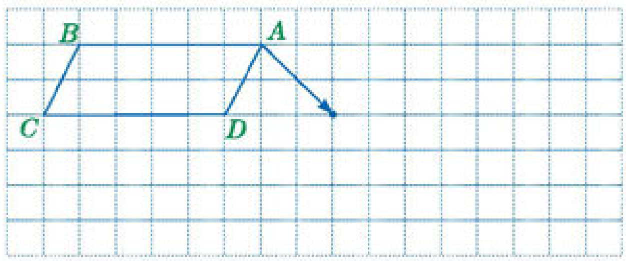
习 题

A 组

1. 如图，请画出把线段 AB，CD 分别按箭头所指的方向平移 3 cm 后的图形. 连接各对对应点，并指出相等的线段、平行的线段和相等的角.

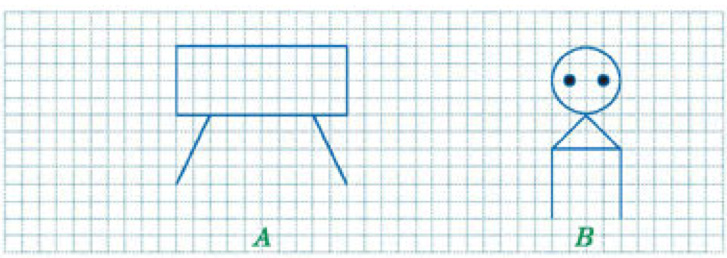
（第 1 题）

2. 在网格图中，把四边形 $ABCD$ 按箭头指示的方向平移，并使点 A 移到箭头标示的格点处. 请你画出平移后的图形.



（第 2 题）

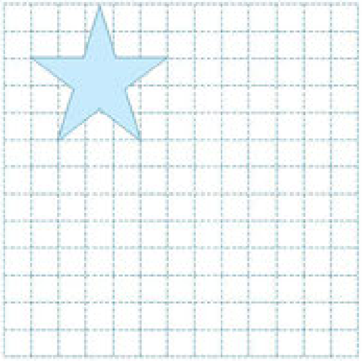
3. 如图，网格图中的每一格的边长为 1 个单位长度. 把图形 A 向左平移 2 个单位长度，把图形 B 向左平移 5 个单位长度. 请画出平移后的图形.



（第 3 题）

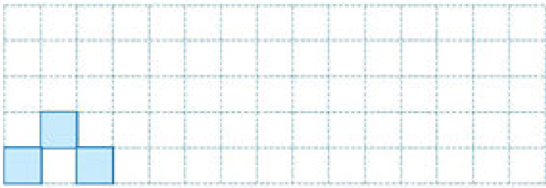
B 组

1. 如图，把网格图中的五角星先向右平移 6 格，再把向右平移后的图形向下平移 7 格，请画出每次平移后的图形.



（第 1 题）

2. 如图，如果把网格图中的三个涂了色的小正方形看做一个图形，把它在网格中进行多次平移，能不能将所有方格填满？如果填不满，怎样平移可使剩余的方格最少？最少剩余几个方格？

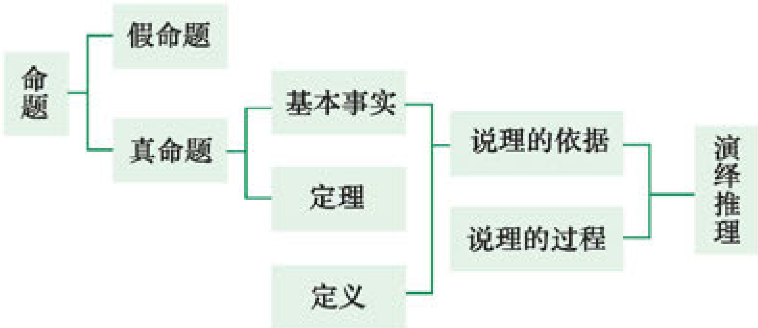


（第 2 题）

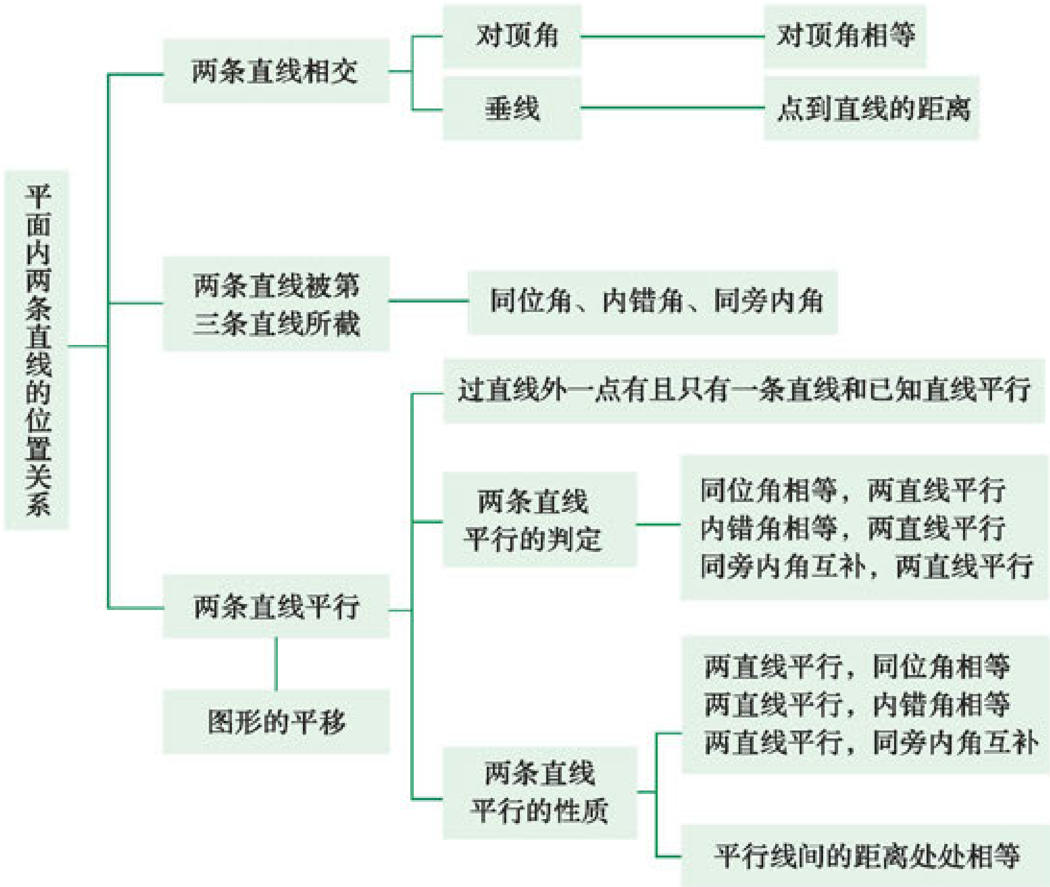
回顾与反思

一、知识结构

1．在本章中，我们学习了有关命题与说理的知识，如下表：



2．在本章中，我们还学习了相交线、平行线的有关知识，其内容及关系如下图所示：



二、总结与反思

1. 命题是对一件事情作出判断的语句. 命题由条件和结论两部分组成，常常写成“如果……那么……”的形式. 正确的命题叫做真命题，不正确的命题叫做假命题. 经过实践验证的真命题称为基本事实，经过演绎推理得到的重要的真命题叫做定理.

2. 本章同时关注两种推理，既关注“借助已有的知识和经验，借助图形的直观，通过操作、度量，运用合情推理或图形运动等方法探索、发现图形可能具有的性质”，也关注从定义和基本事实出发去探索、研究图形性质的演绎推理. 回顾“对顶角相等”的发现与对其正确性的说明，谈谈你对两种推理的认识.

在同一平面内，经过一点有且只有一条直线和已知直线垂直.

直线外一点与直线上各点的连线中，垂线段最短.

3. 在同一平面内，两条直线的位置关系有________和________. 请你借助熟悉的事物和几何图形，对直线的这两种位置关系提出自己的猜想，并加以说明.

4. 用一条直线去截两条直线，构成八个角，其中有四对同位角，两对内错角，两对同旁内角. 我们可借助同位角、内错角的相等以及同旁内角的互补来判定两直线平行.

5. 我们通常借助三角尺上的直角或量角器画已知直线的垂线（以后还有更严谨的作法），用移动三角尺的方法画平行线（这实际上是用同位角相等来保证这两条直线平行）.

6. 判定两条直线平行的方法有：________________________________.

7. 平行线的性质有：________________________________.

8. 图形的平移具有的性质：对应线段平行且相等，对应角相等，对应点所连成的线段平行(或共线)且相等.

复 习 题

A 组

1. 写出下列命题的条件和结论：

(1) 能被 2 整除的数一定是偶数.

(2) 两直线平行，同旁内角互补.

(3) 平行于同一条直线的两条直线平行.

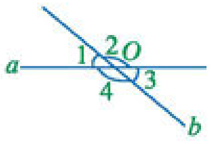
2. 请你举反例说明下列命题是假命题：

(1) 相等的角是直角.

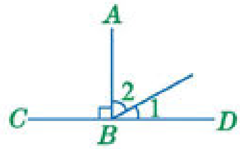
(2) 如果 $a+b=0$，那么 $a=0$，$b=0$.

(3) 如果$\angle 1>\angle 2$，那么$\angle 1$是钝角.

3. 如图，直线 a，b 交于点 O，$\angle 1=40^\circ$. 求$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.



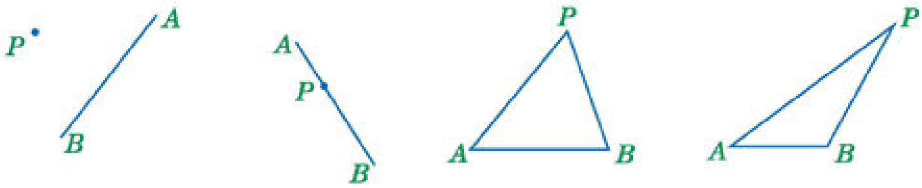
(第 3 题)



(第 4 题)

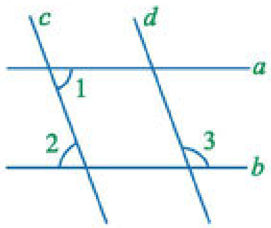
4. 如图，$AB\perp CD$，$\angle 1=30^\circ$. 求$\angle 2$ 的度数.

5. 在各图中，分别过点 P 画 AB 的垂线.

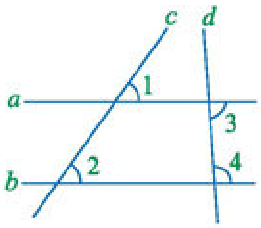


(第 5 题)

6. 如图，直线 $a/\!/b$，$c/\!/d$，$\angle 1=70^\circ$. 求$\angle 2$ 和$\angle 3$ 的度数.



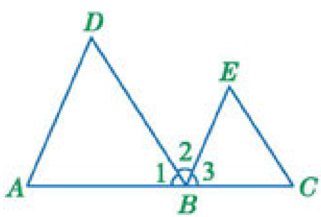
(第 6 题)



(第 7 题)

7. 如图，$\angle 1=55^\circ$，$\angle 2=55^\circ$，$\angle 3=85^\circ$. 求$\angle 4$ 的度数.

8. 如图，填空：



(第 8 题)

(1) ∵ $\angle A=\angle 3$（已知），

∴ ________//________（　　　　　　）.

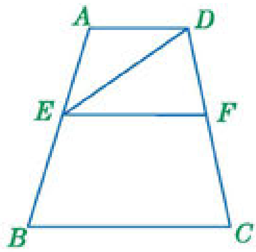
(2) ∵ $\angle 2=\angle E$（已知），

∴ ________//________（　　　　　　）.

(3) ∵ $\angle A+$________$=180^\circ$（已知），

∴ $AD/\!/BE$（　　　　　　）.

9. 完成下列说理过程，并在括号内填上相应的依据.



(第 9(1)题)

(1) 如图，∵ $\angle ADE=\angle DEF$（已知），

∴ $AD/\!/$________（　　　　）.

又∵ $\angle EFC+\angle C=180^\circ$（已知），

∴ $EF/\!/$________（　　　　）.

∴ ________//________（　　　　）.

(2) 如图，∵ $DE/\!/AB$（已知），

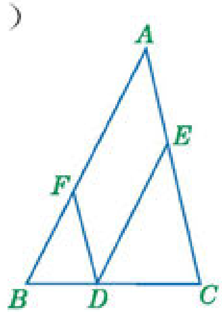
∴ $\angle B=$________，$\angle A=$________，（　　　　　）

$\angle$________$=\angle$________（两直线平行，内错角相等），

$\angle$________$+\angle$________$=180^\circ$，

$\angle$________$+\angle$________$=180^\circ$，

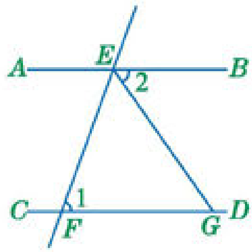
$\angle$________$+\angle$________$=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补）.



(第 9(2)题)

10. 填空：

(1) 已知：如图，$AB/\!/CD$，$\angle 1=70^\circ$，$\angle 2=55^\circ$.
对 EG 平分 $\angle BEF$ 说明理由.



(第 10(1)题)

理由：∵ $AB/\!/CD$（已知），

∴ $\angle 1+\angle$________$=180^\circ$（　　　　）.

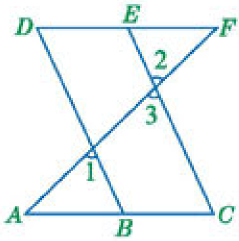
∴ $\angle$________$=180^\circ-\angle 1=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

∵ $\angle 2=55^\circ=\dfrac{1}{2}\angle$________（　　　　），

∴ EG 是 $\angle BEF$ 的平分线.

（2）已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle D$，点 B，E 分别在线段 AC，DF 上.

对 $\angle A=\angle F$ 说明理由.



（第 10(2)题）

理由：∵ $\angle 1=\angle 2$（已知），

$\angle 3=\angle 2$（　　　　），

∴ $\angle 1=\angle 3$（　　　　）.

∴ ________ // ________（　　　　　）.

∴ $\angle C=$ ________（两直线平行，同位角相等）.

又∵ $\angle C=\angle D$（已知），

∴ ________ $=\angle D$（等量代换）.

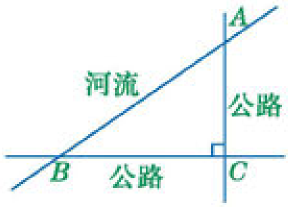
∴ AC// ________（　　　　　）.

∴ $\angle A=\angle F$（　　　　　）.

B 组

1. 任意画一个三角形 ABC，再延长 BC 至点 E，以点 C 为顶点，在 $\angle ACE$ 内画 $\angle ACD=\angle A$. 说明 $\angle DCE$ 等于三角形 ABC 中的哪个角.

2. 如图，点 C 表示村庄，AC，BC 是两条公路，AB 是河流. 点 A 和点 B 处各有一座小桥.



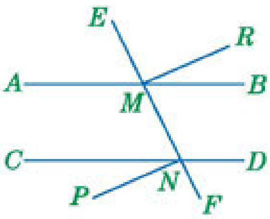
（第 2 题）

（1）量出点 A 到 BC 的图上距离.

（2）量出点 C 到 AB 的图上距离.

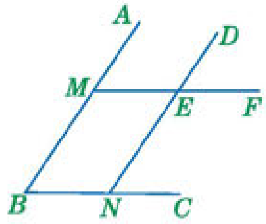
（3）如果此图是按 1∶1 000 000 的比例画出的，算出(1)和(2)中的实际距离.

3. 如图，已知 $AB\parallel CD$，EF 与 AB，CD 相交于点 M，N，$\angle BMR=\angle CNP$，试说明 $MR\parallel NP$ 的理由.



（第 3 题）

4. 请你阅读并分析下面(1)题的说理过程，然后写出(2)题的说理过程.



（第 4 题）

(1)已知：如图，$AB/\!/DN$，$MF/\!/BC$.

对$\angle ABC=\angle DEF$说明理由.

理由：∵ $AB/\!/DN$（已知），

∴ $\angle ABC=\angle DNC$（两直线平行，同位角相等）.

又∵ $MF/\!/BC$（已知），

∴ $\angle DNC=\angle DEF$（两直线平行，同位角相等）.

∴ $\angle ABC=\angle DEF$（等量代换）.

(2)已知：如图，$AB/\!/DN$，$\angle ABC=\angle DEF$.

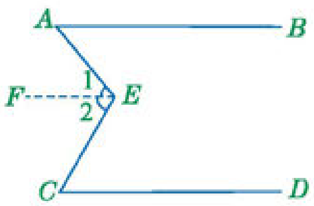
对 $BC/\!/MF$ 说明理由.

C 组

1. 阅读(1)题的说理过程，写出(2)题的说理过程.

(1)已知：如图，$AB/\!/CD$.

对$\angle AEC=\angle BAE+\angle DCE$说明理由.



（第 1(1)题）

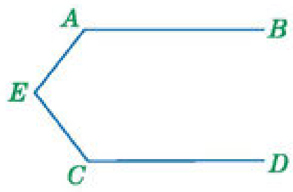
理由：作 $EF/\!/AB$，则有 $EF/\!/CD$（平行于同一条直线的两条直线平行）.

∴ $\angle 1=\angle BAE$，$\angle 2=\angle DCE$.（两直线平行，内错角相等）

∴ $\angle AEC=\angle 1+\angle 2=\angle BAE+\angle DCE$（等量代换）.

(2)已知：如图，$AB/\!/CD$.

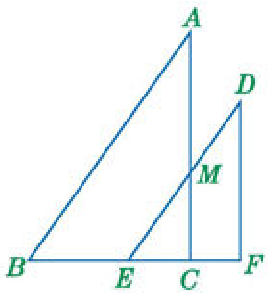
对$\angle BAE+\angle AEC+\angle DCE=360^\circ$说明理由.



（第1(2)题）

2. 已知：如图，点 B，E，C，F 在一条直线上，$AB/\!/DE$，$\angle A=\angle D$，$AC\perp BF$，AC 与 DE 相交于点M.

对 $DF\perp BF$ 说明理由.



（第2题）

第八章

整式的乘法

在本章中，我们将学习

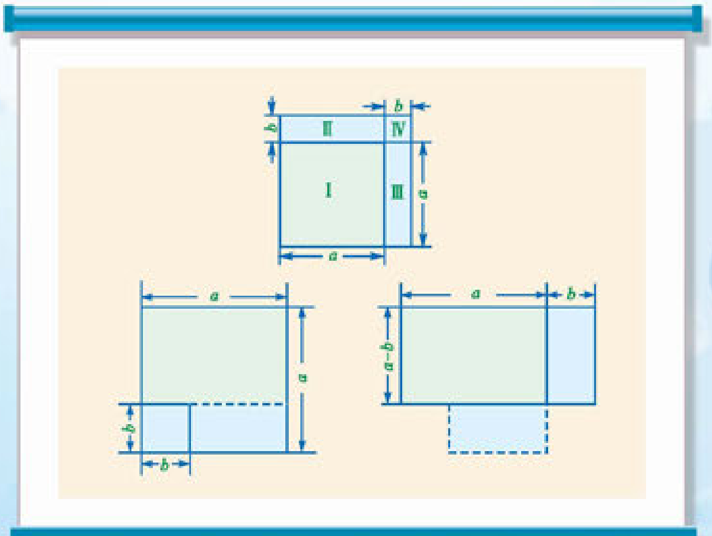
- 幂的运算
- 整式的乘法
- 乘法公式
- 科学记数法

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

你能用下面的图解释这两个公式吗？

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$，

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.



8.1 同底数幂的乘法

在生活或数学学习中，经常会遇到同底数幂相乘的问题．这一节我们就来研究同底数幂相乘的运算性质．

计算机存储容量的基本单位是字节，用 B 表示．一般用 kB(千字节)、MB(兆字节)或 GB(吉字节)作为储存容量的计量单位，它们之间的关系为

$$1\ \text{kB}=2^{10}\ \text{B},\ 1\ \text{MB}=2^{10}\ \text{kB},\ 1\ \text{GB}=2^{10}\ \text{MB}.$$

那么，1 MB 等于多少字节呢？

这个问题就是计算 $2^{10}\times 2^{10}$．用幂的形式表示，计算结果是什么呢？

一起探究

回顾乘方的意义：$2^3=2\times 2\times 2$，$2^4=2\times 2\times 2\times 2$.

1. 用幂表示下列各式的结果：

(1) $2^4\times 2^3=$__________；

(2) $2^{10}\times 2^{10}=$__________；

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=$__________；

(4) $a^2\cdot a^3=$__________.

2. 通过上面的计算，关于两个同底数幂相乘的结果，你发现了什么规律？

3. 若 m，n 是正整数，根据你发现的规律，用幂的形式表示 $a^m\cdot a^n$.

一般地，对于正整数 m，n，有

$$\begin{aligned}&a^m\cdot a^n\\=&\ (\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{个}a})(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a})\\=&\ \underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m+n)\text{个}a}\\=&\ a^{m+n}.\end{aligned}$$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n 是正整数）.

同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

利用这个性质可以直接进行同底数幂的乘法运算.

例 1 把下列各式表示成幂的形式：

（1）$2^6 \times 2^3$；　　（2）$a^2 \cdot a^4$；

（3）$x^m \cdot x^{m+1}$；　　（4）$a \cdot a^2 \cdot a^3$.

解：（1）$2^6 \times 2^3 = 2^{6+3} = 2^9$.

（2）$a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$.

（3）$x^m \cdot x^{m+1} = x^{m+(m+1)} = x^{2m+1}$.

（4）$a \cdot a^2 \cdot a^3 = a^{1+2+3} = a^6$.

三个或三个以上的同底数幂相乘，幂的运算性质仍然适用.

例 2 太阳系的形状像一个以太阳为中心的大圆盘，光通过这个圆盘半径的时间约为 2×10^4 s，光的速度约为 3×10^5 km/s. 求太阳系的直径.

解：　$2\times3\times10^5\times2\times10^4$

$=12\times10^9$(km).

答：太阳系的直径约为 12×10^9 km.

练　习

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

（1）$a^2 \cdot a^3 = a^5$.

（2）$b \cdot b = 2b$.

（3）$a \cdot a^3 = a^3$.

（4）$a^3 \cdot a^4 = a^{12}$.

2. 计算：

（1）$10^5 \times 10^4$；　　（2）$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4$；

（3）$(-2)^2 \cdot (-2)^5$；　　（4）$b^2 \cdot b^4 \cdot b^5$.

3. 用幂的形式表示下列问题的结果：

（1）2 个棱长为 2 cm 的正方体的体积的和是________ cm³.

（2）9 个棱长为 3 cm 的正方体的体积的和是________ cm³.

习题

A 组

1. 计算下列各题，结果用幂的形式表示.

(1) $10^4\times10^7$；　　(2) $2^6\times2^5$；

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$；　　(4) $\left(\frac{1}{5}\right)^4\times\left(\frac{1}{5}\right)^5$；

(5) $(-3)^3\times(-3)^4$；　　(6) $(-7)^2\times(-7)^4$.

2. 计算：

(1) $x^4\cdot x^8$；　　(2) $-d\cdot d^3$；

(3) $a^m\cdot a^{n+1}$；　　(4) $a\cdot a^3\cdot a^5$.

3. 计算：

(1) $a^2\cdot a^n\cdot a^{n+1}$；　　(2) $x^m\cdot x^{m+1}\cdot x^{m+2}$.

4. 地球的质量约为 5.98×10^{24} kg，太阳质量是地球质量的 3.3×10^5 倍. 求太阳的质量.

B 组

1. (1) 将$(a+b)^2\cdot(a+b)^3$ 表示成以 $a+b$ 为底的幂.

(2) 将$(x-y)^4\cdot(y-x)^3$ 表示成以 $x-y$ 为底的幂.

2. 计算：

(1) $x\cdot x^2\cdot x^3+x^2\cdot x^4$；　　(2) $x^2\cdot x^5-x\cdot x^2\cdot x^4$.

3. 设 n 是正整数，计算：

(1) $2^{n+1}-2^n$；　　(2) $4\times5^n-5^{n+1}$.

8.2 幂的乘方与积的乘方

如果几个同底数幂的指数都相同，那么同底数幂相乘的结果可以用幂的乘方表示．本节我们探究幂的乘方与积的乘方的运算性质．

根据计算机存储容量单位之间的关系，我们知道：

$$1\ \text{GB}=2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\ \text{B}.$$

一起探究

1．依据同底数幂乘法的性质，$2^{10}\times2^{10}\times2^{10}=$________．

根据乘方的意义，$2^{10}\times2^{10}\times2^{10}$可以表示为________．

由此，能得到什么结论？

2．$(10^2)^3$ 表示 3 个10^2 相乘，$(10^2)^3=10^{(\quad)}$．

$(a^3)^4$ 表示 4 个 a^3 相乘，$(a^3)^4=a^{(\quad)}$．

3．观察上面各式中幂指数之间的关系，猜想：若 m，n 是正整数，则 $(a^m)^n=$________．

事实上，根据乘方的意义及同底数幂乘法的性质，对于正整数 m，n，有

$$\begin{aligned}&(a^m)^n\\=&\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{n\text{个}a^m}\\=&a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}m}}\\=&a^{mn}.\end{aligned}$$

$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 是正整数）．

幂的乘方，底数不变，指数相乘．

运用这个性质可以直接进行幂的乘方运算．

例 1 计算：

（1）$(10^3)^4$；（2）$(c^2)^3$；（3）$(a^4)^m$．

解：(1) $(10^3)^4=10^{3\times4}=10^{12}$.

(2) $(c^2)^3=c^{2\times3}=c^6$.

(3) $(a^4)^m=a^{4\times m}=a^{4m}$.

例 2 计算：

(1) $x\cdot(x^2)^3$； (2) $a\cdot a^2\cdot a^3-(a^2)^3$.

解：(1) $x\cdot(x^2)^3=x\cdot x^{2\times3}=x\cdot x^6=x^7$.

(2) $a\cdot a^2\cdot a^3-(a^2)^3=a^6-a^6=0$.

先算乘方，再算乘法.

练习

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $(a^2)^3=a^5$； (2) $a^2\cdot a^3=a^6$；

(3) $a^3+a^3=a^6$； (4) $(a^m)^n=(a^n)^m$（m，n 都是正整数）.

2. 计算：

(1) $(7^2)^3$； (2) $(b^4)^3$；

(3) $(a^3)^2\cdot a^2$； (4) $(x^m)^4\cdot x^3$；

(5) $(m^2)^n\cdot m^{n+1}$； (6) $x^m\cdot(x^{2m})^3$.

习题

A 组

1. 填空：

(1) $(3^3)^3=3^{(\quad)}$； (2) $(2^3)^4=2^{(\quad)}$；

(3) $9^4=3^{(\quad)}$； (4) $[(-3)^3]^5=-3^{(\quad)}$.

2. 设 m，n 是正整数，计算：

(1) $(5^8)^n$； (2) $(7^m)^5$；

(3) $(9^8)^n$； (4) $(2^m)^n$；

(5) $(m^2)^n\cdot m^n$； (6) $(y^n)^2\cdot(y^3)^m$.

3. 计算：

(1) $(a^2)^4\cdot a^2+2(a^3)^2\cdot(a^2)^2$；

(2) $3(x^2)^2\cdot x^3-x\cdot(x^2)^3$.

B 组

1. (1) 将$[(a+b)^2]^4$表示成以$a+b$为底的幂.

   (2) 将$[(2x+y)^3]^2$表示成以$2x+y$为底的幂.

2. (1) 已知$(x^2)^m=x^8$，求m.

   (2) 已知$a^m=4$，$a^n=8$，求a^{2m+3n}.

计算$4^6\times0.25^6$.

小明认为$4^6\times0.25^6=(4\times0.25)^6$，马上得出结果为1. 你认为他这样计算有道理吗?

一般地，如果n是正整数，$(ab)^n=a^nb^n$成立吗?

一起探究

1. 观察下面的运算过程，指出每步运算的依据.

$(3\times7)^2$

$=(3\times7)\cdot(3\times7)$　(　　　　　　)

$=(3\times3)\cdot(7\times7)$　(　　　　　　)

$=3^2\times7^2.$　　　　　　(　　　　　　)

2. 按照上面的方法，完成下面的填空.

$(ab)^2=$____________________;

$(ab)^3=$____________________.

3. 试着归纳：如果n是正整数，$(ab)^n=$__________.

一般地，若n是正整数，则有

$$\begin{aligned}&(ab)^n\\=&\overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}^{n\text{个}ab}\\=&\overbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}^{n\text{个}a}\cdot\overbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}^{n\text{个}b}\\=&a^nb^n.\end{aligned}$$

$(ab)^n=a^nb^n$（n是正整数）.

积的乘方，等于各因式乘方的积.

运用这个性质可以直接进行积的乘方运算.

大家谈谈

对三个或三个以上因式积的乘方，积的乘方的性质是否也成立？

例 3 计算：

(1) $(2x)^2$；　　(2) $(3ab)^3$；

(3) $(-2b^2)^3$；　　(4) $(-xy^3)^2$；

(5) $(2a^2)^3+(-3a^3)^2+(a^2)^2\cdot a^2$.

解：(1) $(2x)^2=2^2\cdot x^2=4x^2$.

(2) $(3ab)^3=3^3a^3b^3=27a^3b^3$.

(3) $(-2b^2)^3=(-2)^3(b^2)^3=-8b^6$.

(4) $(-xy^3)^2=(-1)^2\cdot x^2\cdot(y^3)^2=x^2y^6$.

> $-xy^3$ 的系数是-1.

(5) $(2a^2)^3+(-3a^3)^2+(a^2)^2\cdot a^2$

$=2^3\cdot(a^2)^3+(-3)^2\cdot(a^3)^2+(a^2)^2\cdot a^2$

$=8a^6+9a^6+a^4\cdot a^2$

$=8a^6+9a^6+a^6$

$=18a^6$.

例 4 球体表面积的计算公式是 $S=4\pi r^2$. 地球可以近似地看成一个球体，它的半径 r 约为 6.37×10^6 m. 地球的表面积大约是多少平方米？(π 取 3.14)

解：$S=4\pi r^2$

$=4\times3.14\times(6.37\times10^6)^2$

$=4\times3.14\times6.37^2\times10^{12}$

$\approx5.10\times10^{14}(\text{m}^2)$.

答：地球的表面积大约是 5.10×10^{14} m^2.

练　习

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $(2a)^2=2a^2$；　　(2) $(ab^2)^3=a^3b^2$；

(3) $(-3a^2)^3=-9a^4$；　　(4) $(2ab^2)^2=4a^2b^2$.

2. 计算：

(1) $(3a)^4$； (2) $(-2x^2)^3$；

(3) $(-x^2y^3)^3$； (4) $(-3x^2)^3\cdot(3x)^2$.

3. 比一比谁算得快，并进行交流.

(1) $2^5\times5^5$； (2) $(-4)^4\times0.25^4$；

(3) $8^{2\,011}\times0.125^{2\,011}$； (4) $(-4)^6\times0.25^5$.

习 题

A 组

1. 计算：

(1) $(x^2y)^5$； (2) $(-3x)^3$；

(3) $-(y^4)^2$； (4) $-(m^n)^3$.

2. 计算：

(1) $(-mn^2)^3$； (2) $(x^3)^2\cdot(x^2)^3$；

(3) $(2ab^3)^2\cdot(ab)^2$； (4) $-3x^2\cdot(-x)^2$.

3. 计算：

(1) $(-x^2)^3+(-3x^2)^2\cdot x^2$；

(2) $(ab^2)^3+(ab^2)^2\cdot ab^2$.

B 组

1. 计算：

(1) $5^9\times0.2^8$； (2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^9\times\left(\frac{3}{2}\right)^9$； (3) $2^2\times4^2\times5^6$.

2. 已知 $3^{x+1}\times5^{x+1}=15^{2x-3}$，求 x 的值.

8.3 同底数幂的除法

我们知道 $5^5 \div 5^2 = 5^3$. 如果将 $a^m \div a^n$ 表示成以 a 为底的幂的形式，结果是什么呢？

一起探究

1. 计算下列各题，用幂的形式表示结果，并说明计算的依据.

(1) $5^5 \div 5^3 =$ __________________.

(2) $(-3)^5 \div (-3)^3 =$ ________________.

(3) 如果 $a \neq 0$，那么 $a^6 \div a^3 =$ __________________.

(4) 如果 $a \neq 0$，那么 $a^{10} \div a^4 =$ ________________.

2. 观察上面计算结果中幂指数之间的关系，如果 $a \neq 0$，m，n 是正整数，且 $m > n$，那么 $a^m \div a^n =$ ________.

事实上，根据除法和乘方的意义，有

$$a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a}} = \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{(m-n)\text{个}a} = a^{m-n}.$$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$，m，n 是正整数，且 $m > n$).

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

设 $a \neq 0$，对于正整数 m，n，当 $m < n$ 时，

$$a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(n-m)\text{个}a}} = \frac{1}{a^{n-m}},$$

即

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

观察与思考

已知 m，n 是正整数，$a\neq0$，为了使 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 在 $m\leqslant n$ 时仍然成立：

（1）当 $m<n$ 时，$m-n<0$，应该如何规定 a^{m-n} 的意义？

（2）当 $m=n$ 时，$m-n=0$，应该如何规定 a^0 的意义？

我们规定：

$a^0=1(a\neq0)$，即任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.

$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}(a\neq0$，$p$ 是正整数)，即任何不等于 0 的数的 $-p$ 次幂，等于这个数的 p 次幂的倒数.

这样，对于任意正整数 m，n，都有：

> **$a^m\div a^n=a^{m-n}$($a\neq0$，m，n 是正整数).**
>
> **同底数幂相除，底数不变，指数相减.**

例 计算：

（1）$10^6\div10^2$；　　（2）$2^3\div2^5$；

（3）$5^m\div5^{m-1}$；　　（4）$a^n\div a^{n+1}$ （$a\neq0$).

解：（1）$10^6\div10^2=10^{6-2}=10^4$.

（2）$2^3\div2^5=2^{3-5}=2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$.

（3）$5^m\div5^{m-1}=5^{m-(m-1)}=5$.

（4）$a^n\div a^{n+1}=a^{n-(n+1)}=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.

练　习

1. 下面的运算是否正确？如果不正确，请改正过来.

（1）$a^4\div a^3=a^7$.　　（2）$a^2\div a^5=a^{10}$.

（3）$a\div a^4=a^3$.　　（4）$a^6\div a^3=a^2$.

2. 计算：

(1) $a^6 \div a^4$；　　(2) $x^3 \div x^5$；

(3) $(-10)^8 \div (-10)^4$；　　(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^6$.

3. 将 2^3 分别除以 2^2，2^3，2^4，结果各是多少？

习　题

A　组

1. 下面的运算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $(-1)^0 = -1$.　　(2) $(-2)^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

(3) $5^{-1} = -5$.　　(4) $(-3)^{-4} = 3^4$.

2. 计算：

(1) $10^8 \div 10^3$；　　(2) $3^3 \div 3^5$；　　(3) $10^0 \div 10^2$.

3. 计算：

(1) $(a^3)^2 \div a^4$；　　(2) $(x^2)^2 \cdot x \div x^5$.

4. 计算：

(1) $2^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$；　　(2) $2^{-2} + (3\ 721 - 4\ 568)^0$.

B　组

1. 计算：

(1) $(x^2)^6 \div x^7$；　　(2) $(a^3)^2 \div (a^4 \cdot a^2)$.

2. 计算：

(1) $(x-2y)^m \div (x-2y)^5 \ (x-2y \neq 0)$；

(2) $(ab)^6 \cdot (ab)^2 \div (ab)^7$.

3. 计算：

(1) $2^3 \div 2^{-2}$；　　(2) $a^3 \cdot a^2 \div a^{-3}$.

8.4 整式的乘法

整式包括单项式和多项式，因此，整式乘法可分为单项式与单项式相乘、单项式与多项式相乘和多项式与多项式相乘.

试着做做

根据乘法的运算律和同底数幂相乘的运算性质计算：

(1) $2a\cdot 3a=$__________$=$__________.

(2) $2a\cdot 3ab=$__________$=$__________.

(3) $4xy\cdot 5x^2y=$__________$=$__________.

一般地，我们有：

单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母的幂分别相乘，其余字母连同它们的指数作为积的一个因式.

例 1 计算：

(1) $4x\cdot 3xy$；　　　　(2) $(-2x)\cdot(-3x^2y)$.

解：(1) $4x\cdot 3xy$

$=(4\times 3)\cdot(x\cdot x)\cdot y$

$=12x^2y.$

(2) $(-2x)\cdot(-3x^2y)$

$=[(-2)\times(-3)]\cdot(x\cdot x^2)\cdot y$

$=6x^3y.$

例 2 计算：

(1) $-2a\cdot\frac{1}{2}ab^2\cdot 3a^2bc$；　　　　(2) $(-ab^2)^2\cdot(-5ab)$.

解：(1) $-2a\cdot\frac{1}{2}ab^2\cdot 3a^2bc$

$=(-2)\times\frac{1}{2}\times 3\cdot(a\cdot a\cdot a^2)\cdot(b^2\cdot b)\cdot c$

$=-3a^4b^3c.$

(2) $(-ab^2)^2 \cdot (-5ab)$

$=(-1)^2 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot (-5)ab$

$=(-5)(a^2 \cdot a)(b^4 \cdot b)$

$=-5a^3b^5$.

练　习

1. 下面的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $2x^2 \cdot 3x^3=5x^5$.　　(2) $4a^3 \cdot a^4=4a^{12}$.

(3) $2x \cdot 5x^2=10x^2$.　　(4) $6a^4 \cdot 2a^2=12a^2$.

2. 计算：

(1) $2x^2 \cdot (-xy)$；　　(2) $(-2a^2b) \cdot \frac{1}{4}abc$；

(3) $(-2xy^2) \cdot (3x^2y)^2$；　　(4) $(-2a^2c)^2 \cdot (-3ab^2)$.

习　题

A　组

1. 计算：

(1) $ab \cdot a^2$；　　(2) $\frac{6}{5}a^3 \cdot 5bc^2$；

(3) $-\frac{1}{2}xy^2 \cdot (-5xy)$；　　(4) $(-2x^3yz) \cdot xy^2$.

2. 计算：

(1) $(-a) \cdot (-a)^2 \cdot a^3$；　　(2) $(-xy) \cdot \frac{1}{2}x^2y \cdot 4xy^2$；

(3) $2mn \cdot \left(-\frac{1}{2}mn\right) \cdot (-3n)$；　　(4) $(-3a^2) \cdot 2ab^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^3b\right)$.

3. 计算：

(1) $ab \cdot (-a)^2$；　　(2) $4ab^2 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right)^2$；

(3) $\frac{1}{2}xy \cdot (4xy^2)^2$；　　(4) $(-3x^2y) \cdot \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)^2$.

B 组

计算：

(1) $(-3xy^2)^2+(-4xy^3)(-xy)$；

(2) $(2xy^2)(-3xy^2)+(5xy^3)(-xy)$.

怎样计算 $m(a+b)$ 呢？

m 是一个单项式，$a+b$ 是一个多项式，这是一个单项式与多项式相乘的问题.

由于字母 m，a，b 都代表数，所以可以用分配律进行计算，即

$$m(a+b)=ma+mb.$$

大家谈谈

1. 观察图 8－4－1，请解释等式 $m(a+b)=ma+mb$ 的几何意义.

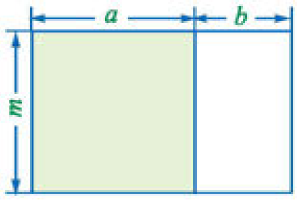


图 8－4－1

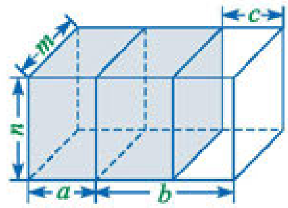


图 8－4－2

2. 计算 $mn(a+b-c)$，并根据图 8－4－2，对这个结果进行解释.

单项式与多项式相乘，用单项式去乘多项式的每一项，再把积相加.

例 3 计算：

(1) $ab(a^2+b^2)$；　　(2) $-x(2x-3)$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&ab(a^2+b^2)\\=&ab\cdot a^2+ab\cdot b^2\\=&a^3b+ab^3.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&-x(2x-3)\\=&(-x)\cdot(2x)+(-x)\cdot(-3)\\=&-2x^2+3x.\end{aligned}$$

例 4 先化简，再求值：

$$a^2(a+1)-a(a^2-1).$$

其中，$a=5$.

解： $a^2(a+1)-a(a^2-1)$

$=a^3+a^2-a^3+a$

$=a^2+a.$

当 $a=5$ 时，原式 $=5^2+5=30$.

练 习

1. 计算：

(1) $8b^2(2a^2-ab-b^2)$； (2) $\dfrac{2}{3}ab^2(3a-6b)$.

2. 先化简，再求值：

$$2x(x-3y-1)+y(6x-y+2).$$

其中，$x=-3$，$y=2$.

习 题

A 组

1. 计算：

(1) $3x(4x^2y-2xy^2)$； (2) $3a(2a^2-a+2)$；

(3) $(-2ab)^2\cdot(3a+2b-1)$； (4) $\left(\dfrac{3}{4}xy-\dfrac{1}{2}y-y^2\right)\cdot(-4x)$.

2. 计算：

(1) $a(a-b)+3b(a+4b)$；

(2) $3a(a^2+3a-2)-3(a^3+2a^2-a+1)$；

(3) $2x(-xy)^2-x^2(x^2y^2-y^2)$.

3. 先化简，再求值：

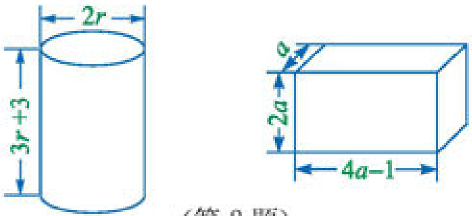
$$ab(ab-2a+2)-2b(a^2b-2ab+2a).$$

其中，$a=-1$，$b=-2$.

4. 解方程：$x(x-3)+2x(x+2)=3x^2-5$.

B 组

1. 计算：$2ab(a^2b+ab-ab^2)-ab^2(a^2-2ab+2a)$.
2. 计算下列物体的体积和表面积：



（第 2 题）

张伯伯准备把长为 m m，宽为 a m 的长方形鱼塘进行扩建，使得长再增加 n m，宽再增加 b m（图 8－4－3）.

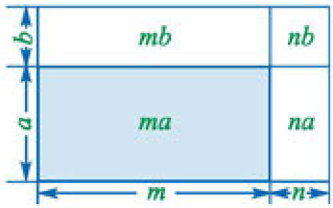


图 8－4－3

一起探究

1. 试用不同的方法表示扩建后鱼塘的面积.
2. 对于扩建后鱼塘的面积得到了下面四种结果：

（1）$(m+n)(a+b)$；　　（2）$(m+n)a+(m+n)b$；

（3）$(a+b)m+(a+b)n$；　　（4）$ma+mb+na+nb$.

请你结合图 8－4－3 对这些结果给出合理的解释.

3. $(m+n)(a+b)$是两个多项式相乘，用分配律说明下面的等式成立：

$$(m+n)(a+b)=ma+na+mb+nb.$$

大家谈谈

多项式与多项式相乘是怎样化为单项式与单项式相乘的？

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

多项式与多项式相乘的过程可以示例为：

$$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn.$$

例 5 计算：

(1) $(x-2)(x+1)$；　　(2) $\left(\frac{1}{3}a-2\right)(3a-2)$.

解：(1) $(x-2)(x+1)$

$=x^2+x-2x-2$

$=x^2-x-2$.

(2) $\left(\frac{1}{3}a-2\right)(3a-2)$

$=a^2-\frac{2}{3}a-6a+4$

$=a^2-\frac{20}{3}a+4$.

例 6 计算：

(1) $(x+3y)(2x-y)$；　　(2) $(-3x+2b)(2x-4b)$.

解：(1) $(x+3y)(2x-y)$

$=2x^2-xy+6xy-3y^2$

$=2x^2+5xy-3y^2$.

(2) $(-3x+2b)(2x-4b)$

$=-6x^2+12bx+4bx-8b^2$

$=-6x^2+16bx-8b^2$.

练　习

1. 计算：

(1) $(x+2)(2x-4)$；　　(2) $(x+2y)(3a+4b)$.

2. 先化简，再求值：

$$5x(2x+1)-(2x+3)(5x-1).$$

其中，$x=13$.

习　题

A 组

1. 计算：

(1) $(x-1)(x-2)$；　　(2) $(x+3)(x-4)$；

(3) $(3x+4)(2x-1)$；　　(4) $(x+y)(2a-b)$.

2. 计算：

(1) $(x+y)(2x-3y)$；　　(2) $(4x-3y)(y+4x)$；

(3) $(x+y)^2$；　　(4) $(a+m)(a-m)$.

3. 计算：

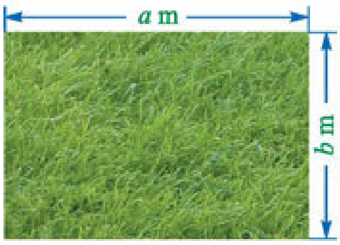
(1) $(a-1)(a-2)-a(a-5)$；　　(2) $3x(x+2)-(x+1)(3x-4)$.

4. 解方程：

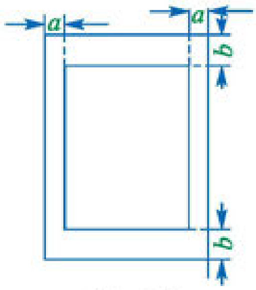
(1) $6x(x-2)-(x-2)(3x-1)=3x^2-8$；

(2) $(x-2)(2x-5)-2(x-1)(x+1)=3$.

5. 公园内有一块长方形的草坪，如图，它的长为 a m，宽为 b m. 现计划扩建，将这块草坪的长和宽都增加 10 m. 扩建后，草坪的面积将增加多少平方米?



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 我们用的书除中间的文字区域外，通常在它的左右两边都留有宽为 a 的空白，顶部和底部都留有宽为 b 的空白，如图. 若纸的长和宽分别为 x，y，求中间文字区域的面积.

B 组

1. 计算：

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$；　　(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2. 计算：

(1) $(a+b)^3$；　　(2) $(a-b)^3$.

8.5 乘法公式

在进行多项式与多项式相乘时，往往会遇到一些特殊形式的多项式相乘，其结果也很特殊. 我们把它们作为乘法公式直接使用.

由多项式的乘法，得

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

两个二项式相乘，一般应有四项. 那么两个二项式具备什么特征，合并同类项后的结果是一个二项式呢？

一起探究

1. 计算：

(1) $(x+1)(x-1)=$______________.

(2) $(a+2)(a-2)=$______________.

(3) $(2x+1)(2x-1)=$______________.

(4) $(a+b)(a-b)=$______________.

2. 上面四个式子中，两个乘式之间有什么特点？

3. 乘积合并同类项后是几项式？这个多项式有什么特点？

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差.

这个公式叫做平方差公式.

观察与思考

如图 8-5-1(1)，在一个边长为 a 的正方形中，剪去一个边长为 b 的小正方形，再将余下的部分剪拼成一个长方形(图 8-5-1(2)).

(1) 两个图形(着色部分)的面积之间有什么关系？

(2) 请你结合图形，对平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 进行解释.

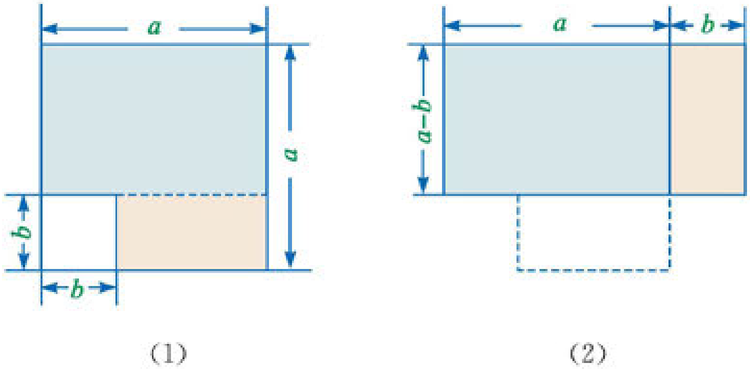


图 8-5-1

做一做

按要求填写下面的表格：

算　式	与平方差公式中 a 对应的项	与平方差公式中 b 对应的项	写成“a^2-b^2”的形式	计算结果
$(m+2)(m-2)$				
$(2m+3)(2m-3)$				
$(x+2y)(-x+2y)$				
$(1+3y)(1-3y)$				

例 1　计算：

(1) $(2x+y)(2x-y)$；

(2) $\left(\frac{2}{3}x+5y\right)\left(\frac{2}{3}x-5y\right)$；

(3) $(-5a+3b)(-5a-3b)$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&(2x+y)(2x-y)\\=&(2x)^2-y^2\\=&4x^2-y^2.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{3}x+5y\right)\left(\frac{2}{3}x-5y\right)\\=&\left(\frac{2}{3}x\right)^2-(5y)^2\\=&\frac{4}{9}x^2-25y^2.\end{aligned}$$

(3) $(-5a+3b)(-5a-3b)$
$=(-5a)^2-(3b)^2$
$=25a^2-9b^2$.

练习

1. 计算：

(1) $(x-2)(x+2)$；　　(2) $(x+2y)(x-2y)$；

(3) $(3m+2n)(3m-2n)$；　　(4) $(4a+3b)(3b-4a)$.

2. 用平方差公式计算：

(1) $998\times1\ 002$；　　(2) 395×405.

习题

A 组

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $(-m-2n)(m-2n)=m^2-2n^2$.

(2) $(-a+b)(-a-b)=-a^2-b^2$.

2. 计算：

(1) $(3x+4)(3x-4)$；　　(2) $(3a-4b)(-4b-3a)$；

(3) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{3}b\right)$；　　(4) $\left(a^2+\frac{1}{2}b^2\right)\left(a^2-\frac{1}{2}b^2\right)$.

3. 用平方差公式计算：

(1) 99×101；　　(2) 39.8×40.2.

4. 解下列方程：

(1) $4x^2+x-(2x-3)(2x+3)=1$；

(2) $2(x+3)(3-x)+2x+2x^2=20$.

B 组

1. (1) 用简便方法计算：

$19\times21=$______；$29\times31=$______；$39\times41=$______；$49\times51=$______.

(2) 你发现了什么规律？请用含有字母的式子表示出来.

2. 运用平方差公式计算：$(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)$.

3. 说明：两个相邻的奇数的平方差一定是 8 的倍数.

回顾多项式与多项式的乘法，计算$(a+b)^2$：

$$\begin{aligned}&(a+b)^2\\=&(a+b)(a+b)\\=&a(a+b)+b(a+b)\\=&a^2+ab+ab+b^2\\=&a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

一起探究

(1) 请你仿照上面的方法，计算$(a-b)^2$. 在上面的等式中用$-b$替换b，看看得到的结果是否相同.

(2) 比较$(a+b)^2$，$(a-b)^2$的计算结果，在结构上各有什么特点？

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加上(或减去)它们的积的 2 倍.

这两个等式分别叫做两数和、两数差的**完全平方公式**.

观察与思考

1. 如图 8－5－2，将边长为 $a+b$ 的正方形分割成四部分，请用不同的方法分别表示出这个正方形的面积.

2. 请给出完全平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的几何解释.

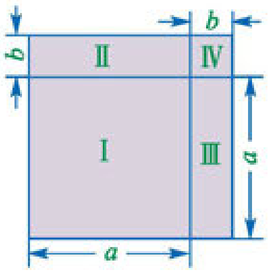


图 8－5－2

做一做

填写下面的表格：

算式	与公式中 a 对应的项	与公式中 b 对应的项	利用公式得出计算结果
$(2x+3)^2$			
$(m+2n)^2$			
$(2b-c)^2$			
$(3m-2)^2$			

例 2 计算：

(1) $(x+3y)^2$；　(2) $\left(\frac{1}{3}ab-cm\right)^2$；　(3) $(-4a-3b)^2$.

解：(1) $(x+3y)^2$

$$=x^2+2x(3y)+(3y)^2$$

$$=x^2+6xy+9y^2.$$

(2) $\left(\frac{1}{3}ab-cm\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{3}ab\right)^2-2\left(\frac{1}{3}ab\right)(cm)+(cm)^2$$

$$=\frac{1}{9}a^2b^2-\frac{2}{3}abcm+c^2m^2.$$

(3) $(-4a-3b)^2$

$$=(4a+3b)^2$$

$$=(4a)^2+2(4a)(3b)+(3b)^2$$

$$=16a^2+24ab+9b^2.$$

还有其他计算方法吗？

练　习

1. 用完全平方公式计算：

(1) $(1+a)^2$；　(2) $(2a-1)^2$；　(3) $(3a+b)^2$；

(4) $\left(2n-\frac{1}{4}\right)^2$；　(5) $\left(2n-\frac{2}{3}m\right)^2$；　(6) $\left(-2x-\frac{1}{3}y\right)^2$.

2. 用完全平方公式计算：

(1) 98^2； (2) 101^2.

习 题

A 组

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2$. (2) $(a-b)^2=a^2-b^2$.

(3) $(-a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. (4) $(-a-b)^2=a^2-2ab-b^2$.

2. 计算：

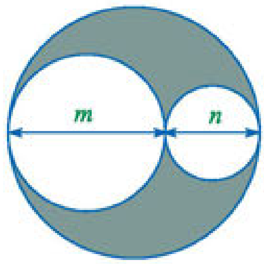
(1) $\left(\frac{1}{4}m-2n\right)^2$； (2) $(2x+5)^2$； (3) $(3y-4)^2$.

3. 用完全平方公式计算：

(1) 201^2； (2) 898^2.

4. 一个正方形，如果边长增加 3 m，它的面积就增加 39 m^2. 求这个正方形的边长.

5. 三个圆的位置如图所示，m，n 分别是两个较小的圆的直径，$m+n$ 是最大的圆的直径. 求图中阴影部分的面积.



(第 5 题)

B 组

1. 计算：

(1) $(x+5)^2-(x-5)^2$；

(2) $(a+b+c)(a+b-c)$；

(3) $(a+b-c)(a-b+c)$.

2. 计算：

(1) $(a+b+c)^2$； (2) $(a+b)^2(a-b)^2$.

3. 在计算 15×15，25×25，…，95×95 时，小明是这样做的：

$$15\times15=1\times2\times100+25=225,$$
$$25\times25=2\times3\times100+25=625,$$
$$35\times35=3\times4\times100+25=1\,225,$$
$$\vdots$$

请你运用整式乘法的有关知识说明小明做法的正确性.

读 一 读

杨辉三角

完全平方公式为：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

由此，我们自然会想到 $(a+b)^3$，$(a+b)^4$，$(a+b)^5$，…的展开式是什么.

根据多项式乘法，我们把 $(a+b)^n$（$n=0$，1，2，…）的展开式及其系数写成下面的形式：

二项式的乘方	展开结果	系数
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$a+b$	1　1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1　2　1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1　3　3　1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1　4　6　4　1
⋮	⋮	⋮

在展开式中，a 是按其幂指数由高到低排列的，b 是按其幂指数由低到高排列的；首项 a 的次数与末项 b 的次数相同，都等于二项式乘方的次数；各项中 a，b 的指数和也等于二项式乘方的次数；展开式中的项数比二项式乘方的次数多1.

展开式各项的系数的规律：每一行首末两项系数都是1，中间各项系数等于它上一行相邻的两个系数之和，第 n 行系数的和等于 2^{n-1}. 按照这个规律，可以把 $(a+b)^n$（$n=6$，7，…）的展开式中各项的系数直接写出来. 例如，$(a+b)^6$ 的展开式中，各项的系数分别为 1，6，15，20，15，6，1.

上面这个三角形系数表叫做杨辉三角形，又称为贾宪三角形，在国外被称为帕斯卡三角形. 杨辉三角形还有许多奇妙的性质，留给有兴趣的同学继续探索吧！

8.6 科学记数法

我们经常会遇到一些较大的数或较小的数，这些数读写都很不方便，这就需要一种新的记数方法——科学记数法. 下面，我们将学习用科学记数法表示数.

观察与思考

观察下面问题中出现的数.

(1) 据我国第六次人口普查的统计数据，到 2010 年 10 月底，我国人口约为1 370 000 000人，其中城镇人口约为 666 000 000 人.

(2) 人体红细胞的平均直径为 0.000 007 7 m.

(3) 1 μs(微秒)=0.000 001 s.

(4) 纳米是长度单位，1 nm(纳米)=0.000 001 mm.

像 1 370 000 000 这样的大数和 0.000 001 这样的小数，怎样表示更简单些呢?

我们可以借助于 10 的幂的形式来表示这些数. 如：

$$1\ 370\ 000\ 000=1.37\times10^{9},$$

$$666\ 000\ 000=6.66\times10^{8},$$

$$0.000\ 007\ 7=7.7\times10^{-6},$$

$$0.000\ 001=1\times10^{-6}.$$

为了记数方便和表示形式的规范，我们作如下规定：

把一个较大的数或较小的数写成 $a\times10^{n}$($1\leqslant a<10$，n 为整数)的形式，这种记数方法叫做**科学记数法**(scientific notation).

例 1 用科学记数法表示下列各数：

(1) 3 515 000；　　(2) 10 300 000；

(3) 0.000 005；　　(4) 0.000 000 012 .

解：(1) $3\ 515\ 000=3.515\times1\ 000\ 000=3.515\times10^{6}$.

(2) $10\ 300\ 000=1.03\times10\ 000\ 000=1.03\times10^{7}$.

(3) $0.000\ 005=5\times0.000\ 001=5\times\frac{1}{1\ 000\ 000}=5\times10^{-6}$.

(4) $\quad 0.000\ 000\ 012$

$=1.2\times0.000\ 000\ 01$

$=1.2\times\frac{1}{100\ 000\ 000}$

$=1.2\times10^{-8}$.

例 2 光年是一个长度单位，是指光行走一年的距离，一般被用于计算恒星间的距离.

(1) 已知光的速度约为 3×10^5 km/s，如果按 1 年为 365 天，每天为 8.64×10^4 s 计算，1 光年约等于多少千米?

(2) 太阳系以外离地球最近的恒星是比邻星，它与地球的距离大约为 3.99×10^{13} km. 比邻星与地球的距离约合多少光年?

解：(1) $\quad 3\times10^5\times8.64\times10^4\times365$

$=9\ 460.8\times10^9$

$\approx9.46\times10^{12}$(km).

结果用科学记数法表示.

(2) $\quad \frac{3.99\times10^{13}}{9.46\times10^{12}}$

$\approx0.422\times10$

$=4.22$(光年).

答：1 光年约等于 9.46×10^{12} km，比邻星与地球的距离约合 4.22 光年.

练 习

1. 用科学记数法表示下列各数：

350 000，2 400 000，506 000，100 000 000.

2. 用科学记数法表示下列各数：

0.000 000 009，0.000 57，0.000 001 09.

3. 纳米技术是能够操作细小到 0.1 nm～100 nm 物件的一类高新技术. 纳米是长度单位，1 nm 等于 0.000 000 001 m. 请用科学记数法表示 0.000 000 001.

4. 在人体内，某种细胞的直径是 0.000 001 56 m. 请用科学记数法表示 0.000 001 56.

习 题

A 组

1. 用科学记数法表示下列各数：

   (1) 2 400 000；　　　　(2) 110 000 000.

2. 用科学记数法表示下列各数：

   (1) 0.000 000 001 12；　　　　(2) 0.000 000 127；

   (3) 0.000 000 081 3；　　　　(4) 0.000 000 000 33.

3. 请你用科学记数法表示下列横线上的数：

   (1) 地球得到太阳释放出的能量，相当于全世界所有电站总发电量的<u>100 000</u>倍.

   (2) 人的大脑皮层约有<u>14 000 000 000</u>个神经细胞(神经元). 一个人如果活 100 岁，经常使用的脑神经细胞只不过有<u>1 000 000 000</u>多个.

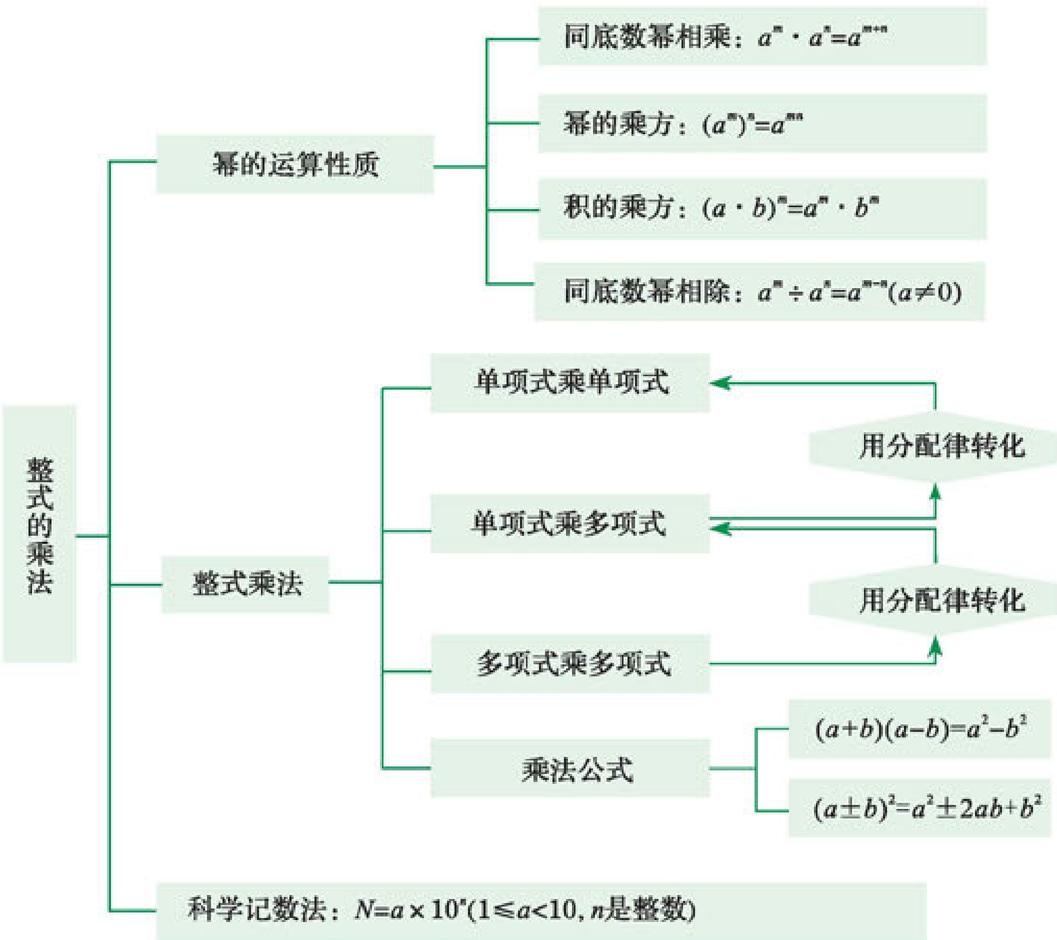
   (3) 在标准状况下，空气的密度是<u>0.001 293</u> g/cm^3.

B 组

1. 某圆形湖面的半径为 5×10^3 m，请计算湖面的面积. (π 取 3.14)
2. 太阳可以近似地看成球体. 已知太阳的半径约为 6.96×10^8 m，太阳的体积大约是多少？(π 取 3.14，$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，其中，V，r 分别为球的体积与半径.)
3. 光的速度约为 3×10^5 km/s，太阳光照射到地球上大约需要 5×10^2 s. 地球与太阳的距离大约是多少？

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

1. 幂的运算性质是从特殊到一般归纳得到的.

2. 整式相乘的结果仍然是整式. 整式相乘的过程，实质是利用分配律，逐步向单项式乘单项式转化的过程，如

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn.$$

3. 利用乘法公式进行整式的乘法运算时，因为公式中的字母可以是数或字母，也可以是一个整式，所以，在使用公式时，要注意符合公式的结构特征.

4. 同底数幂相乘的性质是____________________；

同底数幂相除的性质是____________________；

幂的乘方的性质是____________________；

积的乘方的性质是____________________.

三、注意事项

1. 运用乘法公式进行计算时，有时需要对相乘的多项式进行变形，使其符合公式的条件.

2. 在幂的运算性质中，在规定 $a^0=1$，$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$时，要求 $a\neq 0$.

复　习　题

A　组

1. 计算：

(1) $a^m a^{n+2}$；　　(2) a^2a^3a；

(3) $(-m^3)^2$；　　(4) $(-2a^2b)^3$；

(5) $(-a)^2(-a^2)^2a$；　　(6) $(x^2)^3x\div x^4$.

2. 计算：

(1) $(-3x)(6x^2)$；　　(2) $(-2a^2b)(-3ab)$；

(3) $\left(\frac{1}{3}xy^2\right)(-9x^2)$；　　(4) $a(b+c-2)$；

(5) $(-x)(2x+1)$.

3. 计算：

(1) $(x+2)(x-3)$；　　(2) $(2a+3b)(2a-5b)$；

(3) $(3x-2)(4x+5)$；　　(4) $(2a+b)(c+2d)$；

(5) $(5x+y)(5x-y)$；　　(6) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}x\right)$；

(7) $\left(2a+\frac{1}{2}b\right)^2$；　　(8) $\left(\frac{2}{3}c-\frac{1}{2}d\right)^2$.

4. 计算：

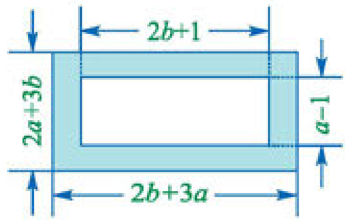
(1) $x(3x^2+x)-x^2(3x+2)$；

(2) $(x+2)^2-x(x-2)$；

(3) $4(x-2)^2-(2x+3)(2x-3)$；

(4) $(1+3a)(1-3a)+(1+3a)^2$.

5. 计算图中阴影部分的面积.



（第 5 题）

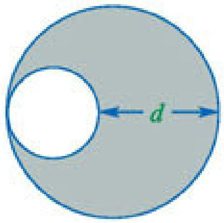
6. 某种电子计算机每秒可进行 4×10^9 次运算. 它工作 5×10^2 s，可进行多少次运算？

7. 一种光盘的存储容量是每张 700 MB. 如果每本书按 2×10^5 个汉字计算，一张光盘能存储多少本这样的书？（1 个汉字占 2 字节）

8. 如图，大圆的直径为 a，两圆直径之差为 d.

(1) 求小圆的直径及阴影部分的面积 S.

(2) 当 $a=5$ cm，$d=3$ cm，π 取 3.14 时，求 S 的近似值.



（第 8 题）

9. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 100 000 000； (2) 152 400 000；

(3) 0.000 009 075； (4) 0.000 000 000 063.

B 组

1. 计算：$(a-b+c)^2$.

2. 已知 $a+b=3$，$a^2+b^2=5$，求 ab 的值.

3. 已知 $x+y=10$，$xy=24$，求 x^2+y^2 的值.

4. 已知 $x^2-px+ab=(x+a)(x+b)$，用 a，b 表示 p.

5. 已知 a，b 满足 $(a+b)^2=1$ 和 $(a-b)^2=25$，求 a^2+b^2+ab 的值.

6. 把 20 cm 长的一根铁丝分成两段，将每一段围成一个正方形. 如果这两个正方形的面积之差是 5 cm^2，求这两段铁丝的长.

C 组

1. 计算：$999\times999+1\,999$.

2. (1) 利用多项式乘法将 $(x+1)(x+2)(x+3)$ 展开.

(2) 在上面展开式中，x^2，x 的系数及常数项与 1，2，3 的关系分别是什么？

3. 证明 $81^4-27^5-9^7$ 能被 5 整除.

第九章

三 角 形

在本章中，我们将学习

- 三角形的边
- 三角形的角
- 三角形的有关线段

三角形有三条边、三个内角，还有角平分线、中线和高．三角形的三边之间有什么关系？三内角之间有什么关系？

9.1 三角形的边

三角形是由三条线段构成的，但任意三条线段未必能构成三角形. 那么，能组成三角形的三条线段具有什么关系呢?

观察与思考

1. 指出下列图片中的三角形.

2. 如图 9-1-1，是怎样用线段 a，b，c 构成三角形的?

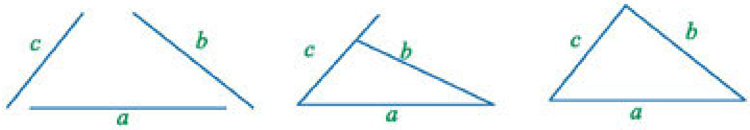


图 9-1-1

由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所构成的图形叫做**三角形**(triangle).

> 同一条直线上首尾相接的三条线段能组成三角形吗?

如图 9-1-2，线段 AB，BC，AC 叫做三角形的边；点 A，B，C 叫做三角形的顶点；$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 叫做三角形的内角(简称三角形的角). 以点 A，B，C 为顶点的三角形记为$\triangle ABC$，读作“三角形 ABC”.

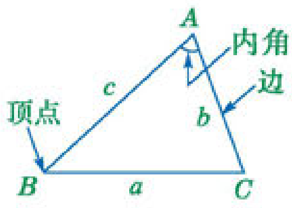


图 9-1-2

三角形的边有时也用小写字母来表示. 一般地，$\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 的对边分别用 a，b，c 表示.

一起探究

1. 用长是 2 cm，3 cm，5 cm 的线段能组成三角形吗? 用长是 2 cm，

3 cm，4 cm 的线段呢？

2. 三角形的两边之和与第三边有怎样的大小关系？

3. 请将你的猜想写成命题的形式并对猜想说理.

事实上，如图 9－1－3，已知△ABC，对 $AC+BC>AB$，$AB+AC>BC$，$AB+BC>AC$ 说理过程如下：

∵ AB 是线段，

∴ $AC+BC>AB$（两点之间线段最短）.

同理，可得

$AB+AC>BC$，$AB+BC>AC$.

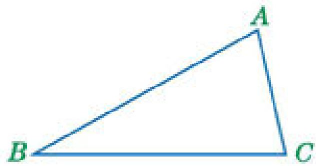


图 9－1－3

三角形任意两边的和大于第三边.

大家谈谈

已知一个三角形的最小边为 2 cm，另两边分别为 6 cm 和 a cm. a 的取值范围是什么？

如图 9－1－4. 我们把两条边相等的三角形叫做**等腰三角形**(isosceles triangle)，相等的两边叫做腰；把三边相等的三角形叫做**等边三角形**；把三边互不相等的三角形叫做**不等边三角形**. 等边三角形是特殊的等腰三角形.

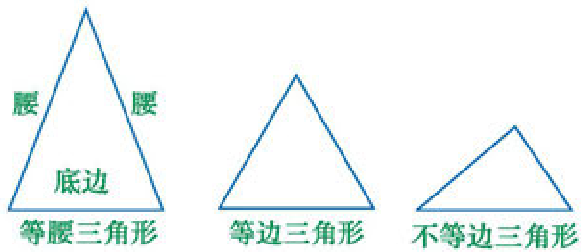


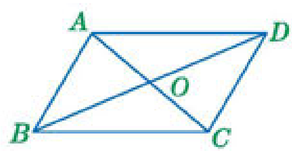
图 9－1－4

练 习

1. 请举出现实生活中有关三角形的实例.

2. 请找出图中所有的三角形，并把它们写出来.

3. 已知长度分别为 3 cm 和 5 cm 的两条线段. 在长度为

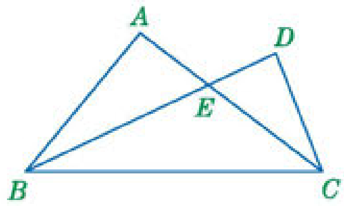


（第 2 题）

1 cm，2 cm，3 cm，4 cm，5 cm，6 cm，7 cm，8 cm，9 cm
的线段中，哪些线段能和已知的两条线段构成三角形，哪些线段不能和已知的两条线段构成三角形？

习题

1. 找出图中的三角形，并分别写出这些三角形的边和角.



（第 1 题）

2. 三条线段的长度如下：

   (1) 1.5 cm，2 cm，2.5 cm；

   (2) 1 cm，2 cm，3 cm；

   (3) 1 cm，4 cm，4 cm.

   哪一组线段能构成三角形？

3. 已知一个三角形一边的长是 5，另两边的长是整数，且周长为 12. 求这个三角形的三边长.

4. 一个等腰三角形的三边长都是整数，且周长为 15. 求这个三角形的三边长.

9.2 三角形的内角和外角

在小学，我们已经知道三角形的三个内角之和是 180°．怎样说理呢？

观察与思考

1．如图 9－2－1，在小学，我们通过剪拼发现了三角形的三个内角和等于 180°．从这种剪拼过程中，你能得到什么启示？其中哪两条直线是平行的？

2．如图 9－2－2，已知 $\triangle ABC$．延长 BC 到点 D，过点 C 作直线 $CE /\!/ AB$，得到 $\angle 4$ 和 $\angle 5$．$\angle 4$ 和 $\angle 5$ 与三角形的内角有什么关系？

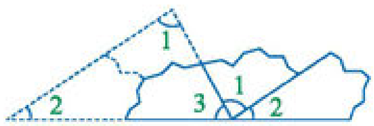


图 9－2－1

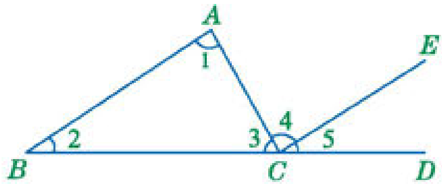


图 9－2－2

把上述两图结合起来看，剪拼的过程相当于把 $\angle 2$ 沿 BC 方向平移到 $\angle 5$ 的位置，从而有 $AB /\!/ CE$．由此我们得到启发：如果延长 BC 到点 D，过点 C 作直线 $CE /\!/ AB$，那么 $\angle 2$ 与 $\angle 5$ 是同位角，$\angle 1$ 与 $\angle 4$ 是内错角．利用平行线的性质定理以及等量代换，就把三角形三个内角 $\angle 1$，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 的和转化成了 $\angle 3$，$\angle 4$ 与 $\angle 5$ 的和，而这三个角恰好构成一个平角．

事实上，如图 9－2－3，已知 $\triangle ABC$．对 $\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$ 的说理过程如下：

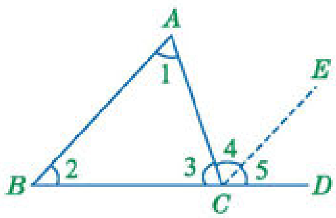


图 9－2－3

延长 BC 到点 D，作 $CE /\!/ AB$．

$\because$ $CE /\!/ AB$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 4$（两直线平行，内错角相等），

$\angle 2=\angle 5$（两直线平行，同位角相等）．

$\because$ $\angle 3+\angle 4+\angle 5=180°$（平角的定义），

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$（等量代换），

即　$\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$.

三角形内角和定理

三角形的内角和等于 180°.

在上面的推理过程中，关键是作一条与三角形某一边平行的辅助线.

试着做做

请根据图 9-2-4 给出的图示(过点 C 作 $ED \parallel AB$)，对“三角形内角和等于 180°”说理.

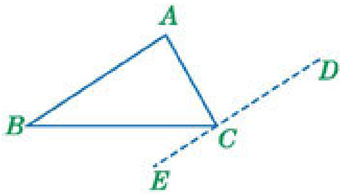


图 9－2－4

作平行线是把角从一个位置“转移”到另一个位置的重要手段.

还有其他说理的方法吗？

例 1　如图 9－2－5，在$\triangle ABC$中，$\angle A=30^\circ$，$\angle B=65^\circ$，求$\angle C$的度数.

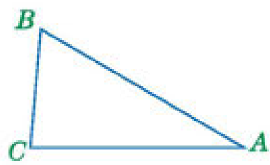


图 9－2－5

解：$\because$　$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形内角和定理），

$\therefore$　$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$.

$\because$　$\angle A=30^\circ$，$\angle B=65^\circ$，(已知)

$\therefore$　$\angle C=180^\circ-(30^\circ+65^\circ)=85^\circ$.

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=62^\circ24'$，$\angle C=28^\circ52'$，求$\angle A$的度数.

2. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=36^\circ$，$\angle A$与$\angle B$的比是 1∶2，求$\angle A$，$\angle B$的度数.

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=42^\circ$，$\angle A=\angle B$，求$\angle B$的度数.

习　题

A　组

1. 在$\triangle ABC$中：

(1) 若$\angle C=90^\circ$，$\angle A=25^\circ$，求$\angle B$的度数.

(2) 若$\angle C=37^\circ26'$，$\angle A=\angle B$，求$\angle A$的度数.

(3) 若$\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$，求$\angle C$的度数.

2. 在$\triangle ABC$中，$\angle A-\angle C=35^\circ$，$\angle B-\angle A=5^\circ$，求$\triangle ABC$各内角的度数.

3. 求适合下列条件的$\triangle ABC$的各内角的度数：

(1) $\angle A=\angle B=30^\circ$；

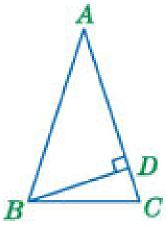
(2) $\angle A=\angle B=\angle C$；

(3) $\angle A=50^\circ$，$\angle A+\angle B=\angle C$.

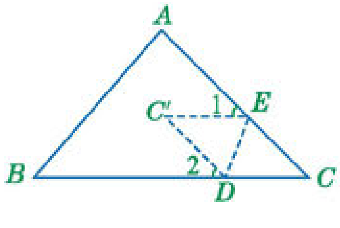
4. 一个三角形三个内角的度数之比为 2∶3∶7，求这个三角形的三个内角的度数.

B　组

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=\angle ABC=2\angle A$，$\angle ADB=90^\circ$. 求$\angle DBC$的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABC$是一张纸片，把$\angle C$沿DE折叠，点C落在点C'的位置，当$\angle C=45^\circ$时，求$\angle 1+\angle 2$的度数.

三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做三角形的**外角**（exterior angle）.

如图 9－2－6，$\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角.

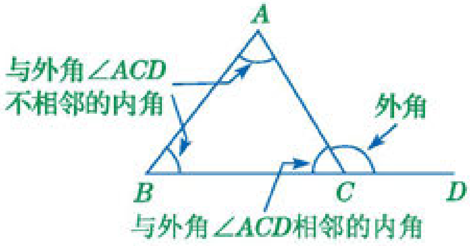


图 9－2－6

大家谈谈

1. 如图 9－2－6，$\angle ACD$ 与$\angle ACB$ 有什么关系？$\angle ACD$ 与$\angle A+\angle B$ 有什么关系？

2. 如图 9－2－6，$\angle ACD$ 与$\angle A$(或$\angle B$)的大小有什么关系？

3. 对你的猜想说理.

> 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和.
> 三角形的一个外角大于与它不相邻的任意一个内角.

例 2 如图 9－2－7，$\angle BCD=92^\circ$，$\angle A=27^\circ$，$\angle BED=44^\circ$. 求：

（1）$\angle B$ 的度数.

（2）$\angle BFD$ 的度数.

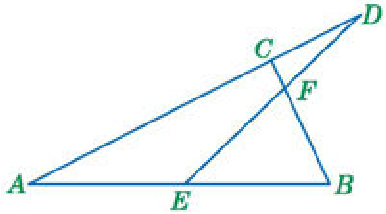


图 9－2－7

解：（1）在$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\angle BCD=\angle A+\angle B$（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和），

$\angle BCD=92^\circ$，$\angle A=27^\circ$，（已知）

$\therefore$ $\angle B=\angle BCD-\angle A=92^\circ-27^\circ=65^\circ$.

（2）在$\triangle BEF$ 中，

$\because$ $\angle BFD=\angle B+\angle BED$（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和），

$\angle BED=44^\circ$（已知），

$\angle B=65^\circ$（已求），

$\therefore$ $\angle BFD=44^\circ+65^\circ=109^\circ$.

> 还有其他解法吗？试试看.

大家谈谈

1. 一个三角形的内角最多有几个直角，最多有几个钝角？
2. 一个三角形能不能三个内角都是锐角？

一个三角形最多有一个内角是直角. 因为假设它有两个内角是直角，那么这个三角形的内角和就大于 180°了，这与三角形的内角和等于 180°矛盾，所以一个三角形最多有一个内角是直角. 同样，一个三角形最多有一个内角是钝角. 一个三角形的三个内角有可能都是锐角.

我们把三个内角都是锐角的三角形叫做**锐角三角形**(acute triangle)，有一个内角是直角的三角形叫做**直角三角形**(right triangle)，有一个内角是钝角的三角形叫做**钝角三角形**(obtuse triangle).

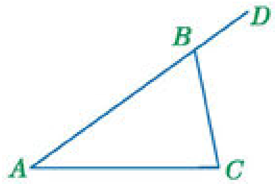
一起探究

1. 对三角形，按是否有相等的边可分为两类. 对有相等边的情况，又可分为只有两边相等的和三边相等的两类. 请你按边对三角形进行分类.

2. 请你试着按角对三角形进行分类.

练　习

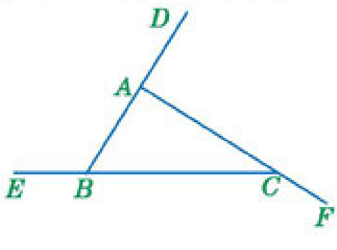
1. 如图，点 D 在$\triangle ABC$ 的边 AB 的延长线上，$\angle DBC=112°$，$\angle A=35°$. 求$\angle C$.



(第 1 题)

2. 已知某三角形的一个外角是55°，这个三角形是锐角三角形、直角三角形，还是钝角三角形？

3. 如图，$\angle DAC$，$\angle EBA$，$\angle FCB$ 分别是$\triangle ABC$ 的三个外角，求$\angle DAC+\angle EBA+\angle FCB$ 的度数.

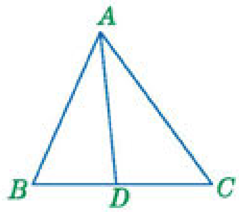


(第 3 题)

习题

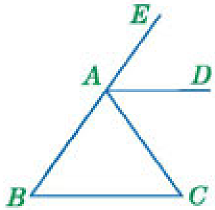
A 组

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAD=\angle CAD$，$\angle B=64^\circ$，$\angle C=55^\circ$，请各用两种方法求$\angle ADB$和$\angle ADC$的度数.



(第1题)

2. 三角形的一个外角等于与它相邻的内角的4倍，又等于与它不相邻的一个内角的2倍，求这个三角形各内角的度数.
3. 已知：如图，点E在BA的延长线上，$\angle EAD=\angle CAD$，$\angle B=\angle C$. 对$AD/\!/BC$进行说理.

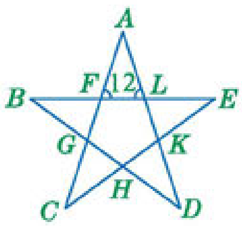


(第3题)

B 组

1. 小熊和小猫想把一个三角形纸片折一次后，折痕把原三角形分成两个直角三角形，能做到吗？如果使折痕把原三角形分成两个锐角三角形呢？如果能，说明折的方法；如果不能，说明理由.

(第1题)



(第2题)

2. 如图，$\angle 1$是哪个三角形的外角？$\angle 2$是哪个三角形的外角？利用三角形的外角与内角的关系，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$的度数.

9.3 三角形的角平分线、中线和高

三角形的角平分线、中线和高是与三角形有关的重要线段，认识这些线段对于进一步研究三角形有着重要的作用.

试着做做

如图 9－3－1，已知$\triangle ABC$.

（1）画出$\angle A$的平分线.

（2）画出边 BC 的中点，并与点 A 连接.

（3）过点 A 画出 BC 所在直线的垂线.

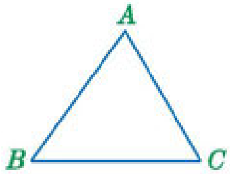


图 9－3－1

三角形一个内角的平分线与它的对边相交，这个角的顶点与交点间的线段叫做**三角形的角平分线**(angular bisector of a triangle).

如图 9－3－2，在$\triangle ABC$中，$\angle BAD=\angle CAD$，线段 AD 是$\triangle ABC$的一条角平分线.

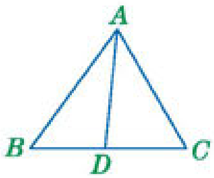


图 9－3－2

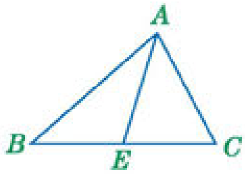


图 9－3－3

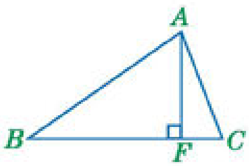


图 9－3－4

连接三角形的一个顶点与它对边中点的线段叫做**三角形的中线**(median of a triangle).

如图 9－3－3，在$\triangle ABC$中，点 E 在 BC 上，$BE=EC$，线段 AE 是$\triangle ABC$的一条中线.

三角形的一个顶点到它对边所在直线的垂线段叫做**三角形的高线**(height of a triangle)，简称**三角形的高**.

如图 9－3－4，在$\triangle ABC$中，$AF\perp BC$于点 F，线段 AF 是$\triangle ABC$的一条高.

做一做

1. 一个三角形有几条角平分线？画一个三角形，用量角器和直尺画出它的所有角平分线.

2. 如图 9－3－5，已知△ABC，请你分别画出 BC 边上的高.

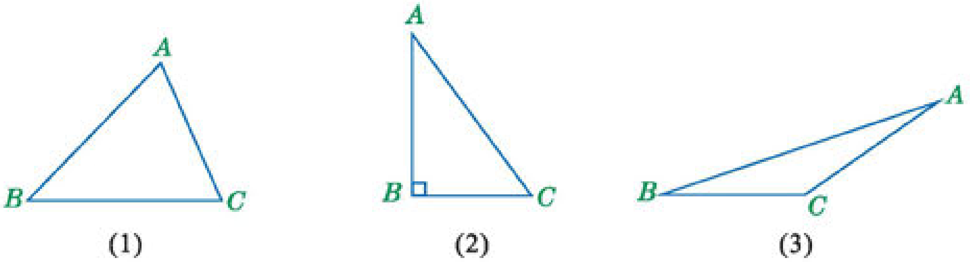


图 9－3－5

3. 剪下一个三角形纸片，用折纸的方法找到三边的中点，画出这个三角形的三条中线. 这三条中线交于一点吗？

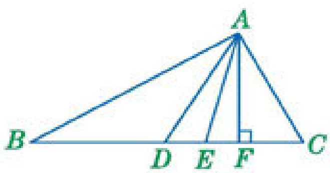
4. 按照你剪下的三角形纸片，用厚薄均匀的硬纸板裁出一个三角形，画出这个三角形的三条中线，在它们的交点处钻一个小孔，通过小孔系一条线将三角形硬纸板吊起. 三角形硬纸板处于什么状态？这种现象说明了什么？

> 纸板处于平衡状态，换一点就不平衡了.

实际上，三角形的三条中线交于一点，这个交点叫做这个三角形的**重心**.

练　习

1. 如图，AD，AE，AF 分别是△ABC 的中线、角平分线和高. 请你指出图中相等的角及相等的线段.



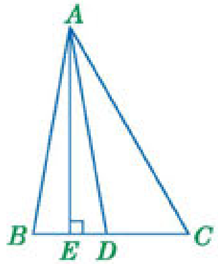
（第 1 题）

2. 分别画出锐角三角形、直角三角形和钝角三角形的三条角平分线、三条中线和三条高.

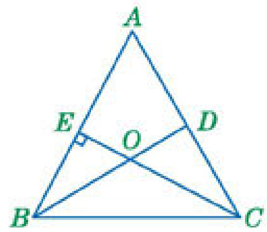
习 题

A 组

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是角平分线，AE是高，$\angle BAC=40°$，$\angle C=60°$. 求$\angle DAE$的度数.



（第 1 题）

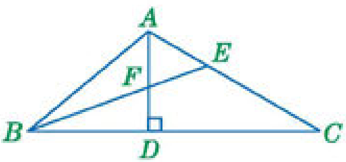


（第 2 题）

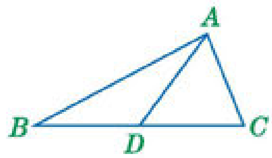
2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=62°$，BD是角平分线，CE是高，BD与CE交于点O. 求$\angle BOC$的度数.

B 组

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是高，BE是角平分线，AD，BE交于点F，$\angle C=30°$，$\angle BFD=70°$. 求$\angle BAC$的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. (1) 如图，$\triangle ABC$的面积等于 10，AD是中线，分别求出$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的面积.

   (2) 你能把一个三角形分成面积相等的两部分吗？分成面积相等的四部分呢？分成面积相等的三部分呢？

回顾与反思

一、知识结构

- 三角形
  - 有关概念 — 三角形及其顶点、边、角
  - 性质
    - 三边之间的关系
    - 三角形内角和定理
    - 内角与外角的关系
  - 主要线段 — 三角形的角平分线、中线、高

二、总结与反思

三角形是一种常见的基本图形，它的内容丰富，应用广泛．三角形的性质及研究方法是学习其他几何知识的基础．

1．三角形边和角的性质．

（1）三角形三边之间的关系：______________________________．

（2）三角形三个内角之间的关系：__________________________．

（3）三角形一个外角和与它不相邻的两个内角之间的关系：___________．

2．三角形的分类．

在对某一对象进行分类时，要先确定分类的标准，然后再按标准进行分类．分类时要做到不重不漏．

三角形按边可分类如下：

- 三角形
  - 等腰三角形
    - 等边三角形
    - 腰与底边不相等的等腰三角形
  - 不等边三角形

三角形按角可分类如下：

- 三角形
  - 锐角三角形
  - 直角三角形
  - 钝角三角形

3．添加辅助线．

在解决几何问题时，有时需要在图形上添加辅助线．

我们在对“三角形的内角和等于180°”进行说理时，是怎样添加辅助线的？添加这条辅助线的目的或作用是什么？

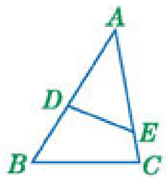
复 习 题

A 组

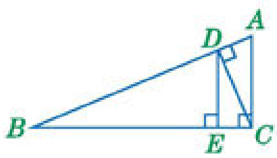
1. 填空：

   如果一个三角形的三个内角度数之比为 1∶3∶5，那么最大角的度数是________.

2. 三角形的两条边长分别为 6 cm 和 10 cm，写出这个三角形周长的取值范围.
3. 在△ABC 中，已知∠A 比∠C 大 10°，∠B 比 2∠C 小 10°. 求这个三角形各角的度数.
4. 如图，在△ABC 中，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，∠ADE=∠C. 对∠B=∠AED 进行说理.

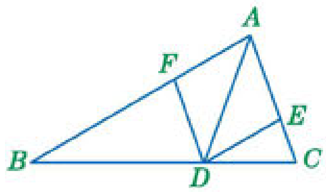


（第 4 题）



（第 5 题）

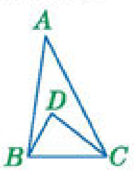
5. 如图，∠ACB=90°，CD 是△ABC 的高，DE 是△BDC 的高，∠A=3∠CDE. 求∠B 的度数.
6. △ABC 的一个内角为 40°，∠A=∠B. 你能说出△ABC 的外角分别是多少度吗？
7. 如图，AD 是△ABC 的角平分线，DE∥AB，DF∥AC. 对∠ADE=∠ADF 进行说理.



（第 7 题）

B 组

1. 三角形的三条边长都是整数，周长为 11，且有一边长为 4. 这个三角形可能的最大边长是多少？请说明理由.
2. 如图，D 为△ABC 内部一点，∠ABD=20°，∠ACD=25°，∠A=35°. 求∠BDC 的度数.



（第 2 题）

(1)　(2)

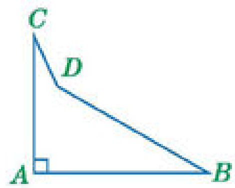
（第 3 题）

3. 已知在$\triangle ABC$中，$\angle A=40^\circ$.

(1) 如图 (1)，角平分线 BM 和 CM 交于点 M，求$\angle BMC$ 的度数.

(2) 如图 (2)，外角平分线 BN 和 CN 交于点 N，求$\angle BNC$ 的度数.

4. 某车间加工的零件如图所示，要求$\angle A=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=25^\circ$. 质检人员只量得$\angle BDC=142^\circ$，就断定这个零件不合格. 请说明理由.

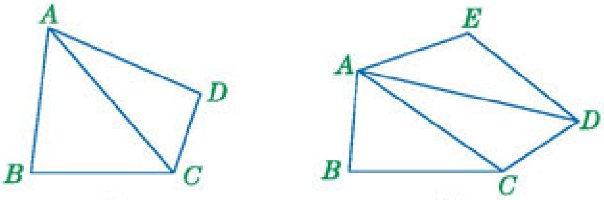


(第 4 题)

C 组

1. (1) 如图(1)，$\angle BAC+\angle B+\angle BCA$ 等于多少度？$\angle DAC+\angle D+\angle DCA$ 等于多少度？$\angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D$ 等于多少度？

(2) 如图(2)，仿照(1)题，求$\angle EAB+\angle B+\angle BCD+\angle CDE+\angle E$ 的度数.

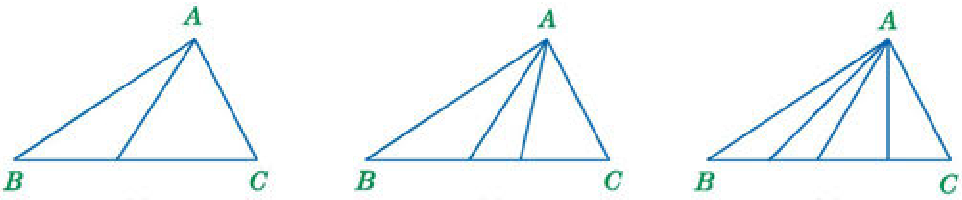


(1) (2)

(第 1 题)

2. 找规律，填空：

(1) 请你按下列要求数出三角形的个数.



(1) (2) (3)

(第 2 题)

①BC 边上有 1 个点 (图(1))，三角形的个数为________.

②BC 边上有 2 个点 (图(2))，三角形的个数为________.

③BC 边上有 3 个点 (图(3))，三角形的个数为________.

(2) 当 BC 边上有 m 个点(不含 B，C 两点)时，图形中三角形的个数为________.

第十章

一元一次不等式和一元一次不等式组

在本章中，我们将学习

- 不等式及不等式的性质
- 一元一次不等式(组)的解法
- 一元一次不等式的应用

电视台播出猜商品价格的节目.

主持人：这个电热水壶的价格不高于100元，请您猜出价格.

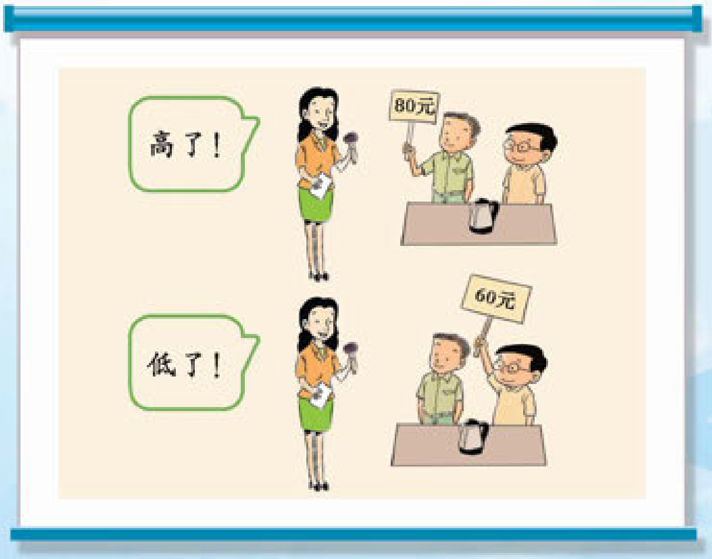
参赛者：80元.

主持人：高了！

参赛者：60元.

主持人：低了！

你认为这个电热水壶的价格在什么范围内？

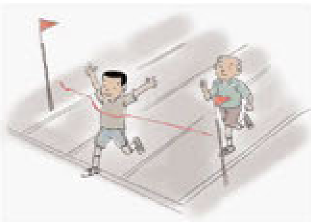


10.1 不等式

现实生活中存在着相等与不相等的数量关系问题．对于不相等的数量关系问题，需要借助于不等式的知识来研究．

我们知道，用不等号“$>$”“$<$”可以表示两个数之间的大小关系，如$7>3$，$-5<-2$等．

观察与思考



1．小明与小亮进行百米训练，小明先到达终点．小明到达终点所用的时间为15.2 s．如果小亮所用的时间为a s，那么a与15.2之间的关系可以表示为________．

2．小明在某一周的零用钱为m元，他在这一周的支出情况如下表：

为灾区捐款	就餐	购买文具	买冷饮
5元	50元	3元	2元

在略有节余的情况下，m（元）与60（元）之间的关系可以表示为____________．

一起探究

在高速公路上，有大、小两辆卡车从甲地向乙地运货．大卡车的行驶速度为60 km/h，小卡车的行驶速度为80 km/h，大卡车比小卡车早出发1 h．

（1）如果设小卡车行驶的时间为 x h，那么它行驶的路程该怎样表示？这时，大卡车行驶的路程又该怎样表示？

（2）小卡车赶上或超过大卡车后，它们所行驶的路程之间的关系应怎样表示？

（3）完成下表：

小卡车行驶的时间 x/h	小卡车行驶的路程/km	大卡车行驶的路程/km
1	80	120
2	160	180
3	240	240
4		
5		
6		
⋮	⋮	⋮

（4）小卡车开出多少小时后赶上或超过大卡车？

经探究，我们可以得到小卡车赶上和超过大卡车，两车行驶路程的关系式分别为

$$80x=60(x+1) \text{ 和 } 80x>60(x+1).$$

由列表可知，当 $x=3$ 时，$80x=60(x+1)$；

当 $x>3$ 时，$80x>60(x+1)$.

即当 $x\geqslant 3$ 时，$80x\geqslant 60(x+1)$.

像 $7>3$，$-5<-2$，$a>15.2$，$60<m$，$x\geqslant 3$，$80x\geqslant 60(x+1)$ 这样的式子都是用不等号连接而成的. 我们把用不等号“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”等连接而成的式子叫做**不等式**(inequality). 其中“$\geqslant$”表示“不小于”，读作“大于或等于”；“$\leqslant$”表示“不大于”，读作“小于或等于”.

试着做做

用不等式表示：

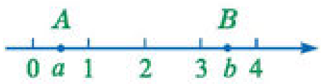
（1）y 的 3 倍不小于 8.

（2）m 与 10 的和不大于 m 的一半.

（3）某湖，汛前水位是 340 cm，警戒水位是 400 cm. 汛期，湖水平均每天上涨 8 cm，x 天后湖水将超过警戒水位.

练　习

1. 如图，数轴上 A，B 两点对应的数分别为 a，b，则 a 与 b 的大小关系是________.（用不等式表示）



（第 1 题）

2. 用不等式表示：

（1）a 是负数.

（2）x 比 -1 大.

（3）m 与 n 的差不大于 2.

（4）x 与 -5 的差是正数.

习　题

A　组

1. x 取下列各数中的哪些数，能使不等式 $x-2>1$ 成立？

$$-4，-1，0，3，5，8，8.2，9，9.5，12.$$

2. 用不等式表示下列数量关系：

（1）x 的 2 倍与 3 的和小于 15.

(2) y 的一半与 1 的差是负数.

(3) x 与 8 的和比 x 的 8 倍大.

(4) $3x$ 与 1 的和不小于 6.

(5) 长为 a，宽为 $a-2$ 的长方形的面积小于边长为 $a+1$ 的正方形的面积.

B 组

1. 小明家距新华书店的路程是 8 km. 他于星期日上午 8:30 由家出发骑车前往书店购书，先以 15 km/h 的速度行驶了 x h 后，又以 18 km/h 的速度继续行驶，结果，他在 9:00 之前赶到了书店. 请你列出相应的不等式.

2. 某超市在春节期间搞促销活动，促销方式如下：

一次性购物的金额	促销方式
不超过 200 元	全部九折
超过 200 元	不超过 200 元的部分九折，超过 200 元的部分八折

某顾客在该超市一次性购得标价为 x 元的商品.

(1) 该顾客得到的优惠不超过 18 元，请你列出不等式.

(2) 该顾客得到的优惠超过 30 元，请你列出不等式.

10.2 不等式的基本性质

利用等式的基本性质可以解方程．类似地，利用不等式的基本性质也可以解不等式．那么，不等式具有什么性质呢？

如图 10－2－1，当 $a>b$ 时，在数轴上表示 a 的点位于表示 b 的点的右侧．

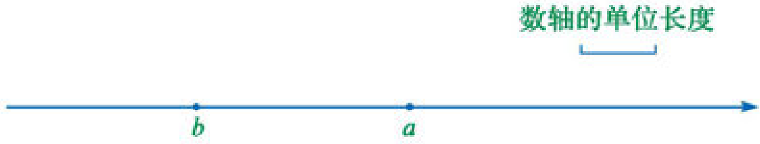


图 10－2－1

一起探究

在数轴上，与 $a+3$，$b+3$ 对应的点和与 a，b 对应的点之间具有如下的位置关系：

数	点的位置变化
$a+3$	相当于将与 a 对应的点向右平移 3 个单位长度
$b+3$	相当于将与 b 对应的点向右平移 3 个单位长度

（1）确定 $a+3$ 和 $b+3$ 的大小．

（2）如果 $c>0$，那么对于 $a+c$ 和 $b+c$ 的大小，你有什么猜想？

（3）在不等式 $a>b$ 的两边都减去同一个数或同一个整式，你认为应该有什么结论？

通过探究，我们可以得到：

不等式两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，不等号的方向不变．即

不等式的基本性质 1

如果 $a>b$，那么 $a\pm c>b\pm c$．

一起探究

1．已知 $8>3$，计算并用不等号填空：

8×2 ________ 3×2；　　$8\times(-2)$ ________ $3\times(-2)$.

$8\times\frac{1}{2}$ ________ $3\times\frac{1}{2}$；　　$8\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ ________ $3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$.

8×0.01 ________ 3×0.01；　　$8\times(-0.01)$ ________ $3\times(-0.01)$.

2. 对于 $8>3$，在不等式两边同乘一个正数，不等号的方向改变吗？在不等式两边同乘一个负数，不等号的方向会怎样？

3. (1) 通过上面的探究，你有什么发现？

(2) 再举几个例子，验证你的结论.

通过探究，我们可以得到：

不等式的两边都乘(或除以)同一个正数，不等号的方向不变. 即

不等式的基本性质 2

如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$.

不等式的两边都乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变. 即

不等式的基本性质 3

如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$.

例 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成“$x>a$”或“$x<a$”的形式：

(1) $x-1>2$；　　(2) $2x<x+2$；

(3) $\frac{1}{3}x<4$；　　(4) $-5x>20$.

解：(1) $x-1>2$，

$x-1+1>2+1$（不等式的基本性质 1），

$x>3$.

(2) $2x<x+2$，

$2x-x<x+2-x$（不等式的基本性质 1），

$x<2$.

(3) $\frac{1}{3}x<4$，

$3\times\frac{1}{3}x<3\times4$（不等式的基本性质 2），

$x<12$.

(4) $-5x>20$，

$\frac{-5x}{-5}<\frac{20}{-5}$（不等式的基本性质 3），

$x<-4$.

不等式两边都除以 -5，不等号方向要改变.

练 习

1. 已知 $a<b$，请用“$>$”或“$<$”填空：

(1) $a-2$ ________ $b-2$；　　(2) $3a$ ________ $3b$；

(3) $a+c$ ________ $b+c$；　　(4) $-\frac{1}{2}a$ ________ $-\frac{1}{2}b$.

2. 把下列不等式化为“$x>a$”或“$x<a$”的形式：

(1) $x+3<-2$；　　(2) $9x>8x+1$；

(3) $\frac{1}{2}x>-4$；　　(4) $-10x<-5$.

习 题

A 组

1. 已知 $a>b$，请用“$>$”或“$<$”填空：

(1) $a+\frac{7}{2}$ ________ $b+\frac{7}{2}$；　　(2) $a-6$ ________ $b-6$；

(3) $4a$ ________ $4b$；　　(4) $\frac{a}{5}$ ________ $\frac{b}{5}$；

(5) $-a$ ________ $-b$；　　(6) $-\frac{a}{8}$ ________ $-\frac{b}{8}$.

2. 把下列不等式化为“$x>a$”或“$x<a$”的形式：

(1) $x-5<9$；　　(2) $6x<4x-2$；

(3) $\frac{5}{3}x>x+4$；　　(4) $-4x<x+5$；

(5) $\frac{x}{2}+1>x$；　　(6) $-\frac{x+1}{2}>\frac{2x-1}{3}$.

B 组

1. 已知 $a>b$，则 $-\frac{1}{2}a+c$ ________（填“$>$”“$<$”或“$=$”）$-\frac{1}{2}b+c$.

2. 已知 $a<b$，且 $ma>mb$，求 m 的取值范围.

3. 表示 $1-a$ 和 $1+a$ 的点在数轴上的位置如图所示，请确定 a 的取值范围.

（第 3 题）

10.3 解一元一次不等式

根据不等式的基本性质，怎样解一元一次不等式呢？

对于含有未知数的不等式，能使不等式成立的未知数的值，叫做**不等式的解**(solution of inequality).

如 $x=4$，5，6，都是不等式 $80x>60(x+1)$ 的解.

试着做做

1. 对给定的 x 的值，完成下表：

x	$80x$	$60(x+1)$	x 的值是不是 $80x>60(x+1)$ 的解
3.5	280	270	是
4.1	328	306	是
5.4			
6.8			

2. 请你再任意选择两个大于 3 的 x 的值，检验其是不是不等式的解.

3. 你认为不等式 $80x>60(x+1)$ 的解有多少个？

不等式 $80x>60(x+1)$ 的解有很多，我们把它的所有解叫做这个不等式的解集.

一个含有未知数的不等式的所有解组成这个不等式的**解集**(solution set).

求不等式解集的过程，叫做**解不等式**(solving inequality).

不等式的解集，可以在数轴上表示出来.

例如，不等式 $80x>60(x+1)$ 的解集为 $x>3$，在数轴上表示，如图 10-3-1所示.

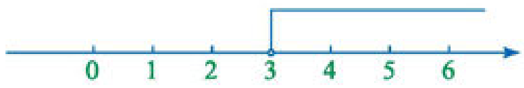


图 10-3-1

> 数轴上用空心圆圈表示 3，指的是解集中不包含 3.

又如，$-2x \geqslant 2$ 的解集为 $x \leqslant -1$，在数轴上表示，如图 10-3-2 所示.

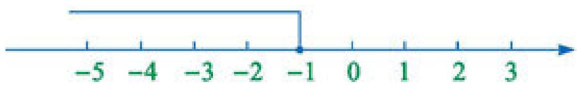


图 10-3-2

> 数轴上用实心点表示 -1，指的是解集中包含 -1.

大家谈谈

在前面遇到了这样的不等式：

$$x>3,\ 80x>60(x+1),\ m+10\leqslant\frac{1}{2}m,\ 2x<x+2.$$

请你说说这些不等式的共同特点是什么，并与同学进行交流.

我们把含有一个未知数，并且未知数的次数都是 1 的不等式叫做**一元一次不等式**(linear inequality of one unknown).

下面，我们利用不等式的基本性质来解一元一次不等式.

例 1 解不等式 $\frac{1}{2}x+1<5$，并把解集在数轴上表示出来.

解：不等式两边都减去 1，得

$$\frac{1}{2}x<5-1,$$

> 这里，类似于解方程中的移项变形.

即

$$\frac{1}{2}x<4.$$

两边都乘 2(或除以 $\frac{1}{2}$)，得

$$x<8.$$

解集在数轴上表示，如图 10-3-3 所示.

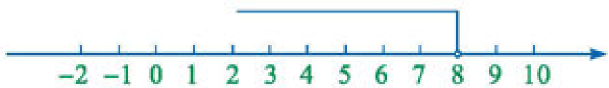


图 10-3-3

练 习

1. 把下列不等式的解集在数轴上表示出来：

(1) $x \geqslant -3$；

(2) $x < \frac{3}{2}$.

2. 解不等式 $-2x > \frac{8}{3}$，并把解集在数轴上表示出来.

习 题

A 组

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $2x+2<6$；

(2) $-3x > \frac{1}{2}$；

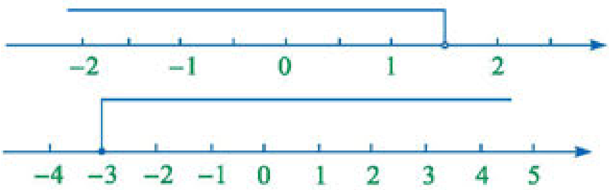
(3) $x+5>-x$；

(4) $\frac{1-x}{4}<1$.

2. 写出下列数轴上所表示的不等式的解集：

(1)

(2)



（第 2 题）

B 组

1. 已知关于 x 的不等式 $x<a+1$ 的解集与不等式 $\frac{x}{2}<-1$ 的解集完全相同，求 a 的值.

2. 已知 $3x+4 \leqslant 6+2(x-2)$，请你确定 $x+1$ 的最大值.

做一做

解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

（1）$14+3(x-5)<11$；

（2）$\dfrac{x+5}{2}-1\leqslant\dfrac{3x+2}{2}$.

大家谈谈

1. 请你谈谈解一元一次不等式的一般步骤.

2. 解一元一次不等式和解一元一次方程的过程有什么异同？与同学进行交流.

事实上，解一元一次不等式的一般步骤是：去分母，去括号，移项，合并同类项，将未知数系数化为1.

解一元一次不等式和解一元一次方程的过程基本相同，只是在解不等式时，当不等式的两边都乘（或除以）同一个负数时，要改变不等号的方向.

例2 当 x 在什么范围内取值时，代数式$\dfrac{1+2x}{3}$的值比 $x+1$ 的值大？

解：根据题意，x 应满足不等式

$$\frac{1+2x}{3}>x+1.$$

去分母，得

$$1+2x>3(x+1).$$

去括号，得

$$1+2x>3x+3.$$

移项，合并同类项，得

$$-x>2.$$

将未知数系数化为1，得

$$x<-2.$$

即当 $x<-2$ 时，代数式$\dfrac{1+2x}{3}$的值比 $x+1$ 的值大.

例 3 求不等式$\frac{x+1}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$的正整数解.

解：去分母，得

$$3(x+1)\geqslant 2(2x-1).$$

去括号，得

$$3x+3\geqslant 4x-2.$$

移项，合并同类项，得

$$-x\geqslant -5.$$

将未知数系数化为 1，得

$$x\leqslant 5.$$

所以，满足这个不等式的正整数解为 $x=1，2，3，4，5$.

练 习

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(x-1)-2>5x+1$；

(2) $3+4x<\frac{1}{2}(3+5x)$.

2. 3 与 $2a$ 的差不小于 1，求 a 的取值范围.

习 题

A 组

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $10-3(x+6)\leqslant 1$；

(2) $4(x-3)-5\geqslant 2(x-1)$；

(3) $\frac{x-2}{3}<\frac{x-1}{2}$；

(4) $\frac{1}{2}(3x-1)+x>6x-8$.

2. (1) 当 x 取什么值时，代数式 $5x+2$ 的值是负数？

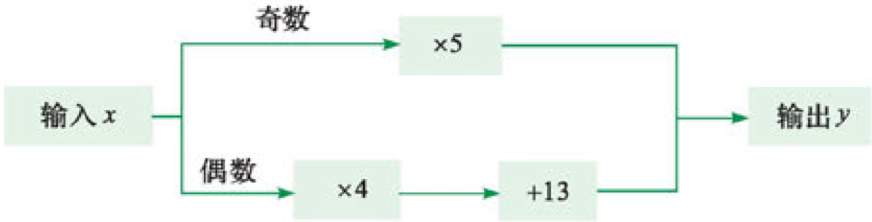
(2) 当 x 取什么值时，代数式 $x+20$ 的值小于 $\frac{1}{2}x+4$ 的值？

(3) 当 x 取什么值时，代数式 $\frac{6x+1}{3}$ 的值不大于 $-\frac{x-5}{2}$ 的值？

B 组

1. 试求不等式 $x-\frac{5+2x}{3}\geqslant\frac{3x-1}{2}-4$ 的正整数解.

2. 如图，要使输出值 y 大于 100，则输入的最小正整数 x 是________.



(第 2 题)

10.4 一元一次不等式的应用

我们能用列方程的方法解决一些现实生活中数量相等关系的问题. 实际上，现实生活中还存在着许多数量之间的不相等关系. 在这些问题中，有些可以用类似于列方程的方法，通过列一元一次不等式来解决.

七年级(一)班的学生准备用500元购买甲、乙两种图书共12套，送给老区的幼儿园小朋友. 已知甲种图书每套45元，乙种图书每套40元. 这些钱最多能买甲种图书多少套？

一起探究

1. 设可购买甲种图书 x 套，则购买甲种图书用钱为________元，购买乙种图书________套，购买乙种图书用钱为________元.

2. 购买甲、乙两种图书所用钱数与500元有什么关系？你能用不等式把这种关系表示出来吗？

3. 解上面列出的不等式，并根据解集确定实际问题的答案.

例 某商场响应国家“家电下乡”的惠农政策，决定采购一批电冰箱，优惠销售给农民朋友. 商场从厂家直接购进甲、乙、丙三种不同型号的电冰箱共80台，其中，甲种电冰箱的台数是乙种电冰箱台数的2倍，购买三种电冰箱的总金额不超过132 000元. 已知甲、乙、丙三种电冰箱每台的出厂价格分别为1 200元，1 600元和2 000元. 那么该商场购进的乙种电冰箱至少为多少台？

分析：数量之间的关系是

1 200×甲种冰箱数+1 600×乙种冰箱数+2 000×丙种冰箱数 ≤132 000.

解：设购买乙种电冰箱 x 台，则购买甲种电冰箱 $2x$ 台，丙种电冰箱 $(80-3x)$ 台.

根据题意列不等式，得

$$1\ 200\times 2x+1\ 600x+2\ 000(80-3x)\leqslant 132\ 000.$$

解这个不等式，得

$$x\geqslant 14.$$

答：至少购进乙种电冰箱 14 台.

在用不等式解决实际问题时，当求出不等式的解集后，还要根据问题的实际意义确定问题的解.

练　习

1. 如图，小明和爸爸、妈妈三人玩跷跷板，小明和妈妈坐在一端，爸爸坐在另一端. 三人的体重一共为 150 kg，小明的体重是妈妈体重的一半. 根据“爸爸这端着地”的情境，指出小明的体重应小于多少千克.

（第 1 题）

2. 某服装厂计划生产一种服装，每件成本是 60 元，售价是 80 元. 该厂生产这种服装，每月除成本外的其他开支共为 5 000 元. 如果想使生产这种服装的月获利不低于 20 000 元，那么每月至少要生产这种服装多少件？

习　题

A　组

1. 某工程队计划招聘从事甲、乙两种工作的工人共 150 名. 根据工程需要，从事乙工种的人数不少于从事甲工种人数的 2 倍. 从事甲工种的工人最多可招聘多少名？

2. 某商店在一次促销活动中规定：消费者消费不低于200元就可享受打折优惠. 一名同学为班里买奖品，准备买6本影集和若干支钢笔. 已知影集每本15元，钢笔每支8元，则他至少买多少支钢笔才能享受打折优惠？

B 组

1. 某旅游团的人数不到50，在参观一个景点时购买了一张50人的团体票，结果比按实际人数购买个人票省钱. 这个景点的个人票票价是60元/人，团体票打八折. 这个旅游团可能有多少人？
2. 某校组织七年级师生共480人春游，现有25座和45座(均含司机座位)两种客车可供租用. 已知25座客车的租金为205元/辆，45座客车的租金为370元/辆.

   (1) 若单独租用一种客车，请你通过计算说明租用哪种客车更合算.

   (2) 该校决定这次春游同时租用这两种车辆. 若45座客车比25座客车少租3辆，则45座客车最少需租用多少辆？这样的租车方式比单独租用一种车辆合算吗？说明你的理由.

10.5 一元一次不等式组

在许多问题中，所求的量常常需要满足两个或两个以上的不等关系. 这类问题就要用不等式组来解决.

电视台播出猜商品价格的节目.

主持人：这个电热水壶的价格不高于 100 元，请您猜出价格.

参赛者：80 元.

主持人：高了！

参赛者：60 元.

主持人：低了！

你认为这个电热水壶的价格在什么范围内？

下面我们用不等式来研究这个问题.

设这个电热水壶的价格为 x 元，由猜价格的过程可知

$$x<80. \qquad ①$$

同时，

$$x>60. \qquad ②$$

我们把不等式①和②的解集分别表示在数轴上，如图 10-5-1 所示.

图 10-5-1

由此可知，这个电热水壶的价格 x(元)的范围是

$$60<x<80.$$

根据需要，有时要把几个不等式组合在一起，形成一组一元一次不等

式，如

$$\begin{cases} x<80, \\ x>60. \end{cases}$$

一般地，由若干个不等式组成的一组不等式，叫做不等式组.

含有同一个未知数的一元一次不等式的不等式组叫做**一元一次不等式组**(system of linear inequalities of one unknown). 一元一次不等式组中所有不等式的解集的公共部分，叫做这个一元一次不等式组的解集.

求不等式组的解集的过程，叫做解不等式组.

解一元一次不等式组时，一般是先分别求出每个不等式的解集，再借助数轴找出它们的公共部分，这样就可以确定出不等式组的解集.

例 1 解不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}>\dfrac{x-3}{3}, & ① \\ 9x-1>4(x+1). & ② \end{cases}$$

解：解不等式①，得

$$x>-6.$$

解不等式②，得

$$x>1.$$

在数轴上表示不等式①，②的解集，如图 10－5－2 所示.

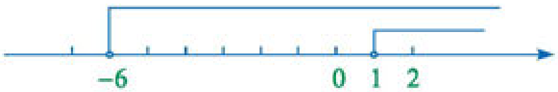


图 10－5－2

这两个不等式解集的公共部分是 $x>1$.

所以，不等式组的解集是 $x>1$.

练习

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-4<0, \\ 3x+12>0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-2\geqslant-5, \\ 9-6x>8; \end{cases}$

(3) $\begin{cases}5x+4>3x,\\ \dfrac{x-1}{2}\leqslant\dfrac{2x-1}{5};\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3x-2>x+2,\\ \dfrac{1}{2}x-1\geqslant 7-\dfrac{3}{2}x.\end{cases}$

2. 已知 $4a+5$ 和 $2a-4$ 的值都是正数，求 a 的取值范围.

习　题

A　组

解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}x-8<0,\\ 5x-6>4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4x+3\geqslant 7,\\ 11-6x>-1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}-3x\geqslant 6,\\ 2+5x>-18;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2(x-2)<1+x,\\ 3x+5\geqslant 2x;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x+6<2x-2,\\ \dfrac{x-3}{3}\geqslant 1;\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}>\dfrac{x+1}{5},\\ \dfrac{2x-1}{5}>\dfrac{x-1}{2}.\end{cases}$

B　组

1. 代数式 $1-2k$ 的值大于 -1，但不大于 5，求 k 的取值范围.

2. 如果等腰三角形的周长为 10，求腰长 x 的取值范围.

例 2　解不等式组

$$\begin{cases}2(x-3)>3x-7, & ①\\ \dfrac{1}{2}x-1>3-\dfrac{3}{2}x. & ②\end{cases}$$

解：解不等式①，得

$$x<1.$$

解不等式②，得

$$x>2.$$

在数轴上表示不等式①，②的解集，如图 10－5－3 所示．

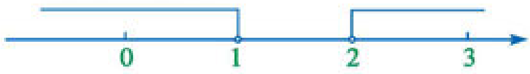


图 10－5－3

从数轴上可以看出，这两个不等式的解集没有公共部分．所以，这个不等式组无解．

两个不等式的解集可能会出现无公共部分的情况．此时，这个不等式组无解．

做一做

解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} \leqslant 1, \\ 3x+2 \leqslant 11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5(x-1) > 3(x+1), \\ -\dfrac{7}{2}x-1 \geqslant 7-\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$

大家谈谈

请你结合下面的框图，谈谈解一元一次不等式组的一般步骤．

一元一次不等式组 → 解每个一元一次不等式 → 在数轴上表示各不等式的解集 → 确定各不等式解集的公共部分 → 写出一元一次不等式组的解集

例 3　求不等式组

$$\begin{cases} 4x+3>0, & ① \\ 2x-5<0 & ② \end{cases}$$

的整数解．

解：解不等式①，得

$$x>-\frac{3}{4}.$$

解不等式②，得

$$x<\frac{5}{2}.$$

所以，不等式组的解集是 $-\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{5}{2}$．

因此，不等式组的整数解是 0，1，2．

练 习

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 3(3x+1)<-6, \\ 5x+9>3(3x-1); \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+5\leqslant -1, \\ 3-x>\dfrac{1}{2}x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-2(x-1)\geqslant 1, \\ \dfrac{1+x}{2}>x-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-5\geqslant 2x-1, \\ 3x-2>4-\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$

2. 求不等式组$\begin{cases} x-1\geqslant 1-x, \\ x+8>4x-1 \end{cases}$的整数解.

习 题

A 组

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} x+3<0, \\ 3(x-1)\leqslant 2x-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4(x+1)>5x, \\ 2(x+1)>3x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2(x+2)<1+x, \\ 3x+2>2x; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+1<x, \\ 2x-4>3x+3. \end{cases}$

2. 求满足不等式组$\begin{cases} 3x+5\geqslant -1, \\ 3-x>\dfrac{1}{2}x \end{cases}$的最大整数和最小整数.

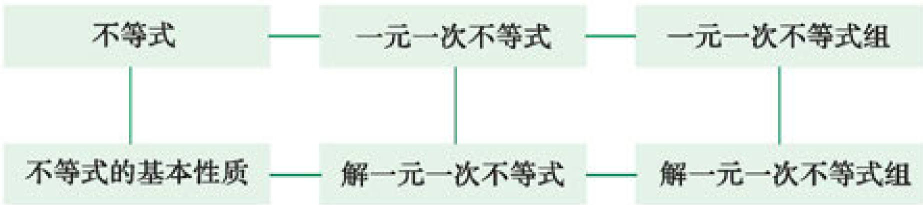
B 组

1. 已知关于 x 的不等式组$\begin{cases} x>m-1, \\ x>m+2 \end{cases}$的解集是 $x>-1$. 求 m 的值.

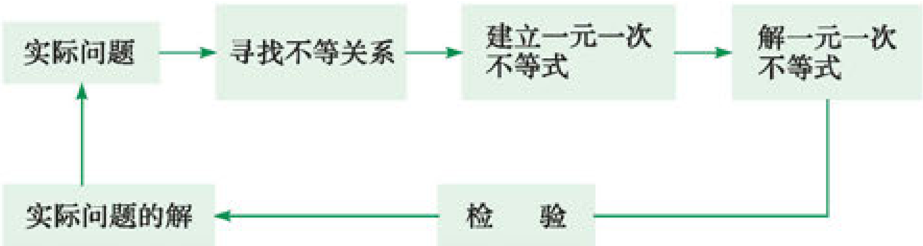
2. 已知方程组$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x+y=m \end{cases}$的解 x 的值小于等于 1，y 大于$\dfrac{1}{2}$. 求 m 的取值范围.

回顾与反思

一、知识结构



用一元一次不等式解决实际问题的过程：



二、总结与反思

1. 在一些涉及同类量之间不等关系的实际问题中，需要把相关的量用含未知数的代数式表示，根据问题中数量之间的不等关系，抽象为不等式这个数学模型，再利用不等式的基本性质，求出不等式的解集，然后检验其是否符合实际. 在建立不等式模型的过程中，需要把握以下两点：

（1）明确问题中常用的表示不相等关系词语的意义. 如“大于”“超过”“还多”“高于”等抽象为“$>$”，“小于”“不足”“还少”“低于”等抽象为“$<$”，“不大于”对应“$\leqslant$”，“不小于”对应“$\geqslant$”.

（2）在有些实际问题中，不相等关系是隐含在具体情境中的. 如买东西，花去的钱应不超过原有的钱；汽车装运货物的质量应不超过汽车规定的载重量等. 对于这类问题，要结合具体情况认真分析.

2. 想一想：不等式的基本性质是什么？利用不等式的基本性质解不等式时应注意什么？

3. 解一元一次不等式与解一元一次方程的过程有什么异同？如何确定一元一次不等式组的解集？

三、注意事项

1. 在不等式两边都乘（或除以）同一个负数时，要改变不等号的方向. 不能用 0 同乘不等式两边.

2. 要注意不等式的解集 $x>a$(或 $x<a$)与 $x\geqslant a$(或 $x\leqslant a$)是不相同的，前者不包含 a，后者包含 a. 在数轴上表示时，表示 a 的点前者用空心圆圈，后者用实心点.

3. 解一元一次不等式组时，如果各个一元一次不等式的解集没有公共部分，那么这个一元一次不等式组无解.

复 习 题

A 组

1. 指出下列不等式变形的根据：

(1) 由 $3x<2x+5$，得 $x<5$.

(2) 由 $2y>-4$，得 $y>-2$.

(3) 由 $-\frac{1}{5}x<1$，得 $x>-5$.

(4) 由 $9x-2>5x+6$，得 $x>2$.

2. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3x-7>2x+4$；

(2) $-6x+1<11$；

(3) $4(2x-1)<5(3x+2)$；

(4) $\frac{1-x}{2}\leqslant\frac{x-1}{5}+1$.

3. 当 x 为何值时，代数式 $4x+3$ 的值满足下列条件？

(1) 是正数；　　(2) 等于 0；

(3) 不大于 0；　　(4) 不小于 27.

4. 当 x 为何值时，代数式 $-\frac{1}{6}x+3$ 的值比 $6x-3$ 的值大？

5. 求不等式 $-10x+52>9$ 的正整数解.

6. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}6x+5>4x,\\18-7x<10-3x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-3(x-2)\geqslant 4,\\\frac{1+2x}{3}>x-1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{1}{4}(x+4)<1,\\ x+2>\dfrac{2(x+3)}{3};\end{cases}$ (4) $\begin{cases}8(x-0.3)>x+11.6,\\ 15-x>-\dfrac{3}{4}x+3.\end{cases}$

7. 张老师和学生们一起步行去植树．他们步行的速度是 4 km/h．出发 1 h 后，学校打电话通知张老师在 10 min 内(含 10 min)返校开会，并让张老师在原地等候，学校立即派人骑摩托车去接他．摩托车的速度至少为多大才能保证张老师按时参加会议？

8. 甲、乙两人准备整理一批新到的实验器材．若甲单独整理，则需要 40 min完成；若乙单独整理，则需要 80 min 完成．若乙单独整理时间不超过 30 min，则甲单独整理至少多少分钟才能完成？

B 组

1. 已知 a，b 是常数，且 $a\neq0$，关于 x 的不等式 $ax+b>0$：

(1) 当________时，不等式的解集是 $x>-\dfrac{b}{a}$．

(2) 当________时，不等式的解集是 $x<-\dfrac{b}{a}$．

2. 求不等式 $-2\leqslant3x-11<4$ 的整数解．

3. 观察下列图形：

(第 3 题)

它们是按一定规律排列的，并且后一个图形中“★”的个数是依照排列规律递增的，那么到第几个图形所用的“★”超过 100 个？

4. 已知一个三角形的最大角的度数为 $x+30$，最小角的度数为 $2x-30$．求 x 的范围．

5. 已知 $1-a$，$1+a$ 和 $4-2a$ 在数轴上的位置如图所示．求 a 的取值范围．

（第 5 题）

6. 某人想租用一辆汽车．现有甲、乙两家出租公司，甲公司的出租条件为汽车每行驶 1 km 需付租车费 1.10 元；乙公司的出租条件为每月付 3 000 元租车费，另外，汽车每行驶 1 km，租车人需再付 0.10 元汽车磨损费．这个人租哪家的汽车较合算？

C 组

1. 当 a 为何值时，不等式组 $\begin{cases}2-3x<8,\\ x+a>0\end{cases}$ 的解集是 $x>-2$？

2. 当 k 为何值时，满足方程组 $\begin{cases}3x+y=k,\\ y=2x\end{cases}$ 的 x 和 y 的值都小于 1？

3. 某商厦以 200 元/件的价格购进某种商品 1 000 件，在进价基础上加价 25% 作为销售定价．商厦计划在节日期间拿出 100 件按九折出售，而在销售淡季按六折甩卖．为使这批商品赢利，需要在节日和淡季之外按原定价销售这种商品多少件？

第十一章

因式分解

在本章中，我们将学习

- 因式分解
- 用提公因式法分解因式
- 用公式法分解因式

整式乘法 ⇄ 因式分解

多项式乘法是把几个整式的乘积化为一个多项式. 反过来，你能将一个多项式分解成几个整式乘积的形式吗？

$$ma+mb=m(a+b)$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

11.1 因式分解

在小学阶段，我们由数的乘法运算获得启发，建立了因数的概念.类似地，我们是否可以探索从整式的乘法获得类似“因数”的概念呢？

观察与思考

观察下面计算 $2\,011^2-2\,011\times 2\,010$ 和 37^2-36^2 的过程，哪种更简便？

小明的方法	小亮的方法
$2\,011^2-2\,011\times 2\,010$	$2\,011^2-2\,011\times 2\,010$
$=4\,044\,121-4\,042\,110$	$=2\,011\times(2\,011-2\,010)$
$=2\,011.$	$=2\,011.$
37^2-36^2	37^2-36^2
$=1\,369-1\,296$	$=(37+36)(37-36)$
$=73.$	$=73.$

小亮的方法是运用了乘法对加法的分配律以及平方差公式，运算较简单.

现在，我们来研究多项式的因式分解问题.

由整式的乘法运算，我们知道：

$x(x-2)=x^2-2x$，　$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，　$(x+1)^2=x^2+2x+1.$

反过来，可以把这些多项式写成整式乘积的形式：

$x^2-2x=x(x-2)$，　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，　$x^2+2x+1=(x+1)^2.$

像这样，把一个多项式分解成几个整式乘积的形式，叫做多项式的**因式分解**(factorization)，也叫做将多项式**分解因式**(factoring). 其中每个整式都叫做这个多项式的因式.

大家谈谈

1. 多项式相乘的结果是什么？
2. 一个多项式进行因式分解的结果是什么？

> 因式分解的结果是几个整式乘积的形式.

多项式的因式分解与乘法运算是不同的. 多项式的因式分解是把一个多项式化成几个整式的乘积，而多项式的乘法运算是把几个整式的乘积化成一个多项式.

多项式的因式分解与多项式的乘法运算是相反的变形过程.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2 \qquad\qquad x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

多项式 $x+y$ 与 $x-y$ 的乘积为 x^2-y^2　　多项式 x^2-y^2 分解为 $x+y$ 与 $x-y$ 的乘积

做一做

1. 下列各式中，从等号左边到右边的变形，哪些是多项式的因式分解？

(1) $x^2-4=(x+2)(x-2)$；　　(2) $x^2+4x+4=(x+2)^2$；

(3) $7m+14n=7(m+2n)$；　　(4) $x(y+1)=xy+x$.

2. 下列对多项式的变形，哪些是因式分解？是因式分解的，指出它的各因式.

(1) $x^2-x=x(x-1)$；　　(2) $10x+5y=5(2x+y)$；

(3) $a^2-1=(a+1)(a-1)$；　　(4) $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

练　习

1. 下列各式从等号左边到右边的变形，哪些是因式分解？

(1) $(m+n)(m-n)=m^2-n^2$；　　(2) $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$；

(3) $5a+10b=5(a+2b)$；　　(4) $x^2-2x+1=x(x-2)+1$.

2. 请将下列等式左边多项式的另一个因式填在括号里：

(1) $2x+4=2(\qquad)$；　　(2) $x-xy=x(\qquad)$；

(3) $16x^2-1=(4x+1)(\qquad)$；(4) $a^2+6a+9=(a+3)(\qquad)$.

习　题

1. 对下列各式所进行的因式分解正确吗？如果不正确，请改正过来.

(1) $ab-b=b(a-1)$；　　(2) $-10x-10=-10(x-1)$；

(3) $3x+3y=3(x+y)$；　　(4) $m^2+4m+4=m^2+4(m+1)$.

2. 请将下列等式左边多项式的另一个因式填在括号里：

(1) $2R-2r=2(\qquad)$；　　(2) $3mn-6nx=(\qquad)(m-2x)$；

(3) $3ax+3ay=3a(\qquad)$；　　(4) $10ax-15xy+5x=5x(\qquad)$.

11.2 提公因式法

提公因式法是进行多项式因式分解的最基本方法之一．用提公因式法分解因式的关键是确定多项式的公因式．

观察与思考

1．多项式 $ma+mb+mc$ 有几项？每一项的因式都有哪些？这些项中有没有公共的因式？若有，是哪个？

2．多项式 ab^2-2a^2b 的两项中，有没有公共的因式？若有，是哪些？

实际上，有：

多项式	项	各项的公共因式
$ma+mb+mc$	ma，mb，mc	m
ab^2-2a^2b	ab^2，$-2a^2b$	a，b，ab

一般地，多项式的各项都含有的因式，叫做这个多项式各项的**公因式**(common factor)，简称多项式的公因式．

逆用乘法对加法的分配律，可以把公因式写在括号外边，作为积的一个因式，写成下面的形式：

$$ma+mb+mc=m(a+b+c),$$

$$ab^2-2a^2b=ab(b-2a).$$

这种将多项式分解因式的方法，叫做提公因式法．

做一做

1．写出下列多项式的公因式：

(1) $6x-9x^2$；

(2) $abc+2a$；

(3) $abc-ab^2+2ab$；

(4) $2x^2y+4xy^2-6xy$．

2. 先指出下列多项式的公因式，再进行因式分解：

（1）x^2+2x；　　（2）$2x^2+4x$；

（3）$2a^2x-6ax^2$；　　（4）$4a^4-12a^3+16a^2$.

大家谈谈

在“做一做”中，三名同学对多项式 $2x^2+4x$ 分解因式的结果如下：

（1）$2x^2+4x=2(x^2-x)$；

（2）$2x^2+4x=x(2x+4)$；

（3）$2x^2+4x=2x(x+2)$.

请你谈谈用提公因式法分解因式应注意的问题.

一般地，当多项式的各项系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数，字母应取各项相同的字母，且相同字母的指数取次数最低的.

例 1 把下列多项式分解因式：

（1）$-3x^2+6xy-3xz$；　　（2）$3a^3b+9a^2b^2-6a^2b$.

解：（1）
$$\begin{aligned}&-3x^2+6xy-3xz\\=&(-3x)\cdot x+(-3x)\cdot(-2y)+(-3x)\cdot z\\=&-3x(x-2y+z).\end{aligned}$$

> 公因式的系数是负数时，提公因式后各项要变号.

（2）
$$\begin{aligned}&3a^3b+9a^2b^2-6a^2b\\=&3a^2b\cdot a+3a^2b\cdot 3b-3a^2b\cdot 2\\=&3a^2b(a+3b-2).\end{aligned}$$

做一做

把 $5ab^3-10b^2c+5b^2$ 分解因式.

例 2 分解因式：$2a(b+c)-5(b+c)$.

解：
$$\begin{aligned}&2a(b+c)-5(b+c)\\=&(b+c)\cdot 2a-(b+c)\cdot 5\\=&(b+c)(2a-5).\end{aligned}$$

> 把 $b+c$ 看成一个整体“提”出来.

练　习

1. 把下列各式分解因式：

（1）$5a+5b$；

（2）m^2+m；

（3）x^2+2x；

（4）$3xy+3xz$.

2. 把下列多项式的公因式和分解因式的结果填入表格中：

多项式	公因式	分解因式的结果
$5a^2+10a^2bc$		
$12xyz-9x^2y^2$		
$2x^2+4xy-6x$		

3. 把下列各式分解因式：

（1）$-2x+xy-xz$；

（2）$-7ab-14abx+49aby$；

（3）$m(x+2y)-2n(x+2y)$；

（4）$2(x-y)^2-x(y-x)$.

习　题

A　组

1. 把下列各式分解因式：

（1）$10a-5c$；

（2）$ab-2abc$；

（3）$5xy-xyz$；

（4）$a^2+ab-ac$.

2. 把下列各式分解因式：

（1）$2x^2y-4xy^2z$；

（2）$7a^2b+14ab^2c$；

(3) $15mn^2p^2-5mnp$；

(4) $4ab-6ab^2$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $4a^2b^2-ab^2$；

(2) $-12a^2b^2c+4a^2b^2+2ab^2c$；

(3) $-4x^2y^2+8x^2y-8xy$；

(4) $x(x+y)(x-y)-x(x-y)^2$.

4. 用简便方法计算：

(1) $2\,001^2-2\,001$；

(2) $2\,005\times2\,006-2\,005\times2\,004+8\times2\,005$.

5. 某商场共有三层，第一层有商品$(a+b)^2$种，第二层有商品$a(a+b)$种，第三层有商品$b(a+b)$种．这个商场共有多少种商品？请将结果进行因式分解.

B 组

1. 当$x=37$时，用简便方法求x^2-36x的值.

2. 已知$x^2+3x=-2$，求$5x^{1\,000}+15x^{999}+10x^{998}$的值.

3. a是整数，请说明a^2+a一定能被2整除的理由.

11.3 公式法

整式相乘与因式分解是互为相反的过程．如果把学过的乘法公式逆过来使用，那么就可以将某些多项式分解因式．

实际上，把平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

反过来，就得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这样就成为分解因式的一个公式了．

试着做做

试着将下面的多项式分解因式：

（1）$p^2-16=$____________；（2）$y^2-4=$____________；

（3）$x^2-\frac{1}{9}=$____________；（4）$4a^2-b^2=$____________．

如果一个多项式可化为两个整式的平方差的形式，那么它就可以用平方差公式分解因式了．

例 1 把下列各式分解因式：

（1）$4x^2-9y^2$；（2）$(3m-1)^2-9$．

解：（1）
$$\begin{aligned}&4x^2-9y^2\\=&(2x)^2-(3y)^2\\=&(2x+3y)(2x-3y).\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}&(3m-1)^2-9\\=&(3m-1)^2-3^2\\=&(3m-1+3)(3m-1-3)\\=&(3m+2)(3m-4).\end{aligned}$$

例 2 把下列各式分解因式：

（1）a^3-16a；（2）$2ab^3-2ab$．

解：(1)　a^3-16a

$=a(a^2-16)$

$=a(a+4)(a-4)$.

(2)　$2ab^3-2ab$

$=2ab(b^2-1)$

$=2ab(b+1)(b-1)$.

当多项式有公因式时，应先提出公因式，再看能否利用平方差公式进行因式分解.

练　习

1. 下面分解因式的结果是否正确？如果不正确，指出错在哪里，并改正过来.

(1) $4x^2-y^2=(4x+y)(4x-y)$；

(2) $ab^2-9a^3=(b+3a)(b-3a)$.

2. 运用公式法分解因式：

(1) $25a^2-16b^2$；　(2) $a^2b^2-\frac{1}{9}c^2$；

(3) $(a+2b)^2-4$；　(4) x^4-25x^2.

习　题

A　组

1. 把下列各式分解因式：

(1) $256-x^2$；　(2) $9x^2-64$；

(3) $\frac{1}{16}x^2-m^2n^2$；　(4) $9a^4-a^2$.

2. 下列各式可以用平方差公式分解因式吗？如果可以，请分解；如果不可以，请说明理由.

(1) x^2+y^2；　(2) $-x^2+y^2$；

(3) $-x^2-y^2$；　(4) x^2-81.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $4x^2-100$；　(2) $12y^4-3y^2$；

(3) x^3-64x；　(4) $2a^4-50a^2$.

4. 把下列各式分解因式：

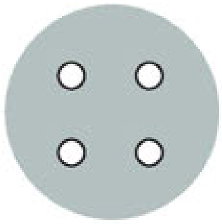
(1) $(x+1)^2-a^2$；

(2) $(2x+3)^2-4m^2$；

(3) $(2x+3)^2-(3x-4)^2$；

(4) $4(3x+y)^2-(2x-y)^2$.

5. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上冲去半径为 r 的四个小圆孔. 若 $R=8.6$ cm，$r=0.7$ cm，请你利用因式分解的方法计算出剩余钢板的面积.（π 取 3.14）



（第 5 题）

B 组

1. 分解因式：x^4-1.

2. 计算：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$.

像平方差公式一样，若把完全平方公式反过来，就得到

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

这样，我们也可以利用完全平方公式把一些多项式进行因式分解.

例 3 把下列各式分解因式：

(1) $t^2+22t+121$；　　(2) $m^2+\frac{1}{4}n^2-mn$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&t^2+22t+121\\=&t^2+2\times11t+11^2\\=&(t+11)^2.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&m^2+\frac{1}{4}n^2-mn\\=&m^2-2\cdot m\cdot\frac{1}{2}n+\left(\frac{1}{2}n\right)^2\\=&\left(m-\frac{1}{2}n\right)^2.\end{aligned}$$

大家谈谈

1. 下面的多项式能否用完全平方公式分解因式？请说明理由.

(1) $x^2+10x+25$；　　(2) $4m^2-4m+1$；

(3) $4a^2+18ab+9b^2$；　　(4) $m^2-4mn+4n^2$.

2. 具有什么特征的多项式能用完全平方公式分解因式？

例 4 把下列各式分解因式：

(1) $ax^2+2a^2x+a^3$；

(2) $(x+y)^2-4(x+y)+4$；

(3) $(3m-1)^2+(3m-1)+\frac{1}{4}$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&ax^2+2a^2x+a^3\\=&a(x^2+2ax+a^2)\\=&a(x+a)^2.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(x+y)^2-4(x+y)+4\\=&(x+y)^2-2\cdot(x+y)\cdot 2+2^2\\=&(x+y-2)^2.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(3m-1)^2+(3m-1)+\frac{1}{4}\\=&(3m-1)^2+2\cdot(3m-1)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\\=&\left(3m-1+\frac{1}{2}\right)^2\\=&\left(3m-\frac{1}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

运用平方差公式和完全平方公式分解因式的方法叫做公式法.

练　习

1. 把下列各式分解因式：

(1) $2xy-x^2-y^2$；　　(2) $36p^2+12pq+q^2$；

(3) $16x^2+8x+1$；　　(4) $a^2-4a(b+c)+4(b+c)^2$.

2. 把下列各式分解因式：

（1）$-x^2+2x-1$；　　（2）$x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$；

（3）$4x^2+4x+1$；　　（4）a^4-2a^2+1.

习　题

A　组

1. 把下列各式分解因式：

（1）$x^2+8x+16$；　　（2）$64x^2+y^2+16xy$；

（3）$y^2+y+\frac{1}{4}$；　　（4）$\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{3}ts+s^2$.

2. 把下列各式分解因式：

（1）$6xy-x^2-9y^2$；　　（2）$-m^3+2m^2-m$；

（3）$3x^2-6x+3$；　　（4）$4xy^2+4x^2y+y^3$.

3. 把下列各式分解因式：

（1）$x^2-6x(y-z)+9(y-z)^2$；

（2）$(a+b)^2-4(a+b)c+4c^2$.

4. 用简便方法计算：$2\,001^2-4\,002+1$.

B　组

1. 把下列各式分解因式：

（1）x^4-8x^2+16；　　（2）$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$.

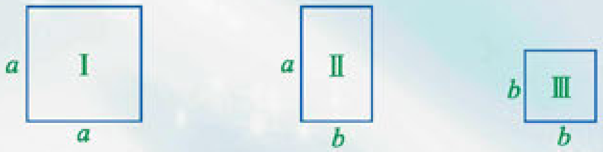
2. 请给 $4x^2+1$ 添上一个单项式，使新得到的多项式能运用完全平方公式分解因式.

数学活动

拼图与分解因式

我们曾经借助拼图，利用图形面积的不同表示，给出了一些整式相乘的几何解释. 同样，我们也可以利用拼图，对一些多项式进行因式分解.

活动一：如下图所示，请你剪出正方形和长方形卡片各若干张.



活动二：

1. 选取三种卡片各若干张，把它们拼成一个长方形或正方形，使其面积分别用下面的多项式表示，并把这些多项式进行因式分解.

(1) $a^2+4ab+4b^2$；(2) $a^2+3ab+2b^2$；(3) $a^2+4ab+3b^2$.

2. 借助拼图，利用所得图形面积的不同表示，给出下列多项式分解因式的结果.

(1) $2a^2+3ab+b^2$；(2) $2a^2+7ab+6b^2$.

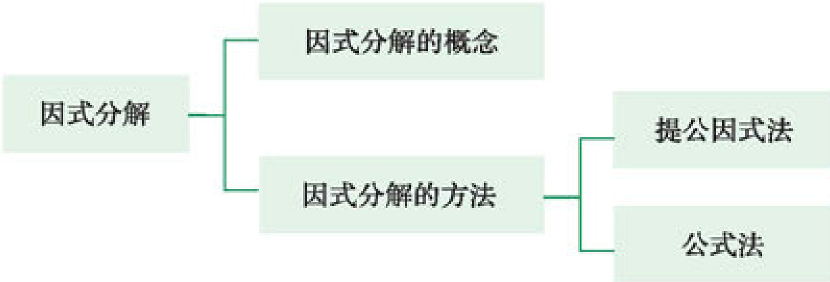
活动三：

1. 选取其中两种卡片各若干张，试着把它们拼成一个长方形或正方形；利用所得图形面积的不同表示，对表示所拼长方形或正方形面积的多项式进行因式分解.

2. 选取Ⅰ型卡片1张、Ⅱ型卡片2张、Ⅲ型卡片1张，把它们拼成一个正方形，利用所得图形面积的不同表示，对表示所拼正方形面积的多项式进行因式分解.

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

因式分解主要用于代数式的恒等变形，是数与代数知识后续学习的基础.

1. 整数乘法与因数分解是互逆的过程. 类似地，整式乘法与因式分解也是互逆的过程.

2. 提公因式法是分解因式最基本的方法，它实质上是单项式和多项式或多项式和多项式相乘的逆过程.

3. 公式法是逆用整式的乘法公式，对某些多项式进行分解因式的方法.

4. 因式分解的方法有____________.

5. 提公因式法的关键是确定____________.

6. 利用公式法分解因式时，主要依据的公式是____________.

三、注意事项

1. 用提公因式法分解因式时，不要丢掉括号内的常数项；当公因式的系数是负数时，提取公因式后，括号内各项要变号.

2. 运用整式乘法可以检验分解因式的结果是否正确.

复　习　题

A　组

1. 把下列各式分解因式：

(1) $a^2+ab-ac$；

(2) $x^2y-2xy-5y^2$；

(3) $2x^2y-6x$；

(4) $14m^2+21mn$;

(5) $-7x^2y^3-28x^3y^2$;

(6) $-5x^8y^6-25x^7y^6$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $2ab(a-2)-8b(a-1)(a-2)$;

(2) $a(x-1)+b(x-1)-c(1-x)$;

(3) $10a(x-y)^2-5b(y-x)$;

(4) $-ab(a-b)^2+a(b-a)^2$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $4x^2-y^2$;　　(2) $49x^2-9y^2$;

(3) $a^2b^2-c^2$;　　(4) $-\frac{1}{25}m^2+16$;

(5) $(x+y)^2-(2x-3y)^2$;　　(6) $16(x-1)^2-(x+2)^2$.

4. 把下列各式分解因式：

(1) $9x^2+6x+1$;　　(2) $16x^2-8x+1$;

(3) $a^2b^2+8ab+16$;　　(4) $16a^2+24ab+9b^2$;

(5) $a^2-a+\frac{1}{4}$;　　(6) $4x^2+x+\frac{1}{16}$;

(7) $(a+b)^2-12(a+b)+36$;　　(8) $4x^2+4x(m+n)+(m+n)^2$.

5. 把下列各式分解因式：

(1) $(x^2+4)^2-16x^2$;

(2) x^4-18x^2+81;

(3) $16x^4-1$;

(4) $x^2(x-y)-y^2(x-y)$.

B 组

1. 把下列各式分解因式：

(1) $2x^2-2y^2$;　　(2) a^3-2a^2+a;

(3) $3ma^3+6ma^2+3ma$;　　(4) $4xy^2+4x^2y+y^3$;

(5) $10x^3y-5x^2y-5x^4y$;　　(6) $m^2n+14mn+49n$.

2. 把$(x+3)(x+7)+4$写成一个多项式的平方的形式.

3. 用因式分解的知识，说明下列说法的正确性.

(1) $5^{12}-4\times5^{11}+10\times5^{10}$能被3整除.

(2) $(4n^2+5)^2-9$总能被8整除.

(3) 两个连续奇数的平方差能被8整除.

C 组

1. 计算：$11^2-12^2+13^2-14^2+15^2-16^2+17^2-18^2+19^2-20^2$.

2. (1) 计算：

$(x-1)(x+1)=$________；

$(x-1)(x^2+x+1)=$________；

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=$________；

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=$________.

(2) 从上面的计算中你发现了什么规律?

(3) 分解因式：x^3-1.

(4) 说明$2\ 013^3-1$能否被2 012整除.

综合与实践一

透过现象看本质

一、问题

仔细阅读并思考下列几个问题．你能看到这几个问题的相同点与不同点吗？请选择其中一个问题给予解答．

问题 1．已知平面上有 n 个($n\geqslant 2$)点 A_1，A_2，…，A_{n-1}，A_n，且其中任意三点都不在同一条直线上．过任意两点画一条直线，一共能画多少条直线？

问题 2．已知线段 AB，除线段已有的两个端点外，再在线段 AB 上画出($n-2$)个($n\geqslant 2$)点，图中一共有多少条线段？

问题 3．已知$\angle AOB$，除角的两边外，再在其内部由点 O 引($n-2$)条($n\geqslant 2$)射线，图中一共有多少个角？

问题 4．某年度足球比赛中有 n($n\geqslant 2$)个球队参加，每两个球队之间比赛一场，一共要进行多少场比赛？

问题 5．往返于 A，B 两地之间的列车，除 A，B 两站外，中途有($n-2$)个($n\geqslant 2$)车站停靠．已知列车往返于同一条线路上的票价相同，那么一共有多少种不同票价的车票？

问题 6．某次集会有 n($n\geqslant 2$)人参加，每两人互相握手一次，一共握手多少次？

二、解决方案

1．逐个解决问题 1～6，从中体会它们的思维方法、解决问题的途径是否一样，观察最后的结果是否一样．

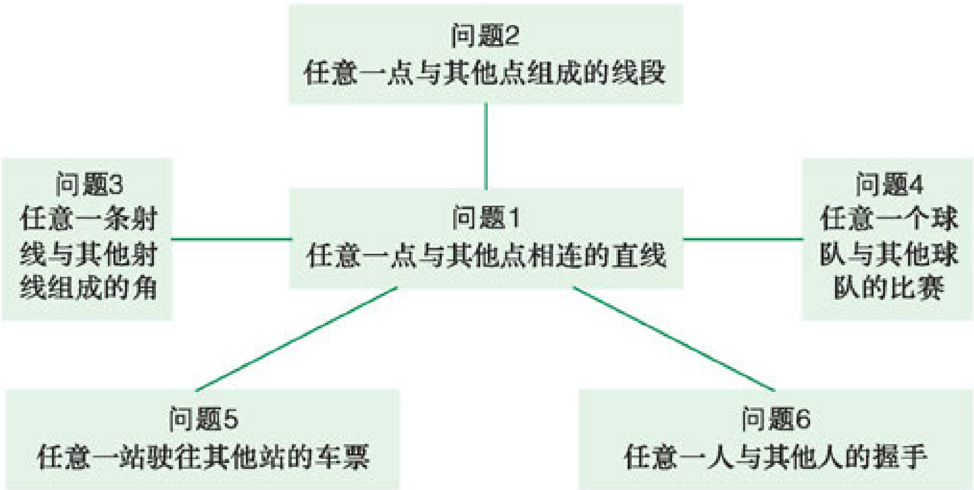
2．仔细分析各问题中"n 个事物中的任意一个事物都与其余的($n-1$)个事物发生联系"这一本质特征，体会解决这些问题的思维方法是否相同，并就其中一个自己感兴趣的问题进行解答．

3．对个数 n，可以从 2 开始，由简到繁，逐步归纳；也可以从它的中间某数 k 开始，递推一步到 $k+1$；还可以直接对它进行推理说明．

4．注意重复计算的问题．

三、可参考的知识与方法

用抽象思维的方式，并结合下列图示，思考问题 1～6 中"关键语句"彼此之间的联系与区别．



四、反思与交流

我的结果	
我解决问题的主要过程及方法	
同学们的建议	
修改与完善之处	
我的感悟	

综合与实践二

蓄水池建在哪里较好?

一、问题

在一条平直的道路旁，栽有 n 棵树，且相邻两棵树之间的距离相等. 为了浇灌这些树，护林队计划建一个蓄水池汇集雨水，并要求此蓄水池到每棵树的距离之和最小，以便节约用水. 那么蓄水池最好建在哪里?

二、解决方案

1. 通过把平直的道路视为一条直线，n 棵树视为 n 个点，将实际问题转化为直观的几何解释，并给出相应的数学表达.

2. 用数轴、两点之间的距离以及所学知识建立数学模型.

3. 先对自然数 $n=1,2,3,4,5$ 的情况分别进行说明，再归纳整理，找出规律，得出一般结果(n 为任意非零自然数的情况)，并给予说明.

4. 写出完整的解决问题的过程，并与同学们交流分享.

三、可参考的知识与方法

1. 两点之间距离的表示.

我们知道，两点之间线段的长度叫做这两点之间的距离. 我们把 A，B 两点之间的距离，记作 $|AB|$.

已知两点 A，B，那么：

(1) $|AB|=|BA|$；

(2) 若点 C 在线段 AB 上，则 $|AC|+|CB|=|AB|$.

2. 思考并说明以下问题：

(1) 已知点 P 和直线 l 上两点 A，B，那么只有当点 P 在线段 AB 上时，点 P 到点 A，B 的距离之和 $|PA|+|PB|$ 最小，且

$$(|PA|+|PB|)_{最小值}=|AB|.$$

(2) 已知点 P 和直线 l 上依次排列的三点 A，B，C，那么只有当点 P 在点 B 处时，点 P 到点 A，B，C 的距离之和 $|PA|+|PB|+|PC|$ 最小，且

$$(|PA|+|PB|+|PC|)_{最小值}=|AB|+|BC|=|AC|.$$

（3）设 k 是任意一个非零自然数，那么：

当 $k\geqslant 2$ 时，

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{(k-1)k}{2};$$

当 $k\geqslant 1$ 时，

$$1+3+5+\cdots+(2k-3)+(2k-1)=k^2.$$

3. 数形结合、分类讨论、归纳概括等是解决问题的重要方法，也是解决本实际问题不可缺少的环节，请结合本问题进行认真思考，并学会应用.

四、反思与交流

我的结果	
我解决问题的主要过程及方法	
同学们的建议	
修改与完善之处	
我的感悟	

编写后记

2001 年，国家正式启动了义务教育阶段的新一轮课程改革。有感于时代的召唤，我们这群研究和从事数学教育的工作者，满怀共同的梦想，成立了编写组，尝试进行义务教育七年级至九年级数学教科书的建设与编写。

2001 年 3 月份，编写组正式向教育部提出了编写立项申请。经专家评审，当年 12 月通过了立项。编写组从此开始编写工作。

2003 年 3 月，这套依据《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》编写的教科书，经全国中小学教材审定委员会审查通过，并公布于当年的订书目录中，作为义务教育课程标准实验教科书，供实验区选用。

2010 年 10 月，这套教科书开始修订准备。

2011 年 12 月，七年级上册和七年级下册的修订工作完成。

2012 年 3 月，按照《义务教育数学课程标准(2011 年版)》修订后的七年级上册和七年级下册，经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过。现在与大家见面的这本教科书就是修订后的七年级下册。

我们在编写这套教科书的过程中，得到了众多专家、学者、数学教师的大力支持和热情帮助，特别是下面这些老师，更是我们应当感谢的：

王宝仓、杨志坚、孟庆林、张庆、仇敏、陈雪梅、石凌等，都是这套教科书原实验版本的编者，对教科书的编写作出了很大贡献；

刘璐、许艳秋、路召恒、王春丽、李春祥、魏元洪等，对这套教科书的实验给予了大力支持和帮助；

郭荣华、章巍、许春英、张燕飞、李永强、滕杰、张晓娴、牛翠英、杨金钗、刘建锋、靳春会、陈彦敏、徐在荣、王建华、孔庆雷等，在这套教科书的修订过程中，参与讨论并提出了许多宝贵意见。

我们深知，教科书的编写和建设是一个长期的任务，更是一个不断完善、不断发展的过程。我们会继续努力，朝着精品教科书的建设目标奋力进取。我们也诚挚地希望广大的数学教师继续关注和支持这套教科书，使它越来越好。

编者

2012 年 10 月